

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.
4. [4 балла] В теленгрипе ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарику. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой не постоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leqslant 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~1. $\begin{cases} xy = 2(3+z) \\ yz = 3x+x^2 \\ zx = 3y+y^2 \end{cases}$

перемножим $\Rightarrow (xyz)^2 = xyz(x+3)(y+3)(z+3)$
 т.к. x, y, z кратчайше $\Rightarrow xyz \neq 0$

$$\Rightarrow xyz = (x+3)(y+3)(z+3) = (x+3)(yz + 3(y+2) + 9) = xyz + 3x(y+2) + 9x$$

$$+ 3yz + 9(y+2) + 27 \Rightarrow 0 = 3(xyz + xy + yz + y^2 + 3x + 9) + 9(x + y + z) + 27$$

$$0 = xyz + xy + yz + y^2 + 3(x + y + z) + 27 \cancel{+ 9}; \text{ заменим } xy, xz, yz:$$

$$0 = 3z + z^2 + 3x + x^2 + 3y + y^2 + 3(x + y + z) + 27 \cancel{+ 9}$$

$$0 = 6(x + y + z) + x^2 + y^2 + z^2 + 27 \cancel{+ 9}$$

нужно найти все значение $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 =$

$$= x^2 + 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 + z^2 + 6z + 9 = x^2 + y^2 + z^2 + 6(x + y + z) + 27$$

Имеем: $0 = 6(x + y + z) + x^2 + y^2 + z^2 + 9 \Rightarrow$

$$x^2 + y^2 + z^2 + (6x + 6y + 6z) + 27 = 18$$

x, y, z существуют. т.к. есть одно идентичное решение
 (сказано в условии.)

Ответ: 18



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№2.

$$\text{Дано: } n = \underbrace{9999\dots99}_{40000}$$

Найти: число девяток в n^3

$$9^3 = 729 \quad 99^3 = 970299 \quad 999^3 = 997002999$$

Замечание: получили таблицу количества девяток для разных кубов девяток в исходном числе:

$9999^3 = 99970002999 \rightarrow$ видим, что число состоит из k девяток в кубе имеет вид

$$\underbrace{999\dots99}_k \underbrace{9700\dots000}_k \underbrace{2999\dots99}_k \text{ по полученным}$$

ранее видим числа состоящие из девяток удовлетворяют. Это верно.

$$\Rightarrow \text{всего девяток в числе } (k-1) + (k) = 2k - 1$$

$$\text{в нашем случае } k = 40000 \Rightarrow (\text{как - во девяток в числе } n) = 2k - 1 = 80000 - 1 = 79999$$

Ответ: 79999



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~> Дано:

$$AC = 10$$

$$AB = 6$$

$$BE = 5$$

AB - диаметр

$DF \perp AC$

Демонстрируем:

$$2r = AB \Rightarrow r = 3$$

$\triangle ABE$ - вписаный,

AB - диаметр \Rightarrow

$$AE^2 = AB^2 - BE^2 = 6^2 - 5^2 = 11$$

$$AE = \sqrt{11}$$

$\triangle BDE$ - вписаный четырехугольник.

Найти:

$$AF.$$

$\triangle ABD$ равноделенный

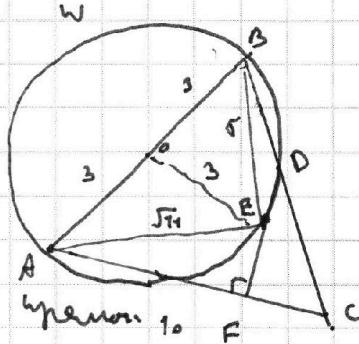
уголом

$\Rightarrow AD = BD = \frac{6}{\sqrt{2}}$; \Rightarrow по свойству вписан.

$$\text{б) } \triangle AFD \Rightarrow AD^2 = AF \cdot AC = \frac{6^2}{2} = 18 = AF \cdot 10 \Rightarrow AF = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$$

\Rightarrow

Ответ: $AF = \frac{9}{5}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4. пусть всего было n коробок, необходимо открытие 5 из первых сундуков и 6 из вторых,

\Rightarrow чтобы выбрать вторые, нужно открыть все из коробок с шарами \Rightarrow

