



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = -6y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x - 6)^2 + (y - 6)^2 + (z - 6)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 20 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 10$, $BE = 9$.
4. [4 балла] В теленгра ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарику. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть девять коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$ являются пятым и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| + \left|y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| \leqslant 8$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипotenузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle CBA = 46^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой** из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Теперь ^(№1 - прошл.) рассмотрим $z^2 + zx + x^2 = 6 (z+x) \Rightarrow$

$$z^2 + z(x-6) + (x^2 - 6x) = 0.$$

$$\Rightarrow D = (x-6)^2 - 4(x^2 - 6x) - \text{зависит от } x.$$

$$z = \frac{6-x \pm \sqrt{D}}{2}. \text{ Аналогично } y^2 + yx + x^2 = 6(y+x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 + y(x-6) + (x^2 - 6x) = 0$$

$$y = \frac{6-x \pm \sqrt{D}}{2}. \text{ Так у нас получается, что } x \neq y \neq z, x \neq z$$

то есть есть $z \neq y$, то y однай переменной

$$+ \sqrt{D}, \text{ а } y \text{ другой } - \sqrt{D}, \text{ т.е. } y+z = \frac{6-x+\sqrt{D}}{2} + \frac{6-x-\sqrt{D}}{2} =$$

$$= 6-x. \Rightarrow y+z+x=6. \Rightarrow A = -6 \cdot 6 + 36 \cdot 3 =$$

$$= 36 \cdot 2 = 72. - \text{ тот же ответ, что и первый.}$$

т.е. в любом случае (даже если 2-ое случай, когда все различные невозможен) ответ 72.

Ответ: 72

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = z^2 - 6z, (1) \\ yz = x^2 - 6x, (2) \\ zx = y^2 - 6y; (3) \end{cases}$$

можем делить, т.к. $x, y, z \neq 0$
Подставим в (2):

$$yz = x^2 - 6x \Rightarrow z = \frac{x^2 - 6x}{y}$$

$$z^2 - 6z = x^2 - 6x \Rightarrow z^3 - 6z^2 = x^3 - 6x^2. \text{ Т.к. каша.}$$

система симметрична относительно x, y и z , то

$$z^3 - 6z^2 = x^3 - 6x^2 = y^3 - 6y^2$$

$$z^3 - x^3 = 6(z^2 - x^2)$$

$$(z-x)(z^2 + zx + x^2) = 6(z-x)(z+x)$$

$$z-x=0, \quad (1\text{сл})$$

$$z^2 + zx + x^2 = 6(z+x), \text{ т.к. если } z-x \neq 0, \text{ то поделим на } (z-x)$$

$$(1\text{сл}) z=x. \Rightarrow \text{б. (1): } zy = z^2 - 6z \Rightarrow y = z-6, \quad (z \neq 0)$$

$$\Rightarrow \text{б. (3): } z^2 = \cancel{y(y-6)} \Rightarrow z^2 = (z-6)(z-12)$$

$$z^2 = z^2 - 18z + 72$$

$$z = \frac{72}{18}$$

$$z=4 \Rightarrow y=z-6=4-6=-2, \quad x=4. \Rightarrow (x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = (-2)^2 \cdot 2 + (-8)^2 = 8 + 64 = 72.$$

аналогично, если у нас 2 из 3 переменных равны, то ответ - 4?. Теперь скажи, если все переменные различные. \Rightarrow из симметрии будет вид-ся:

$$\begin{cases} z^2 + zx + x^2 = 6(z+x), \\ y^2 + yx + x^2 = 6(y+x), \end{cases} \Rightarrow z^2 + x^2 + y^2 = 6(x+y+z). \text{ тогда,}$$

$$z^2 + yz + y^2 = 6(y+z);$$

$$(x-y)^2 A = (x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = y^2 + z^2 + x^2 - 12(x+y+z) + 36 \cdot 3 =$$

$$= y^2 + z^2 + x^2 - 12(x+y+z) + 36 \cdot 3 = 6(x+y+z) - 12(x+y+z) + 36 \cdot 3 =$$

$$= -6(x+y+z) + 36 \cdot 3 = A$$

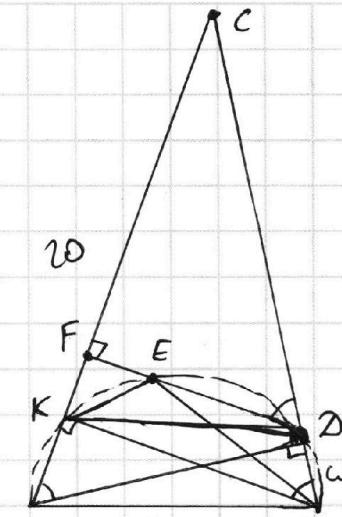


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



н/з

$$FA? \quad BE = 9, \quad AC = 20, \quad AB = 10.$$

т.к. AB -диаметр, то $\angle ADB = \angle AKB = 90^\circ$.

