



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leq 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~1.
$$\begin{cases} xy = 2(3+z) \\ yz = 3x+x^2 \\ 2x = 3y+y^2 \end{cases}$$
 перемножим $\Rightarrow (xyz)^2 = xyz(x+3)(y+3)(z+3)$
 т.к. x, y, z натуральные $\Rightarrow xyz \neq 0$

$$\Rightarrow xyz = (x+3)(y+3)(z+3) = (x+3)(yz + 3(y+z) + 9) = xyz + 3x(y+z) + 9x + 3yz + 9(y+z) + 27$$

$$\Rightarrow 0 = 3(xy + xz + yz) + 9(x+y+z) + 27$$

$$0 = xy + xz + yz + 3(x+y+z) + 9$$
; заметим xy, xz, yz :

$$0 = 3z + z^2 + 3x + x^2 + 3y + y^2 + 3(x+y+z) + 9$$

$$0 = 6(x+y+z) + x^2 + y^2 + z^2 + 9$$

 Нужно найти все значения $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 =$

$$= x^2 + 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 + z^2 + 6z + 9 = x^2 + y^2 + z^2 + 6(x+y+z) + 27$$

 Имеем: $0 = 6(x+y+z) + x^2 + y^2 + z^2 + 9 \Rightarrow$

$$x^2 + y^2 + z^2 + (6x + 6y + 6z) + 27 = 18$$

 x, y, z существуют, т.к. есть хотя бы 1 решение (сказано в условии.)

Ответ: 18



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~2.

Дано: $n = \underbrace{99999 \dots 99}_{40000}$

Найти: число дивизоров n^3

Замечание: построим таблицу количества дивизоров для разного количества дивизоров в исходном числе:

$$9^3 = 729$$

$$99^3 = 970299$$

$$999^3 = 997002999$$

$$9999^3 = 99970002999 \rightarrow \text{видим, что число состо-}$$

ящее из k девяток в кубе имеет вид.

$$\underbrace{999 \dots 9}_k^3 = \underbrace{999 \dots 9}_{k-1} \underbrace{700 \dots 000}_{k-1} \underbrace{2999 \dots 9}_k \quad \text{по индукции}$$

ранее кубам чисел состоящих из девяток удовлетворяет это верно.

$$\Rightarrow \text{всего дивизоров в числе } (k-1) + (k) = 2k-1$$

$$\text{в нашем случае } k = 40000 \Rightarrow (\text{кол-во дивизоров в числе } n) = 2k-1 = 80000-1 = 79999$$

Ответ: 79999



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано:

$$AC=10$$

$$AB=6$$

$$BE=5$$

AB - диаметр

$$DF \perp AC$$

Найти:

$$AF$$

Решение:

$$2r = AB \Rightarrow r = 3$$

$\triangle ABE$ - вписанный,

AB - диаметр $\Rightarrow$

$$AE^2 = AB^2 - BE^2 = 6^2 - 5^2 = 11$$

$$AE = \sqrt{11}$$

$\triangle ADE$ - вписанный центр
перпендикулярен.

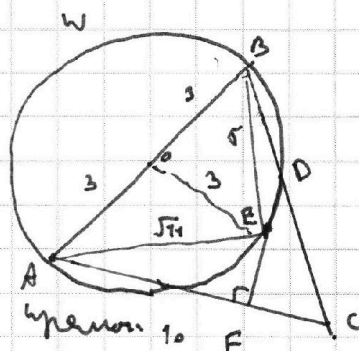
$\triangle ABD$ равнобедренный
угловый

$$\Rightarrow AD = AB = \frac{6}{\sqrt{2}}; \Rightarrow \text{по формуле косинусов.}$$

$$\text{в } \triangle AFD \rightarrow AD^2 = AF \cdot AC = \frac{6^2}{2} = 18 = AF \cdot 10 \Rightarrow AF = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$$

$\Rightarrow$

$$\text{Ответ: } AF = \frac{9}{5}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~4. Пусть всего было n коробок, необходимо открыть 5 в первом случае и 6 во втором,

$\Rightarrow$ чтобы выиграть, нужно открыть все 3 коробки с шарами $\Rightarrow$

каждый способ открыть 3 коробки с шарами и 2 без шаров и победы:

$$1. C_{n-3}^2 = \frac{(n-3)!}{2!(n-5)!} = \frac{(n-3)(n-4)}{2}$$

$$2. C_{n-3}^3 = \frac{(n-3)!}{3!(n-6)!} = \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{6}$$