каждый способ открытия из коробки с шарами и 2 без шаров и подсчитать:

$$1. \ C_{n-3}^2 = \frac{(n-3)!}{2!(n-5)!} = \frac{(n-3)(n-4)}{2}$$

$$2. \ C_{n-3}^3 = \frac{(n-3)!}{3!(n-6)!} = \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{6}$$

всего способов открытия 5 коробок из n :

$$C_n^5 = \frac{n!}{5!(n-5)!} = \frac{n \cdot n-1 \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{120}$$

способов открытия 6 коробок из n :

$$C_n^6 = \frac{n!}{6!(n-6)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot (n-5)}{120 \cdot 6} \Rightarrow$$

вероятность подсчитать $\rightarrow \frac{\text{всего способов}}{\text{втор. способы}} = P$

$$P_1 = \frac{(n-3)(n-4)}{C_n^5} \cdot \frac{120}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} = \frac{60}{n(n-1)(n-2)}$$

$$P_2 = \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{C_n^6} \cdot \frac{6 \cdot 120}{(n-3)(n-4)(n-5)(n)(n-1)(n-2)} = \frac{120}{n(n-1)(n-2)}$$

$$\Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{120}{n(n-1)(n-2)} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{60} = 2$$

Ответ: вероятность второго вопроса в 2 раза.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~5:

1. $x^2 - x(a^2 - a) + a - 5 = 0 \rightarrow$ корни - 5-ий и 6-ой член ариф.
прогрессии.

2. $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0 \rightarrow$ корни - 3 и 8 член
ариф прогрессии

Задача, а

Решение: первый член прогре-
ссии - t ; разность - d

\Rightarrow корни 1 уравнения = $t + 4d$; $t + 5d$

корни 2 уравнения = $t + 2d$; $t + 7d$; подставляем их в
равенство дальше
вот следим

$$1. (t + 4d)^2 - (t + 4d)(a^2 - a) + a - 5 = 0$$

$$(t + 5d)^2 - (t + 5d)(a^2 - a) + a - 5 = 0$$

$$\Rightarrow (t + 4d)^2 - (t + 4d)(a^2 - a) = (t + 5d)^2 - (t + 5d)(a^2 - a)$$

$$(a^2 - a)(t + 5d - t - 4d) = (t + 5d)^2 - (t + 4d)^2 \Rightarrow$$

$$(a^2 - a) \cdot d = d \cdot (2t + 9d)$$

$$a^2 - a = 2t + 9d \text{ и } d \neq 0$$

$$2. 4 \cdot (t + 2d)^2 - (t + 2d)(a^3 - a^2) + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$$

$$4(t + 7d)^2 - (t + 7d)(a^3 - a^2) + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$$

$$4(t + 2d)^2 - (t + 2d)(a^3 - a^2) = 4(t + 7d)^2 - (t + 7d)(a^3 - a^2)$$

$$4((t + 4d)^2 - (t + 2d)^2) = (a^3 - a^2)(t + 7d - t - 2d) \Rightarrow$$

$$4 \cdot 5d \cdot (2t + 9d) = (a^3 - a^2) \cdot 5d$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$m \cdot n \neq 0$$

$$4 \cdot (2t+9d) = a^5 - a^2 = (a^4 - a) \cdot a^2$$

$$\text{из (1) имеем: } 2t+9d = a^2 - a$$

$$\Rightarrow 4 \cdot (2t+9d) = (2t+9d) \cdot a$$

$$(4-a)(2t+9d) = 0$$

$$1. 4-a=0 \quad a=4$$

$$2. 2t+9d=0 = a^2-a = a(a-1) \quad a=0; 1.$$

$$\text{Проверка: 1. } a=0; \quad x^2-5=0 \quad x=\pm\sqrt{5} \quad \text{5-ый и 8-ой}$$

$$4x^2-4=0 \quad x=\pm 1 \quad \text{3ий и 8-ой}$$

$$2. a=1; \quad x^2-4=0 \quad x=\pm 2. \quad (5 \text{ и } 6)$$

$$4x^2+2+2-1-4=0 \quad 4x^2=1 \quad x=\pm\frac{1}{2} \quad (3 \text{ и } 8)$$

$$3. a=4; \quad x^2-12x-1=0 \quad x=6\pm\sqrt{37}$$

$$4x^2-48x+2 \cdot 256+2 \cdot 4 - 16 \cdot 16 \cdot 16 - 4 = 0$$

$$x^2-12x+128+8-16 \cdot 16 \cdot 4 - 1 = 0$$

$$x^2-12x-911=0$$

$$x=6\pm\sqrt{942}$$

в ариф. последовательности, крайние значения

(в нашем случае 3 и 8 член) должны быть

равно ^и одним из значений из известных)