т.к. AD -высота, и KB -высота.

$$FD \perp AC \text{ и } KB \perp AC \Rightarrow FD \parallel KB.$$

$$\text{по теореме синусов для } \omega: 2R = \frac{EB}{\sin \angle EDB};$$

$$AB\text{-диам} = 2R = 10. \Rightarrow \sin \angle EDB = \sin \angle = \\ = \frac{EB}{2R} = \frac{9}{10} = 0,9.$$

$\angle FDC = \angle KBC$, т.к. $FD \parallel KB$ это корт. улн.

$$\text{т.к. } AKDB \text{-внuc, то } \angle KAD = \angle KBD = \angle FDC. \text{ Замет, что} \\ \sin(\angle) = \sin(180^\circ - \angle), \text{ т.е. } \sin \angle FDC = \sin \angle FDB = 0,9. \text{ Из} \\ \angle CAD = \angle FDC, \text{ то } \sin \angle CAD = \sin \angle = 0,9. \Rightarrow \sin \angle CAD = \\ = \frac{DC}{AC} \Rightarrow DC = \sin \angle \cdot AC = 20 \cdot 0,9 = 18. \text{ По теореме Пифагора} \\ \text{для } \triangle DAC: AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{20^2 - 18^2} = \sqrt{2 \cdot 38} = 2\sqrt{19}.$$

$$\frac{AF}{AD} = \cos \angle FAD = \sqrt{1 - \sin^2 \angle FAD} = \sqrt{1 - 0,9^2} = \sqrt{0,1 \cdot 1,9} = \sqrt{0,19} \\ \text{т.к. } \cos^2 \angle = 1 - \sin^2 \angle \\ \Rightarrow AF = AD \cdot \cos \angle FAD = 2\sqrt{19} \cdot \sqrt{0,19} = 2\cancel{\sqrt{19}} \cdot \cancel{\sqrt{0,19}} = \frac{2 \cdot 19}{10} = 3,8.$$

Ответ: ~~2,8~~ 3,8. Ответ: 3,8



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

14.

У нас было x коробок. Тогда.
Из них можно вернуть выиграть, выиграв 5, было:

$$\frac{C_{x-3}^6}{C_x^5} \text{ т.к. } \cancel{\text{вернуть это}} = \frac{\text{количество диагонар. случаев}}{\cancel{\text{всевозможн.}}}.$$

У нас. 3 верных коробки из x . т.е. ~~диагонар.~~ случаев
это C_{x-3}^3 . т.к. ~~из~~ эти 3 ~~и~~ ^{считаем} вместе ^{всюрами}, остается
выиграть 2 коробки из $(x-3)$ оставшихся. Это C_{x-3}^2 .
а всего способов выиграть C_x^5 . т.е. 5 кор. из x .
Далее. вернуть ~~выиграть~~ 2 случая =

$\frac{C_{x-3}^6}{C_x^3}$, т.к. аналогично рассуждали. Количество ~~диагонар.~~
способов C_{x-3}^6 , т.е. 3 коробки с марками
и 3 ~~всюрами~~, осталось выиграть $9-3=6$ коробок из $x-3$,
~~вернуть~~. а всего C_x^3 . \Rightarrow вернуть увеличилось в:

$$C_{k}^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\begin{aligned} \frac{C_{x-3}^6}{C_x^3} &= \frac{C_{x-3}^6 \cdot C_x^5}{C_x^3 \cdot C_{x-3}^2} = \frac{(x-3)!}{6!(x-9)!} \cdot \frac{x!}{5!(x-5)!} \\ &= \frac{x!}{5!(x-9)!} \cdot \frac{(x-3)!}{2(x-5)!} \\ &= \frac{9! \cdot 2}{6! \cdot 5!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{9 \cdot 2 \cdot 7}{5 \cdot 3} = \frac{21 \cdot 2}{5} = \frac{42}{5} = \\ &\text{т.е. 8,4 раз. увелич.-ся вернуть.} \\ &= 8,4 \quad \text{Ответ: } 8,4 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