всего способов открыть 5 коробок из n :

$$C_n^5 = \frac{n!}{5!(n-5)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120}$$

способов открыть 6 коробок из n :

$$C_n^6 = \frac{n!}{6!(n-6)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{120 \cdot 6} \Rightarrow$$

вероятность победы $\rightarrow$ $\frac{\text{всего способов}}{\text{выигр. способ}} = P$

$$P_1 = \frac{(n-3)(n-4)}{2} \cdot \frac{120}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} = \frac{60}{n(n-1)(n-2)}$$

$$P_2 = \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{6} \cdot \frac{6 \cdot 120}{(n-3)(n-4)(n-5)(n)(n-1)(n-2)} = \frac{120}{n(n-1)(n-2)}$$

$$\Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{120}{n(n-1)(n-2)} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{60} = 2$$

Ответ: вероятность выигрыша выросла в 2 раза.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~5:

1. $x^2 - x(a^2 - a) + a - 5 = 0 \rightarrow$ корни - 5-ый и 6-ой член ариф. прогрессии.

2. $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0 \rightarrow$ корни - 3 и 8 член ариф. прогрессии

Итак, a

Решение: первый член прогрессии - t ; разность - d

$\Rightarrow$ корни 1 ур-ие = $t + 4d$; $t + 5d$

корни 2 ур-ие = $t + 2d$; $t + 7d$; подставляем их и равенство должно выполняться

1. $(t + 4d)^2 - (t + 4d)(a^2 - a) + a - 5 = 0$

$(t + 5d)^2 - (t + 5d)(a^2 - a) + a - 5 = 0$

$\Rightarrow (t + 4d)^2 - (t + 4d)(a^2 - a) = (t + 5d)^2 - (t + 5d)(a^2 - a)$

$(a^2 - a)(t + 5d - t - 4d) = (t + 5d)^2 - (t + 4d)^2$

$(a^2 - a) \cdot d = d \cdot (2t + 9d)$

$a^2 - a = 2t + 9d$ так как $d \neq 0$

2. $4(t + 2d)^2 - (t + 2d)(a^3 - a^2) + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$

$4(t + 7d)^2 - (t + 7d)(a^3 - a^2) + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$

$4(t + 2d)^2 - (t + 2d)(a^3 - a^2) = 4(t + 7d)^2 - (t + 7d)(a^3 - a^2)$

$4((t + 7d)^2 - (t + 2d)^2) = (a^3 - a^2)(t + 7d - t - 2d)$

$4 \cdot 5d \cdot (2t + 9d) = (a^3 - a^2) \cdot 5d$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

т.к. $d \neq 0$

$$4 \cdot (2t + 9d) = a^5 - a^2 = (a^2 - a) \cdot a$$

из (1) имеем: $2t + 9d = a^2 - a$

$$\Rightarrow 4 \cdot (2t + 9d) = (2t + 9d) \cdot a$$

$$(4 - a)(2t + 9d) = 0$$

1. $4 - a = 0$ $a = 4$

2. $2t + 9d = 0 = a^2 - a = a(a - 1)$ $a = 0; 1.$

проверка: 1. $a = 0$; $x^2 - 5 = 0$ $x = \pm \sqrt{5}$ 5-ый и 6-ой

$4x^2 - 4 = 0$ $x = \pm 1$ 3-ий и 8-ой

2. $a = 1$; $x^2 - 4 = 0$ $x = \pm 2.$ (5 и 6)

$4x^2 + 2 + 2 - 1 - 4 = 0$ $4x^2 = 1$ $x = \pm \frac{1}{2}$ (2 и 7)

3. $a = 4$; $x^2 - 12x - 1 = 0$ $x = 6 \pm \sqrt{37}$

$4x^2 - 48x + 2 \cdot 256 + 2 \cdot 16 - 16 \cdot 16 \cdot 16 - 4 = 0$

$x^2 - 12x + 128 + 8 - 16 \cdot 16 \cdot 4 - 1 = 0$

$x^2 - 12x - 911 = 0$

$x = 6 \pm \sqrt{947}$

в ариф. последовательности, крайние значения

(в нашем случае 3 и 8 член) даются либо

наибольшим ^и наименьшим из известных)