\Rightarrow При значении параметра $a=0$ и $a=1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

данное условие не выполняется: $a=0$; $a_5 > a_3$

$$\sqrt{5} > 1$$

$$a_0 < a_3$$

$$-\sqrt{5} < -1$$

$\Rightarrow a=0$ не подходит, возможно где $a=1$

$$a_5 > a_3$$

$$2 > \frac{1}{2}$$

$$a_0 < a_3$$

$$-2 < -\frac{1}{2}$$

$a=1$ не подходит,

$a=4$ подходит под данное условие \Rightarrow получаем это отсортировав значение:

$$(6 + \sqrt{947}; 6 + \sqrt{52}; 6 - \sqrt{37}; 6 - \sqrt{547}) \text{ или}$$

$$(6 - \sqrt{547}; 6 - \sqrt{37}; 6 + \sqrt{32}; 6 + \sqrt{947})$$

Ответ: $a = 4$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow R^2 = g^2 + (g\sqrt{3})^2 = g^2(1+3) = 4g^2$$

$$R = 2g = 18$$

$$r^2 = 6^2 + (g\sqrt{3})^2 = 6^2 + g^2 \cdot 3 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 + g \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 =$$

$$3 \cdot 3 \cdot (4 + 2g) = 3 \cdot 31$$

$$r = 3\sqrt{31}$$

$$\sin \alpha = \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{31}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{31}} = 3\sqrt{\frac{3}{31}}$$

$$\alpha = \arcsin \sin \alpha = \arcsin 3\sqrt{\frac{3}{31}}$$

$$180^\circ - 2\alpha = 180^\circ - 2 \arcsin 3\sqrt{\frac{3}{31}} \Rightarrow \beta = 180^\circ + 2 \arcsin 3\sqrt{\frac{3}{31}}$$

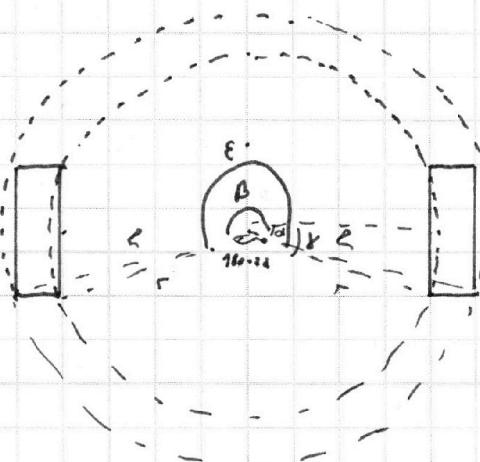
$$S_r = \frac{\pi r^2}{\beta} = \frac{\pi \cdot 9 \cdot 31}{180^\circ + 2 \arcsin 3\sqrt{\frac{3}{31}}} = \frac{\pi \cdot 9 \cdot 31}{(180^\circ) + 2 \arcsin 3\sqrt{\frac{3}{31}}}$$

$$R = 18 \Rightarrow \gamma = 60^\circ \Rightarrow \xi = 180^\circ + 2\gamma = 300^\circ$$

$$S_p = \frac{\pi R^2}{\xi} = \frac{180^\circ}{300^\circ} \cdot 18^2 = \frac{3}{5} \cdot 18^2$$

$$\Rightarrow S = S_p - S_r = \frac{279\pi}{180^\circ + 2 \arcsin 3\sqrt{\frac{3}{31}}} - \frac{3}{5} \cdot 18^2$$

$$\text{Объем: } S = \frac{225\pi \cdot 120^\circ}{(180^\circ + 2 \arcsin 3\sqrt{\frac{3}{31}})} - \frac{3}{5} \cdot 18^2$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6.

$$|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}| + |x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}| \leq 3$$

построим прямые $x - \frac{15}{2} = -\frac{y}{6\sqrt{3}}$ и $x - \frac{15}{2} = \frac{y}{6\sqrt{3}}$