а наше радиус это OK . т.е. $OK = r$.
все горки "дальше" \neq окр-ти радиуса $OK = OK'$
при $\text{кат. } X \leq 0$. Найдем опре $\neq S$ част.

$$\leftarrow S_{\text{окр}} = \pi r^2 \Rightarrow S_{\text{закр.}} = \frac{\pi R^2 - \pi r^2}{2}$$

$$\text{зде } R^2 = OB^2 = (8\sqrt{3})^2 + 24^2 = 768.$$

$$\text{а } r^2 = OK^2 = 16^2 \Rightarrow S_{\text{закр.}} = \frac{\pi(768-16^2)}{2}$$

Дальше найдем $S_{\text{ост-ся}}$:

Рассчитаем S_2 двух прямых:

$$S_1 = 8\sqrt{3} \cdot (24 - 16) = 8\sqrt{3} \cdot 8 = 24\sqrt{3} \cdot 64\sqrt{3}$$

Дальше у нас есть 2 части окр-ти: S_0 Кайдем их S_0 .

$$AB = 2 \cdot 8\sqrt{3} =$$

$$= 16\sqrt{3}.$$

$$R = \sqrt{768} \Rightarrow$$

$$\text{по теор-синусов} \quad \frac{AB}{\sin \alpha} = 2R \Rightarrow$$

$$\sin \alpha = \frac{AB}{2R} = \frac{16\sqrt{3}}{2\sqrt{768}} =$$

$$= \frac{16\sqrt{3}}{2 \cdot 8\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ.$$

$$\Rightarrow \angle AOB = 2\alpha = 60^\circ \Rightarrow S_{AOB} =$$

$$= \pi R^2 \cdot \frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{6} \pi R^2 = \frac{\pi \cdot 768}{6}. \text{ зде } AOB - \text{част}$$

$$\text{окр-та сектор. } S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot OK = \frac{1}{2} \cdot 16\sqrt{3} \cdot 24 = 12 \cdot 16\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 2S_0 = S_{AOB} - S_{\Delta AOB} = \frac{768\pi}{6} - 12 \cdot 16\sqrt{3} \Rightarrow 2S_0 =$$

$$S_{\text{одн}} = \frac{\pi(768-16^2)^2}{2} + 2 \cdot 64\sqrt{3} + \frac{768\pi}{6} - 12 \cdot 16\sqrt{3} =$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач шумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$= \frac{\pi(768 - 16^2)}{2} + 2 \cdot 64 \cdot \sqrt{3} + \frac{768\pi}{36} - 12 \cdot 16\sqrt{3} =$$

$$= 256\pi + 128\sqrt{3} + 128\pi - 192\sqrt{3} =$$

$$= 384\pi - 64\sqrt{3}$$

Ответ: $384\pi - 64\sqrt{3}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

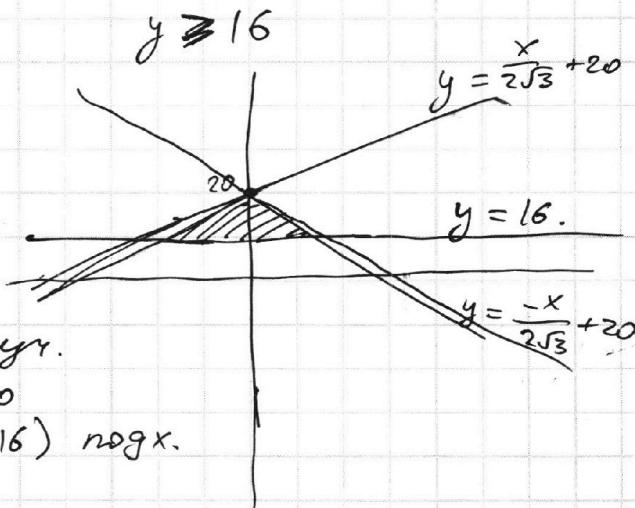
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

чсл) $\begin{cases} y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 0 \\ y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow -(y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}) - (y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}) \leq 8 \\ -2y + 40 \leq 8. \end{math}$

т.е $\begin{cases} y \leq -\frac{x}{2\sqrt{3}} + 20, \\ y \leq \frac{x}{2\sqrt{3}} + 20 \\ y \geq 16. \end{cases}$