$\Rightarrow$ при значении параметра $a = 0$ и $a = 1$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

данное условие не выполняется: $a=0$;

$$a_5 > a_3$$

$$\sqrt{5} > 1$$

$$a_6 < a_8$$

$$-\sqrt{5} < -1$$

$\Rightarrow a=0$ не подходит, аналогично для $a=1$

$$a_5 > a_3$$

$$2 > \frac{1}{2}$$

$$a_6 < a_8$$

$$2 < -\frac{1}{2}$$

$a=1$ не подходит,

$a=4$ подходит по данному условию $\Rightarrow$ найдем это
отсортировав значения:

$$(6 + \sqrt[4]{947}; 6 + \sqrt[4]{32}; 6 - \sqrt[4]{32}; 6 - \sqrt[4]{947}) \text{ или}$$

$$(6 - \sqrt[4]{947}; 6 - \sqrt[4]{32}; 6 + \sqrt[4]{32}; 6 + \sqrt[4]{947})$$

Ответ: $a=4$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$R^2 = 9^2 + (9\sqrt{3})^2 = 9^2(1+3) = 4 \cdot 9^2$$

$$R = 2 \cdot 9 = 18$$

$$r^2 = 6^2 + (9\sqrt{3})^2 = 6^2 + 9^2 \cdot 3 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 + 9 \cdot 3 \cdot 3 =$$

$$3 \cdot 3 \cdot (4 + 2 \cdot 3) = 9 \cdot 31$$

$$r = 3\sqrt{31}$$

$$\sin \alpha = \frac{9\sqrt{3}}{3\sqrt{31}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{31}} = 3\sqrt{\frac{3}{31}}$$

$$\alpha = \arcsin \sin \alpha = \arcsin 3\sqrt{\frac{3}{31}}$$

$$180^\circ - 2\alpha = 180^\circ - 2 \arcsin 3\sqrt{\frac{3}{31}} \Rightarrow \beta = 180^\circ + 2 \arcsin 3\sqrt{\frac{3}{31}}$$

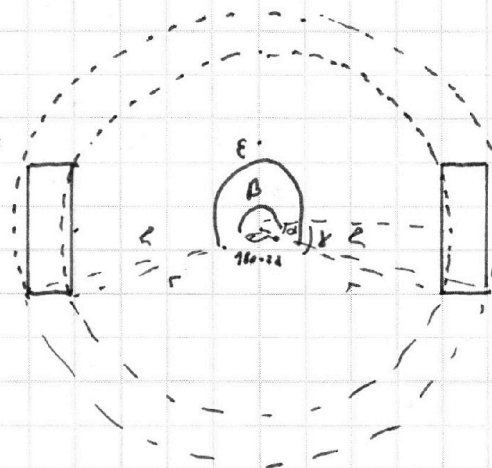
$$S_r = \frac{\pi r^2}{\beta} = \frac{\pi \cdot 9 \cdot 31}{180^\circ + 2 \arcsin 3\sqrt{\frac{3}{31}}} = \frac{\pi \cdot 9 \cdot 31}{(180^\circ) + 2 \arcsin 3\sqrt{\frac{3}{31}}}$$

$$R = 18 \Rightarrow \gamma = 60^\circ \Rightarrow \varepsilon = 180^\circ + 2\gamma = 300^\circ$$

$$S_\varepsilon = \frac{\pi R^2}{\varepsilon} = \frac{180^\circ}{300^\circ} \cdot 18^2 = \frac{3}{5} \cdot 18^2$$

$$\Rightarrow S = S_\varepsilon - S_r = \frac{279\pi}{180^\circ + 2 \arcsin 3\sqrt{\frac{3}{31}}} - \frac{3}{5} \cdot 18^2$$

$$\text{Answer: } S = \frac{279\pi \cdot 180^\circ}{(180^\circ + 2 \arcsin 3\sqrt{\frac{3}{31}})} - \frac{3}{5} \cdot 18^2$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6.