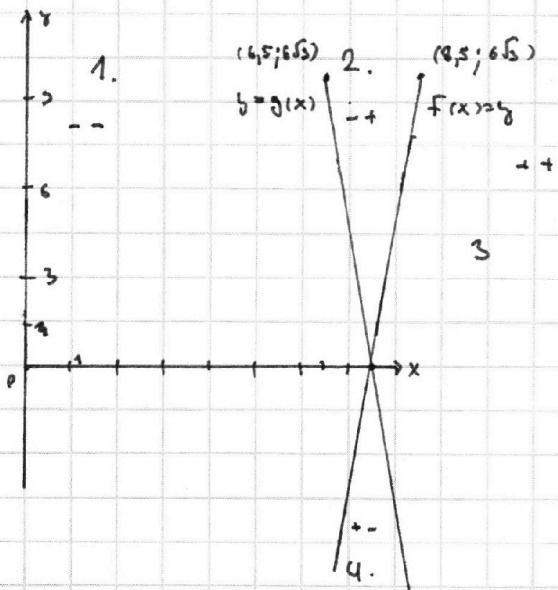
затем эти прямые на графике указываем где и как раскрываются модули.

$$x - 6\sqrt{3} - \frac{15 - 3\sqrt{3}}{1} = y$$

$$15 \cdot 3\sqrt{3} - x - 6\sqrt{3} = y$$

$$\sqrt{3}(6x - 45) = y = f(x)$$

$$\sqrt{3}(45 - 6x) = y = g(x)$$



$$f(3,5) = g(3,5) = 0$$

$$g(6,5) = 6\sqrt{3} \approx 10,2$$

$$f(8,5) = 6\sqrt{3} \approx 10,2$$

$f(x)$ и $g(x)$ — прямые, соединяющие вершины четырехугольника.

найдем вершины четырехугольника из разложения модулей, получим значения модулей в областях.

получим $|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}|$ — модуль 1; $|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}|$ — модуль 2.

в области 1: вспомогательное изображение

в области 2: вспомогательное изображение изображено, а изображение 1 опущено.

в области 3: вспомогательное изображение изображено.

в области 4: вспомогательное изображение изображено, а изображение 1 опущено.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{задача 1: } -x + \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} - x + \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \leq 3 : \\ -2x + 15 \leq 3 \quad -2x \leq -12 \quad x \geq 6$$

$$\text{задача 3: } x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} + x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \leq 3 \\ 2x - 15 \leq 3 \quad 2x \leq 18 \quad x \leq 9$$

$$\text{задача 2: } x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} - x + \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \leq 3$$

$$\frac{2y}{6\sqrt{3}} \leq 3 \quad y \leq 9\sqrt{3}$$

$$\text{задача 4. } -x + \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} + x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \leq 3$$

$$-\frac{2y}{6\sqrt{3}} \leq 3 \quad y \geq -9\sqrt{3}$$

=> фигура состоящая из данных премох - прямого - ломанка; ~~боковая сторона параллельна оси y~~

=> вертикальные стороны параллельные 6 и заключающие 6 $\Rightarrow x \in [6; 9]$

горизонтальные стороны параллельные $6 - 9\sqrt{3}$, а заключающие $6 \sqrt{3} \Rightarrow y \in [-9\sqrt{3}; 9\sqrt{3}] \Rightarrow$ (см. рис.)

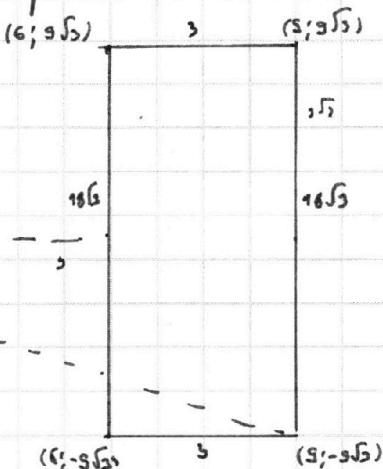
при повороте на 90° право вокруг начала координат \Rightarrow фигура опишет полукруг -ность, ее дальнее конец, внешний радиус -