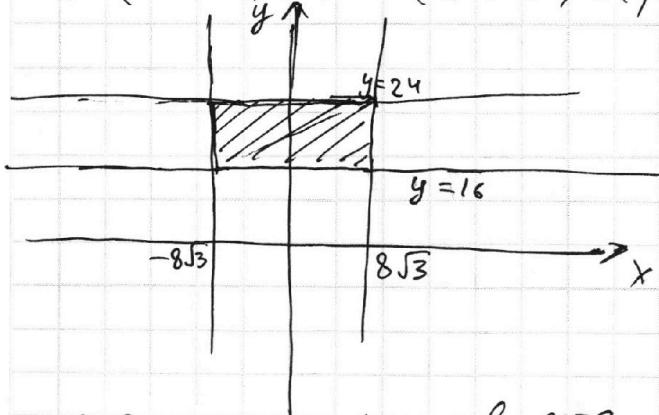
Задача Советским панам.

Графически. Замет, что точка $(16; 8\sqrt{3})$ лежит на $y = 16$.

т.е. $x_0 = 8\sqrt{3}, y = 16$:

$$|16 - 20 + \frac{8\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}| + |16 - 20 - 4| = 8$$

аналогично лежит $(8\sqrt{3}; 24)$: $|24 - 20 + 4| + |24 - 20 - 4| = 8$
и $(-8\sqrt{3}; 16)$ и $(8\sqrt{3}; 24)$. а значит наш график это прямоугольник

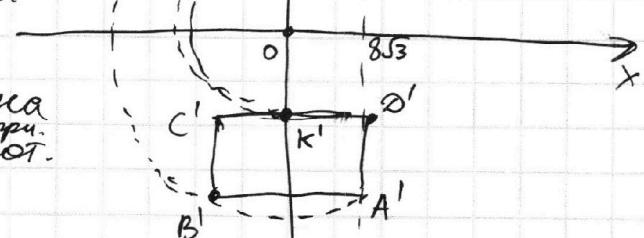


Замет, что при повороте панам. $B \rightarrow B'$, при этом у нас будут лежать все точки на расстоянии $OB = OB' = OA = OA'$, т.к.

$$x \leq 8\sqrt{3}$$

Теперь при повороте на π : укас.

$$ABCD \rightarrow A'B'C'D'$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}) + |y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}| \leq 8. \quad \text{№6.}$$

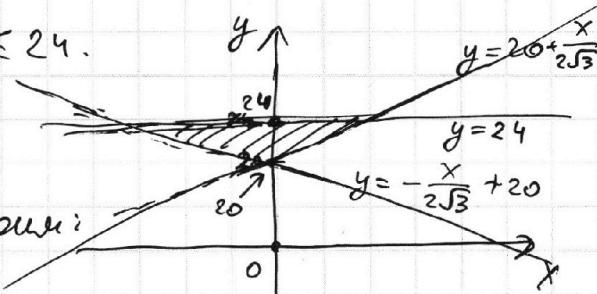
$$\begin{cases} y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \geq 0 \\ y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 2y - 40 \leq 8.$$

при $x=0$: $y = 24$.
т.е.

$$\begin{cases} y \geq -\frac{1}{2\sqrt{3}}x + 20, \\ y \geq \frac{1}{2\sqrt{3}}x + 20, \end{cases}$$

$$y \leq 24; \quad \text{т.е. при } x=0 : y = 20$$

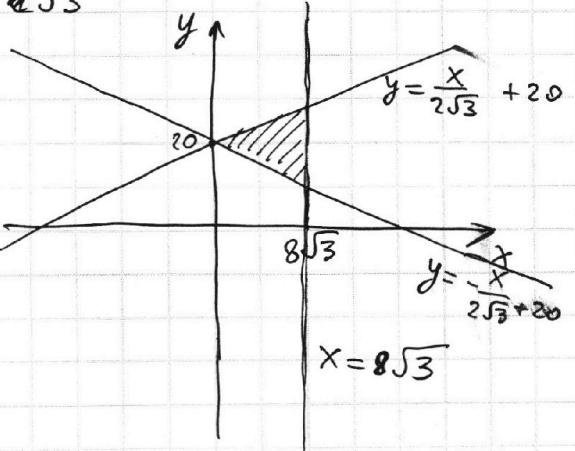
т.е. решениях явится замкнутый участок.



$$\begin{cases} y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \geq 0 \\ y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} - (y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}) \leq 8$$

$$\frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 8 \Rightarrow x \leq 8\sqrt{3}$$

$$\begin{cases} y \geq -\frac{x}{2\sqrt{3}} + 20 \\ y \leq \frac{x}{2\sqrt{3}} + 20 \\ x \leq 8\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow$$