$f(x)$

$$\left| x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| + \left| x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| \leq 3$$

построим прямые $x - \frac{15}{2} = -\frac{y}{6\sqrt{3}}$ и $x - \frac{15}{2} = \frac{y}{6\sqrt{3}}$

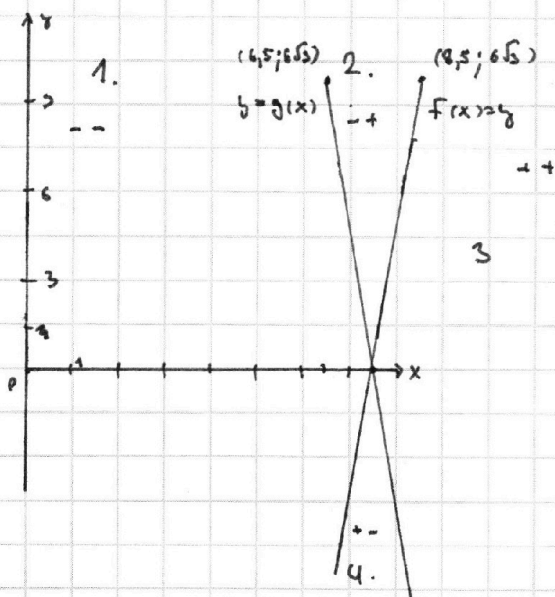
для того чтобы на графике указать где и как расширяются модули.

$$x - 6\sqrt{3} - \frac{15 - 3\sqrt{3}}{1} = y$$

$$15 - 3\sqrt{3} - x - 6\sqrt{3} = y$$

$$\sqrt{3}(6x - 45) = y = f(x)$$

$$\sqrt{3}(45 - 6x) = y = g(x)$$



$$f(7.5) = g(7.5) = 0$$

$$g(6.5) = 6\sqrt{3} \approx 10.2$$

$$f(8.5) = 6\sqrt{3} \approx 10.2$$

$g(x)$ и $f(x)$ — прямые, соединяющие начертанные точки

подставим точки из разных областей, получим знаки модулей в областях.

пусть $|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}|$ — модуль 1; $|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}|$ — модуль 2.

в области 1. оба выражения отрицательны

в области 2; выражение по модулю 1 положительно, а по модулю 2 отрицательно

в области 3; оба выражения положительны.

в области 4. выражение 1 отрицательно, а положительное



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

же 1: $-x + \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} - x + \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \leq 3$:

$-2x + 15 \leq 3$ $-2x \leq -12$ $x \geq 6$

же 3: $x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} + x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \leq 3$

$2x - 15 \leq 3$ $2x \leq 18$ $x \leq 9$

же 2: $x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} - x + \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \leq 3$

$\frac{2y}{6\sqrt{3}} \leq 3$ $y \leq 9\sqrt{3}$

же 4: $-x + \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} + x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \leq 3$

$-\frac{2y}{6\sqrt{3}} \leq 3$ $y \geq -9\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ фигура составлена из данных прямых - прямоугольник; ~~боковые стороны параллельны оси y~~

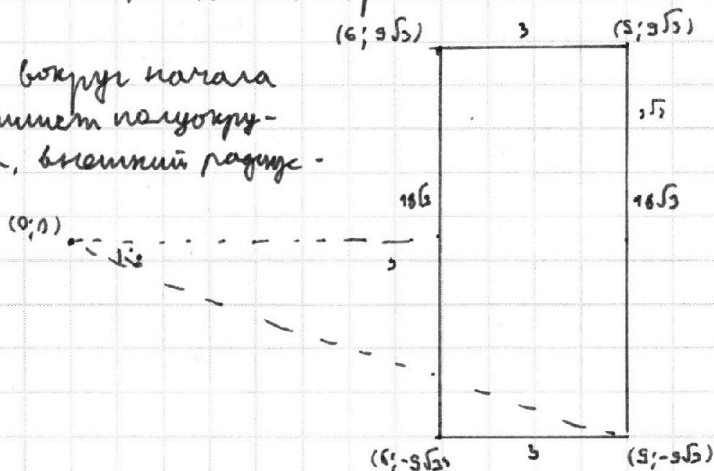
$\Rightarrow$ вертикальные стороны начинаются в 6 и заканчиваются в 9 $\Rightarrow x \in [6; 9]$

горизонтальные стороны начинаются в $-9\sqrt{3}$, а заканчиваются в $9\sqrt{3} \Rightarrow y \in [-9\sqrt{3}; 9\sqrt{3}] \Rightarrow$ (см. рис.)