а ближнее - внутренний радиус -

и т.д. \Rightarrow

R - внешний радиус

r - внутренний радиус.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$xy = z(3+z)$$

$$\frac{xy}{2} = 3+z$$

$$yz = x(3+x)$$

$$\frac{yz}{2} = x+3$$

$$zx = y(3+y)$$

$$\frac{zx}{2} = 3+y$$

$$(x+3)^2 + (z+3)^2 + (y+3)^2 = \left(\frac{xy}{2}\right)^2 + \left(\frac{yz}{2}\right)^2 + \left(\frac{zx}{2}\right)^2 = \frac{x^2y^2}{4} + \frac{y^2z^2}{4} + \frac{z^2x^2}{4}$$

$$= \frac{x^4y^4 + y^4z^4 + x^4z^4}{4} + \cancel{x^2y^2z^2}$$

$$\text{пусть } x=y=z=a \Rightarrow a^2 = a(a+3)$$

$$a^2 = a^2 + 3a \Rightarrow a=0 \quad \rho$$

$$z^2 = xy - 3z$$

$$x^2 = yz - 3x$$

$$y^2 = zx - 3y$$

$$xy > 3z$$

$$yz > 3x$$

$$zx > 3y$$

$$x^2y^2z^2 > 22xyz$$

$$xyz > 27$$

$$x = \frac{y}{z}(y+3) \quad yz = \frac{y}{z}(y+3)(3 + \frac{y}{z}(y+3)) \Rightarrow z^2 = (y+3)(3 + \frac{y^2}{z^2} + \frac{3y}{z})$$

$$= 3y + \frac{y^3}{z^2} + \frac{3y^2}{z^2} + 9 + \frac{3y^2}{z^2} + \frac{9y}{z}$$

$$(xyz)^2 = xyz(3+x)(3+y)(3+z) \Rightarrow xyz = (3+x)(3+y)(3+z)$$

$$(3+x)(9+3z+3y+yz) = (3+x)(9+3(z+y)+yz) = 27 + 9(2+y) + 3yz + 3x +$$

$$3x(2+y) + yz$$

$$0 = 27 + 9(x+y+z) + 3(yz + x(2+y))$$

$$0 = 9 + 3(x+y+z) + yz + xz + xy = 9 + 3(x+y+z) + x^2 + 3x + y^2 + 3y + z^2 + 3z$$

$$\Rightarrow 0 = 9 + 3(x+y+z) + 3(x+y+z) + x^2 + y^2 + z^2$$

$$0 = 9 + 6(x+y+z) + x^2 + y^2 + z^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = x^2 + 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 + z^2 + 6z + 9 = x^2 + y^2 + z^2 + 6(x+y+z) + 27$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6(x+y+z) + 9 = 0 \Rightarrow$$

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99

99



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x - \frac{15}{2} \geq -\frac{5}{6\sqrt{3}}$$

1 задача

$$\frac{\sqrt{5}}{6} = 2,5^{\circ}$$

18°
3°
5,1°

$$-y \leq 6\sqrt{3}x - 15 \cdot 3\sqrt{3}$$

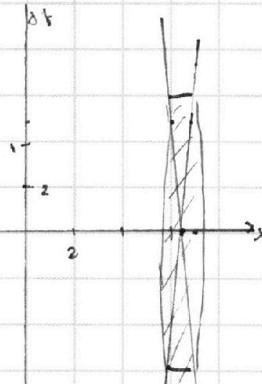
$$y \geq 6\sqrt{3}(45 - 6x)$$

$$\begin{array}{r} 511 \\ 4 \\ \hline 3644 \end{array}$$

$$x - \frac{15}{2} \geq \frac{5}{6\sqrt{3}}$$

2 задача

$$\begin{aligned} y &\leq 6\sqrt{3}x - 45\sqrt{3} \\ &= \sqrt{3}(6x - 45) \end{aligned}$$



$$144 + 4 = 148 = 92 + 28 \cdot 4 = 32 \cdot 4$$

$$D = 4 \cdot 32$$

$$x = \frac{12 \pm 2\sqrt{544}}{2} = 6 \pm \sqrt{544}$$

$$\begin{array}{r} 3288 | 4 \\ 36 \quad \boxed{547} \\ 182 \\ 16 \\ 22 \end{array}$$