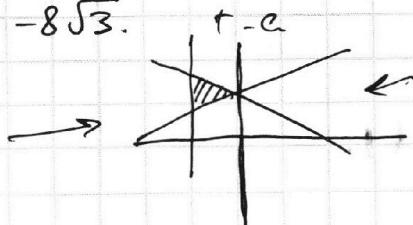
$$\begin{cases} y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 0 \\ y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \geq 0 \end{cases}$$

т.е.

$$-(y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}) + y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 8.$$

$$\frac{-x}{2\sqrt{3}} \leq 8 \Rightarrow x \geq -8\sqrt{3}.$$

$$\begin{cases} y \leq -\frac{x}{2\sqrt{3}} + 20 \\ y \geq \frac{x}{2\sqrt{3}} + 20 \\ x \geq -8\sqrt{3} \end{cases}$$



симметричен пред.
графику относ.
оси ординат.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

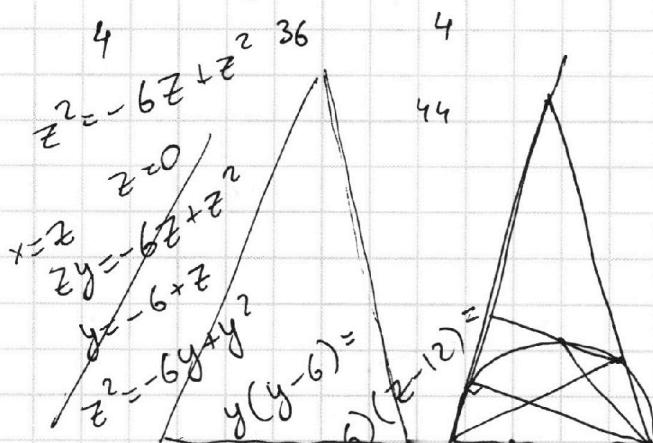
$$\begin{cases} XY = -6Z + Z^2 \\ YZ = -6X + X^2 \\ ZX = -6Y + Y^2 \end{cases}$$

$$Z^2 - 6Z - XY = 0$$

$$\Delta = 36 + 4XY$$

$$Z = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 4XY}}{2} = 3 \pm \sqrt{9 + XY}$$

$$(X-6)^2 + (Y-6)^2 + (Z-6)^2$$



$$Y = \frac{Z^2 - 6Z}{X}$$

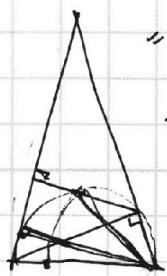
$$Z^3 - 6Z^2 = X^3 - 6X^2$$

$$\frac{Z^2 - 6Z}{X} Z = X^2 - 6X$$

$$Z^3 - 6Z^2 = X^3 - 6X^2 = Y^3 - 6Y^2$$

$$Z^2(Z-6) = X^2(X-6) = Y^2(Y-6) = A$$

$$(Z-6)^2 = \frac{A^2}{Z^4}$$



$$= Z^2 - 18Z + Z^2$$

$$18Z^2 - 72 \\ Z = \frac{72}{18} = 4$$



$$6(Z+X) = Z^2 + ZX + X^2$$

~~6~~
$$6(Z+Y) = Y^2 + YZ + Z^2$$

$$6(Y+X) = Y^2 + XY + X^2$$

$$18Y = 3Y^2 + 3... - 6Y - ...$$

$$Z^2 + Z(X-6) + X^2 - 6X$$

$$Y^2 + Z^2 + X^2 - 6$$

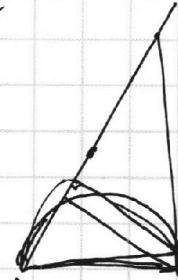
$$\Delta = (X-6)^2 - 4X(X-6) =$$

$$Z^3 - X^3 = 6Z^2 - 6X^2$$

$$(Z-X)(Z^2 + ZX + X^2) = 6(Z-X)(Z+X)$$

$$6(Z+X) = 6Z^2 + 6ZX + 6X^2$$

$$Z = X$$



$$= (X-6)(X-6-4X) = (X-6)(-3X-6) =$$

$$= (6-X)(3X+6) = 3(X+2)(6-X)$$

$$X^2 - 12X + 36 - 4X^2 + 24X = -3X^2 + 12X + 36 = -3(X^2 - 4X - 12) =$$

=



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{array}{l} XY = -6z + z^2, z(z-6) \\ YZ = -6x + x^2, = (x-3)^2 - 9 = \cancel{(x-3)}(x+3) x(x-6) \\ ZX = -6y + y^2; y(y-6) \end{array} \right.$$