при повороте на π радиан вокруг начала координат $\Rightarrow$ фигура имеет полуокружность, ее дальнее точка, внешний радиус - а все ближе - ближе - $\Rightarrow$

R - вн. радиус

r - внутренний радиус.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$xy = z(3+z)$$

$$\frac{xy}{z} = 3+z$$

$$yz = x(3+x)$$

$$\frac{yz}{x} = 3+x$$

$$zx = y(3+y)$$

$$\frac{zx}{y} = 3+y$$

$$(x+3)^2 + (z+3)^2 + (y+3)^2 = \left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{zx}{y}\right)^2 = \frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2}$$

$$= \frac{x^4y^4 + y^4z^4 + x^4z^4}{z^2x^2(2xy)^2}$$

предположим $x=y=z=a \Rightarrow a^2 = a(a+3)$

$$a^2 = a^2 + 3a \Rightarrow a=0 \quad \checkmark$$

$$z^2 = xy - 3z$$

$$x^2 = yz - 3x$$

$$y^2 = zx - 3y$$

$$xy > 3z$$

$$yz > 3x$$

$$zx > 3y$$

$$x^2y^2z^2 > 27xyz$$

$$xyz > 27$$

$$x = \frac{y}{z}(y+3) \quad yz = \frac{y}{z}(y+3)(3 + \frac{y}{z}(y+3)) \Rightarrow z^2 = (y+3)(3 + \frac{y}{z} + \frac{y^2}{z^2})$$

$$= 3y + \frac{y^3}{z} + \frac{3y^2}{z} + 3 + \frac{3y^2}{z} + \frac{3y}{z}$$

$$(xyz)^2 = xyz(3+x)(3+y)(3+z) \Rightarrow xyz = (3+x)(3+y)(3+z)$$

$$(3+x)(3+3z+3y+yz) = (3+x)(9+3(z+y)+yz) = 27+9(2+y)+3yz+3x+$$

$$3x(2+y)+yzx$$

$$0 = 27 + 9(x+y+z) + yz + xz + xy$$

$$0 = 9 + 3(x+y+z) + yz + xz + xy = 9 + 3(x+y+z) + x^2 + 3x + y^2 + 3y + z^2 + 3z$$

$$\Rightarrow 0 = 9 + 3(x+y+z) + 3(x+y+z) + x^2 + y^2 + z^2$$

$$0 = 9 + 6(x+y+z) + x^2 + y^2 + z^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$x - \frac{15}{2} \geq -\frac{y}{6\sqrt{3}}$$

1. модуль

$$-y \leq 6\sqrt{3}x - 15 \cdot 3\sqrt{3}$$

$$y \geq 6\sqrt{3}(45 - 6x)$$

$$\frac{45}{6} = 7,5$$

$$\begin{array}{r} 511 \\ 4 \\ \hline 3644 \end{array}$$

$$x - \frac{15}{2} \geq \frac{y}{6\sqrt{3}}$$

2. модуль

$$y \leq 6\sqrt{3}x - 45\sqrt{3} = \sqrt{3}(6x - 45)$$

$$144 + 4 = 148 = (12 + 25) \cdot 4 = 37 \cdot 4$$

$$D = 4 - 32$$

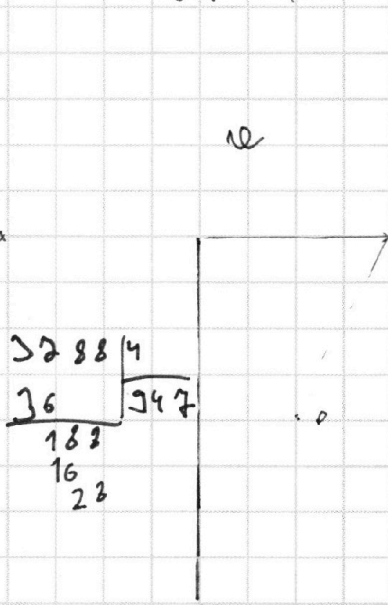
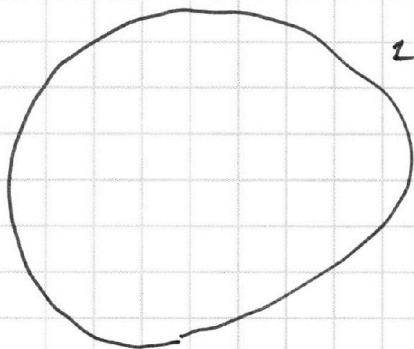
$$x = \frac{12 \pm 2\sqrt{32}}{2} = 6 \pm \sqrt{32}$$

$$144 + 3644 = 3788 =$$

$$x = \frac{12 \pm 2\sqrt{947}}{2} = 6 \pm \sqrt{947}$$

$$\begin{array}{cccc} 5 & 8 & 2 & 6 \\ \hline -\sqrt{5} & -1 & 1 & \sqrt{5} \end{array}$$