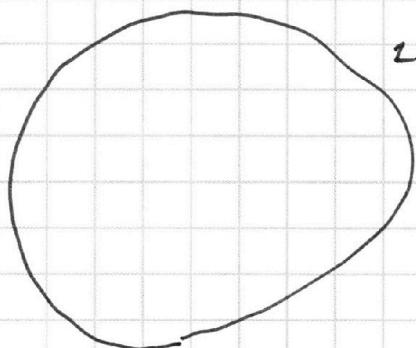
$$144 + 36 \cdot 4 = 3288 =$$

$$x = \frac{12 \pm 2\sqrt{544}}{2} = 6 \pm \sqrt{544}$$

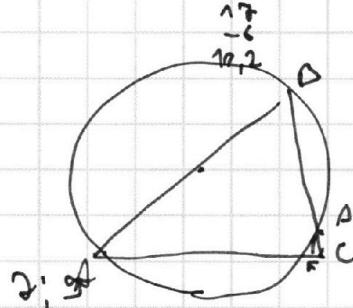
$$36 - 45 = -9$$

$$\begin{array}{c} 5 \quad 8 \quad 3 \quad 6 \\ \hline -\sqrt{5} : \quad -1 \quad 1 \quad \sqrt{5} \end{array}$$

$$6,5 \cdot 6 = 36 + 5 = 41$$



$$2 - 2,5 - \frac{3}{4}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

<input type="checkbox"/>						
--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a_1 - 1$ разн
 d -разности

188

136,
1025

$$\sqrt{5} \quad 1 - 1 - \sqrt{5}$$

$$(a_1 + 4d)^2 + (a_1 + 4d)(a^2 - a) + a - 5 = 0$$

$$(a_1 + 5d)^2 + (a_1 + 5d)(a^2 - a) + a - 5 = 0.$$

$$a^3 - a^2 = 48$$

$$16 \cdot 16 \cdots d =$$

$$(a_1 + 4d)^2 + (a^2 - a)(a_1 + 4d) = (a_1 + 5d)^2 + (a_1 + 5d)(a^2 - a)$$

$$(a_1 + 4d)^2 - (a_1 + 5d)^2 = (a^2 - a)(a_1 + 5d - a_1 - 4d) = (a^2 - a)d$$

$$(a_1 + 4d - a_1 - 5d)(a_1 + a_1 + 4d + 5d) = -d(2a_1 + 9d) = d(a^2 - a)$$

$$d \neq 0 \Rightarrow a^2 - a = -2a_1 - 9d$$

$$64 \\ 16 \\ 334 \\ 16$$

$$4 \cdot (a_1 + 2d)^2 - (a^3 - a^2) \cdot (a_1 + 2d) + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$$

$$4 \cdot (a_1 + 2d)^2 - (a^3 - a^2)(a_1 + 2d) + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$$

$$4a_1 + 8d - (a^3 - a^2)(a_1 + 2d) = 4a_1 + 28d - (a^3 - a^2)(a_1 + 2d)$$

$$20d = (a^3 - a^2)(a_1 + 2d - a_1 - 2d) = (a^3 - a^2)(5d)$$

$$4 = a^2/a$$

$$4(a_1 + 2d)^2 - (a^3 - a^2)(a_1 + 2d) = 4(a_1 + 2d)^2 - (a^3 - a^2)(a_1 + 2d)$$

$$4((a_1 + 2d)^2 - (a_1 + 2d)^2) = (a^3 - a^2)(a_1 + 2d - a_1 - 2d) =$$

$$4(a_1 + 2d - a_1 - 2d)(a_1 + 2d + a_1 + 2d) = (a^3 - a^2) \cdot 5d$$

$$8a_1 + 36d = a^3 - a^2 = a(a^2 - a) = a(-2a_1 - 9d) = -2a_1 a - 9ad$$

$$8a_1 + 20a_1 a + 36d + 9ad = 0$$

$$-2a_1 - 9d = a^2 - a$$

$$8a_1 2a_1 (4+a) + ad(4+a) = 0$$

$$(2a_1 + 9d)(4+a) = 0$$

$$\text{или } 2a_1 = -9d \Rightarrow -3d - 2a_1 = 0 \Rightarrow a^2 - a = 0 \quad a(a-1) = 0 \quad a = 0, 1$$

$$\text{или } a = -4$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

пусть коробок всего n ;
келья маркирован $N = 3$
кулько открыто $- k \Rightarrow k_1 = 5; k_2 = 6$