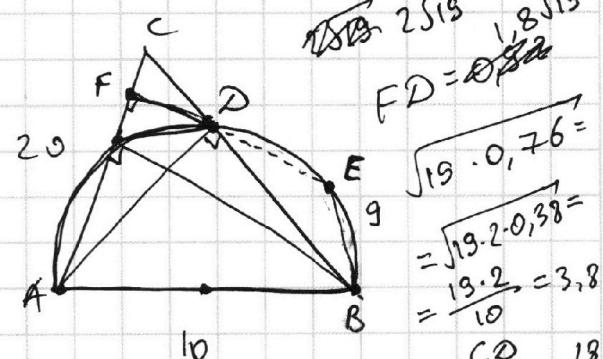
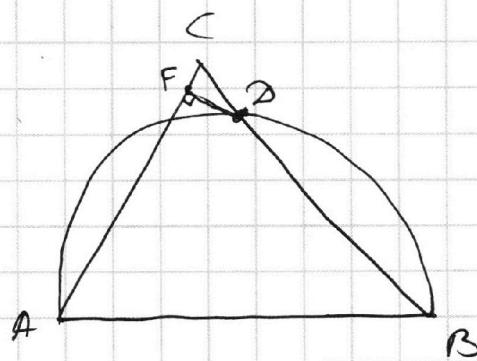
$$(x-3)^2 = yz + 9 \quad 0,76 \quad \begin{matrix} 6 \\ 1,8 \\ 1,8 \\ 14 \\ 18 \\ 3,2 \end{matrix}$$

$$(x-6)^2 + 6x - 36 = yz$$

$$yz - 6x + 36$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 12(x+y+z) + 36 \cdot 3$$

$$yz - 6x + 36, \quad XY + YZ + ZX - 6(x+y+z) + 36 \cdot 3$$



$$AF = \sqrt{18^2 - 1,8^2 \cdot 19}$$

$$= \sqrt{19(4 - 1,8^2)}$$

$$= \sqrt{19 \cdot 2,38} = 4,38$$

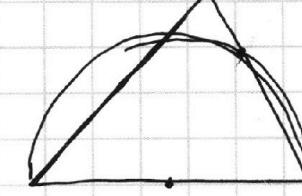
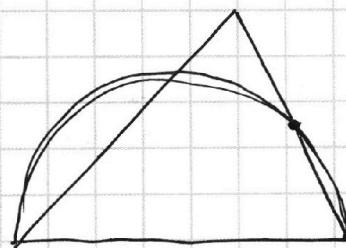
$$FD = \sqrt{19 \cdot 0,76} = 4,38$$

$$= \sqrt{19 \cdot 2 \cdot 0,38} = 3,8$$

$$= \frac{19 \cdot 2}{10} = 3,8$$

$$\cos \beta = \frac{CD}{AC} = \frac{18}{20} = 0,9$$

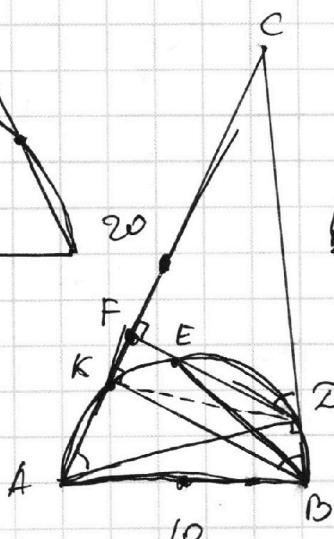
$$FD = 0,9 AD$$



$$\frac{CD}{20} = \frac{9}{10}$$

$$CD = 18$$

$$\frac{CD}{AC} = \frac{KD}{AB}$$



$$\frac{EB}{ED} = \frac{EB}{2R} = 2R$$

$$\frac{9}{10} = 0,9 = \sin \alpha$$

$$\frac{FC}{CD} = 0,9$$

$$KD = 2R \cdot \sin \alpha = 9$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