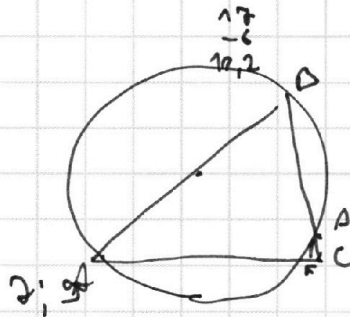
$$2 \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad 2$$



$$\begin{array}{r} 32884 \\ 36 \overline{) 347} \\ \underline{182} \\ 1622 \end{array}$$

$$36 - 45 = -9$$

$$6,5 \cdot 6 = 36 + 3 = 39$$



$$2 - 2,5 = -\frac{1}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a_1 - 1$ 2 136 1025 136 1025 911

d - разность

$\sqrt{5} \quad 1 - 1\sqrt{5}$

$$(a_1 + 4d)^2 + (a_1 + 4d)(a^2 - a) + a - 5 = 0$$

$$(a_1 + 5d)^2 + (a_1 + 5d)(a^2 - a) + a - 5 = 0$$

$$a^3 - a^2 = 48$$

$$16 \cdot 16 = 256$$

$$(a_1 + 4d)^2 + (a^2 - a)(a_1 + 4d) = (a_1 + 5d)^2 + (a_1 + 5d)(a^2 - a)$$

$$(a_1 + 4d)^2 - (a_1 + 5d)^2 = (a^2 - a)(a_1 + 5d - a_1 - 4d) = (a^2 - a)d$$

$$(a_1 + 4d - a_1 - 5d)(a_1 + a_1 + 4d + 5d) = -d(2a_1 + 9d) = d(a^2 - a)$$

$$d \neq 0 \Rightarrow a^2 - a = -2a_1 - 9d$$

$$4 \cdot (a_1 + 2d)^2 - (a^3 - a^2) \cdot (a_1 + 2d) + 2a^4 + 2a^2 - 4 = 0$$

$$4 \cdot (a_1 + 2d)^2 - (a^3 - a^2)(a_1 + 2d) + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$$

$$4a_1 + 8d - (a^3 - a^2)(a_1 + 2d) = 4a_1 + 8d - (a^3 - a^2)(a_1 + 2d)$$

$$20d = (a^3 - a^2)(a_1 + 2d - a_1 - 2d) = (a^3 - a^2)(5d)$$

$$4 = a^3 - a^2$$

$$4(a_1 + 2d)^2 - (a^3 - a^2)(a_1 + 2d) = 4(a_1 + 2d)^2 - (a^3 - a^2)(a_1 + 2d)$$

$$4((a_1 + 2d)^2 - (a_1 + 2d)^2) = (a^3 - a^2)(a_1 + 2d - a_1 - 2d) =$$

$$4(a_1 + 2d - a_1 - 2d)(a_1 + 2d + a_1 + 2d) = (a^3 - a^2) \cdot 5d$$

$$8a_1 + 36d = a^3 - a^2 = a(a^2 - a) = a(-2a_1 - 9d) = -2a_1a - 9ad$$

$$8a_1 + 2a_1a + 36d + 9ad = 0$$

$$-2a_1 - 9d = a^3 - a$$

$$2a_1(4 + a) + 9d(4 + a) = 0$$

$$(2a_1 + 9d)(4 + a) = 0$$

либо $2a_1 = -9d \Rightarrow -3d - 2a_1 = 0 \Rightarrow a^2 - a = 0$ $a(a-1) = 0$ $a = 0; 1$
либо $a = -4$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

пусть коробок всего n ;