\Rightarrow келью способ открытия все марки и внешним =

$$C_{n-N}^{k-N}$$

$$C_{n-3}^{5-3} = C_2^2$$

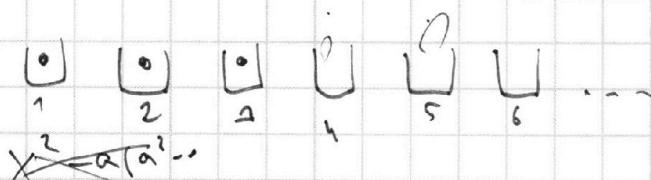
$$C_1 = C_{n-3}^{5-3} = C_{n-3}^2 = \frac{(n-3)!}{2!(n-5)!} = \frac{(n-3)(n-4)}{2}$$

$$C_2 = C_{n-3}^{1-3} = C_{n-3}^3 = \frac{(n-3) \cdot }{3 \cdot (n-6)!} = \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{6}$$

способ разложить марки $\rightarrow C_n^n = C_n^3 = \frac{n!}{6(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

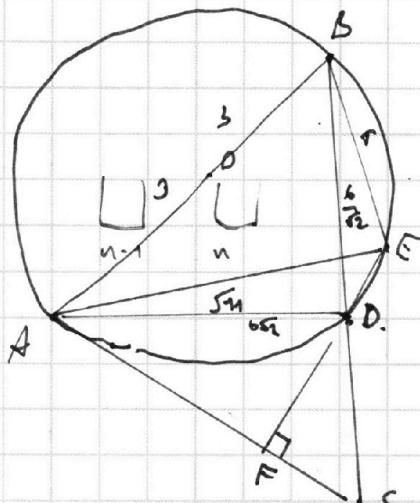
макс б 1. $\frac{(n-3)(n-4) \cdot 6}{2 \cdot (n-1) \cdot n(n-2)} = \frac{3(n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)}$

б 2. $\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{n(n-1)(n-2)} =$



$$X^2 - a(a-1)x + a-5 = 0$$

$$D = (a^2 - a)^2 - 4a + 20$$



$$4X^2 - (a^3 - a^2)x + a^4(2 - a^2) + 2(a^2 - 2) = 0$$

$$4X^2 - X(a^3 - a^2) + (a^4 - 2)(2 - a^2) = 0$$

$$D = a^6 - 2a^5 + a^4 + (4a^6 - 8a^4 + 16) \cdot 4$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

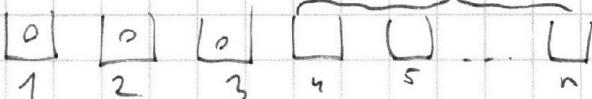
СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

изначально n коробок \rightarrow в трех из них марки

беск вариантов разложить марки $\rightarrow C_n^3 = \frac{n!}{3!(n-3)!}$

$$= \frac{(n-2)(n-1)n}{6} \text{ нужно марки листам } 3$$

\rightarrow первые коробки \Rightarrow 

метод подсчета \rightarrow нужно выбрать 1 2 и 3 коробки +

остал $n-3$ коробок

\Rightarrow метод подсчета $1 \rightarrow \frac{1}{n}$ \Rightarrow нужно выбрать все

$$2 \rightarrow \frac{1}{n-1}$$

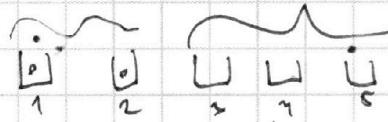
$$3 \rightarrow \frac{1}{n-2}$$

метод подсчета 2 из $n-3 \rightarrow C_{n-3}^2 = \frac{(n-3)!}{2!(n-5)!} = \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)\dots}{2(n-5)(n-6)\dots}$

$= \frac{(n-3)(n-4)}{2}$ \Rightarrow метод подсчета 3 коробки $\rightarrow C_n^3 = \frac{n!}{3!(n-3)!}$

n из них нам подходит макс 1 способ $\Rightarrow \frac{6}{(n-2)(n-1)(n)}$

N $\quad n \quad 4 \cdot 5 \cdot \quad 2 \quad 3$



пунктир
K-точка открыта.

\rightarrow если $3 \Rightarrow$ 3 способа

$$C_3^1 = \frac{3!}{1!(2!)} = 3$$

$4 \rightarrow 3$
 $5 \rightarrow 1$.

$$C_2^2 = \frac{2!}{2!(1!)} = 1$$

$$S = C_N^{k-N}$$

$$k=4 \quad N=2 \quad n=3$$

$$C_3^2 = 3!$$

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(2!)} = 10$$

$$C_3^3 = \frac{3!}{3!(0!)} = 1$$

$$4+2+3+5+4 = 17$$