0 0 0 0 0

$$x \geq 9$$

$$\begin{matrix} 9 \\ 9 \\ 1 \\ 5 \end{matrix} \text{ из } 9$$

0 0 0 0 0 0 0 0 0

$$\frac{\cancel{C}_9^6 \cdot \cancel{C}_6^3}{\cancel{C}_3^3} = 1 - \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{\cancel{9} \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{7}} =$$

$$\cancel{C}_9^5 = \cancel{C}_{21}^{16}$$

$$1 - \frac{\cancel{C}_9^6 \cdot \cancel{C}_6^5}{\cancel{C}_9^8} =$$

$$\frac{C_{9-3}^2}{C_9^5} = \frac{C_6^2}{C_9^5} = \frac{6 \cdot 5}{\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}}$$

$$= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{\cancel{9} \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{2}} = \frac{5}{21 \cdot 2}$$

$$\frac{21 \cdot 2}{5}$$

1 2 3 0 0 0 0 0 ... 00.

3 9-3

$$\cancel{C}_X^2$$

$$\frac{C_{X-3}^6}{C_X^5}$$

$$C_6^k \frac{6 \cdot 5}{2}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\cancel{C}_{X-3}^6$$

$$\frac{\cancel{C}_X^3}{\cancel{C}_X^2} = \frac{\cancel{C}_{X-3}^6 \cdot C_X^5}{\cancel{C}_X^3 \cdot \cancel{C}_{X-3}^2} =$$

$$\frac{(X-3)!}{6!(X-9)!} \cdot \frac{X!}{5!(X-5)!} = \frac{X!}{9!(X-9)!} \cdot \frac{(X-3)!}{2 \cdot (X-5)!} =$$

$$= \frac{9! \cdot 2}{6! \cdot 5!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{9 \cdot 2 \cdot 7}{5 \cdot 3} = \frac{21 \cdot 2}{5}$$

1
16
12

32
16
192



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой** из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$6(z+x) = z^2 + zx + x^2$$

$$6(z+y) = y^2 + yz + z^2$$

$$6(y+x) = y^2 + xy + x^2$$

$$x^2 - 12x + 36 + \dots$$

$$6(z+x) = z^2 + y^2 + x^2 - 6y$$

$$6z + 6x + 6y = z^2 + y^2 + x^2$$

$$6(x+y+z) = z^2 + y^2 + z^2$$

$$x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$$

6 и 7.

$$5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a + 5 = 0.$$

5 и 8.

$$\frac{b_6 + b_7}{2} =$$

$$b_0 + b_1 = b_0 + d$$

$$b_1 = b_0 + 6d$$

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{x_3 + x_4}{2}$$

$$z = \frac{6-x \pm \sqrt{D}}{2}$$

$$3 - \frac{x}{2} + 3 - \frac{x}{2} + x = 6$$

~~$$\frac{b_0 + d + b_0 + 3d}{2} = b_0 + 2d$$~~

~~$$b_5$$~~

~~$$b_5 + d$$~~

~~$$b_5 + 2d$$~~

~~$$b_5 + 3d$$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

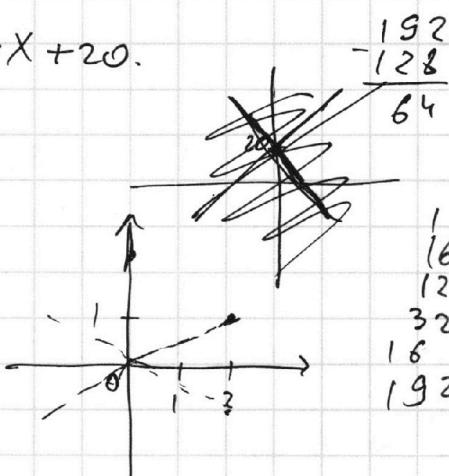
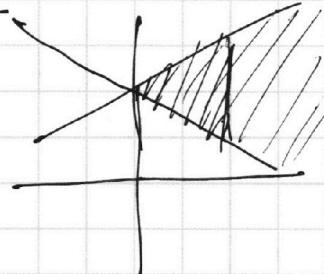
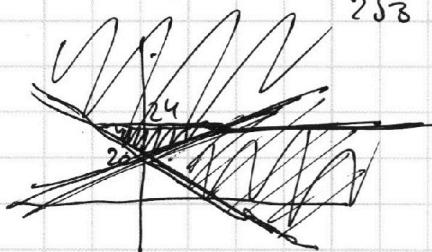
СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left| y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \right| + \left| y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \right| \leq 8.$$

$$(a) y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \geq 0 \Rightarrow y \geq 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}x + 20.$$