каждо машин $N = 3$

нужно открыть $- k \Rightarrow k_1 = 5; k_2 = 6$

$\Rightarrow$ число способ открыть все машины и выиграть =

$$C_{n-N}^{k-N} \quad C_{n-3}^{5-3} = C_{n-3}^2$$

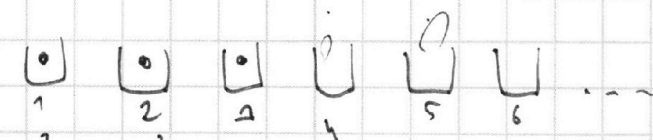
$$C_1 = C_{n-3}^{5-3} = C_{n-3}^2 = \frac{(n-3)!}{2!(n-5)!} = \frac{(n-3)(n-4)}{2}$$

$$C_2 = C_{n-3}^{6-3} = C_{n-3}^3 = \frac{(n-3)!}{3!(n-6)!} = \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{6}$$

способ разложить карты $\rightarrow C_n^N = C_n^3 = \frac{n!}{6(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

также $\delta 1. \quad \frac{(n-3)(n-4) \cdot 6}{2 \cdot (n-1) \cdot n \cdot (n-2)} = \frac{3 \cdot (n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)}$

$\delta 2. \quad \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{n(n-1)(n-2)}$



$$X^2 - a(a-1)X + a-5 = 0$$

$$X^2 - a(a-1)X + a-5 = 0$$

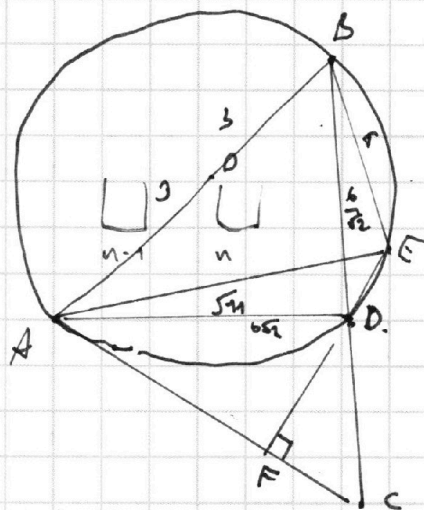
$$D = (a^2 - a)^2 - 4a + 20$$

$$4X^2 - (a^3 - a^2)X + a^4(2 - a^2) + 2(a^2 - 2) = 0$$

$$4X^2 - X(a^3 - a^2) + (a^4 - 2)(2 - a^2) = 0$$

$$4X^2 - X(a^3 - a^2) + (a^4 - 2)(2 - a^2) = 0$$

$$D = a^6 - 2a^5 + a^4 + (4a^6 - 8a^4 - 8a^2 + 16) \cdot 4$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

значительно n коробок $\Rightarrow$ в трех из них марки
все варианты размещения марки $\rightarrow C_n^3 = \frac{n!}{3!(n-3)!}$

$$= \frac{(n-2)(n-1)(n)}{6}$$

пусть марки стоят в

3 первых коробках $\Rightarrow$

0	0	0			
1	2	3	4	5	n

такой порядок $\rightarrow$ нужно выбрать 1 2 и 3 коробки +
марки 2; из $n-3$ коробок.

$\Rightarrow$ можно выбрать 1 $\rightarrow \frac{1}{n}$ можно выбрать все
2 $\rightarrow \frac{1}{n-1} \Rightarrow \Rightarrow \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$

$$3 \rightarrow \frac{1}{n-2}$$

способов выбрать 2 из $n-3 \rightarrow C_{n-3}^2 = \frac{(n-3)!}{2!(n-5)!} = \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)\dots}{2(n-5)(n-6)\dots}$

$= \frac{(n-3)(n-4)}{2}$ способов выбрать 3 коробки $\rightarrow C_n^3 = \frac{n!}{3!(n-3)!}$

и.к. из них нам понадобится только 1 способ $\Rightarrow \frac{6}{(n-2)(n-1)(n)}$

N n 4.5. 2 3

0	0			
1	2	3	4	5

 $\rightarrow$ если $3 \Rightarrow$ 3 способа
4 $\rightarrow$ 3
5 $\rightarrow$ 1.

нужно
K-значения отсортировать.

$$C_3^1 = \frac{3!}{1!(2!)} = 3$$

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!(1!)} = 3$$

$$C_3^3 = \frac{3!}{3!(0!)} = 1$$

$$S = C_n^{k-N}$$

$$k=4 \quad N=2 \quad n=5$$

$$C_3^2 = 3!$$

$$C_3^3 = \frac{3!}{3!} = 1$$

$$4 + 2 + 4 + 5 + 4 = 15$$