$$y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \geq 0 \Rightarrow y \geq \frac{1}{2\sqrt{3}}x + 20.$$



$$2y - 40 \leq 8.$$

$$y \leq 24.$$

~~y > 24~~

$$2(a) y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \geq 0.$$

$$-2y + 40 \leq 8$$

$$2y - 40 \geq -8$$

$$y \geq 16.$$

$$2y \geq 32.$$

$$y = \frac{1}{2}x$$

$$y = -\frac{1}{2}x$$

$$\frac{\pi r^2}{2} \cdot \frac{60}{360} =$$

$$\frac{\pi r^2}{2} \cdot \frac{1}{6} =$$

$$\frac{1}{2} \cdot 16\sqrt{3} \cdot 24\pi$$

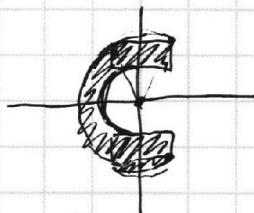
$$y \geq 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}$$

$$\frac{x}{2\sqrt{3}} + \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 8.$$

$$y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 0.$$

$$\frac{x}{\sqrt{3}} \leq 8.$$

$$x \leq 8\sqrt{3}$$



$$-\frac{x}{\sqrt{3}} \leq 8$$

$$x \geq -24$$

$$x \geq 24$$

$$\frac{16\sqrt{3}}{2 \cdot 16\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \alpha = 1 = \alpha = 30^\circ$$

3
16
16
96
16
256

$$\left\{ \begin{array}{l} y \geq 24 \\ \frac{768}{256} \\ 512 \end{array} \right.$$

$$\frac{768}{256} \\ 512$$

$$r^2 = 24^2 + (8\sqrt{3})^2 =$$

$$= 24^2 + 3 \cdot 64 =$$

$$24 \\ 24 \\ 96$$

$$48 \\ 48 \\ 576$$

$$576 \\ 576 \\ 768$$

$$768 \\ 768 \\ 192$$

$$48 \\ 48 \\ 48$$

$$12 \\ 12 \\ 3$$

1
64
3
192

768

48

12

3



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~200001~~ 20001 geb.

n^3

$$\begin{array}{r} 8 \\ 9 \\ 99 \\ 99 \\ \hline 81 \\ 89 \\ 891 \\ 891 \\ 9801 \\ 998001 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 88 \\ 999 \\ 999 \\ \hline 999 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20001 \\ 9999\dots9 \\ 9999\dots9 \\ 9999\dots9 \\ 9999\dots9 \\ + 89\dots991 \\ \hline 8999\dots91 \end{array}$$

$$889$$

$$9999$$

$$9999$$

$$89991$$

$$89991$$

$$89991$$

$$89991$$

$$89991$$

$$89991$$

$$89991$$

$$89991$$

$$89991$$

$$89991$$

$$89991$$

$$89991$$

$$89991$$

$$89991$$

$$89991$$

$$89991$$

$$89991$$

$$89991$$

$$89991$$

$$89991$$

$$89991$$

$$89991$$

$$89991$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ 9 \\ 81 \\ 9 \\ \hline 729 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 99 \\ 99 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 999 \\ 999 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 88 \\ 9801 \\ 99 \\ \hline 188209 \\ 88209 \\ 970299 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ 7 \\ 88 \\ 81 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 998001 \\ 999 \\ \hline 28982009 \\ 8982009 \\ 8982009 \\ \hline 997002999 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ 19 \\ 27 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} xy = -6z + z^2 \leq \frac{x^2 + y^2}{2} \\ yz = -6x + x^2 \leq \frac{x^2 + y^2}{2} \\ zx = -6y + y^2 \leq \frac{x^2 + y^2}{2} \end{array} \right.$$

$$x^2 + y^2 + z^2$$

$$x^2 + y^2 \geq 2z^2 - 12z$$

$$2z^2 - 12z \geq 2y^2 - 12y$$

$$\begin{aligned} A &= x^2 + y^2 + z^2 + 36 \cdot 3 - 12x - 12y - 12z \leq \\ &\leq 2x^2 + 2y^2 - z^2 + 36 \cdot 3 - 12x - 12y \leq \\ &\leq 3x^2 + 36 \cdot 3 - 12x = 3(x^2 + 36 - 4x) = 3((x - 2)^2 + 32) \end{aligned}$$

$$-12z = 2xy - 2z^2$$

$$A = -x^2 - y^2 - z^2 + 2(xy + \dots) + 36 \cdot 3 =$$