



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x + 3)^2 + (y + 3)^2 + (z + 3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.
4. [4 балла] В геленгре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарик. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leq 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1- прообразованные

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 + z^2 + 6z + 9 =$$

$$x^2 + 3x + 3x + 9 + y^2 + 3y + 3y + 9 + z^2 + 3z + 3z + 9 = yz + xy + xz + 3(x+3) + 3(y+3) + 3(z+3) =$$

Сложив все в одну сумму.

$$= xy + yz + xz + 3(x+y+z) + 27 \quad \text{---}$$

$$xy + xz + yz = x^2 + y^2 + z^2 + 3(x+y+z)$$

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$$

$$\begin{aligned} & \downarrow \\ & \cancel{xy + yz + xz + xy + xz + yz - x^2 - y^2 - z^2 + 27} \\ & \cancel{(x+y+z)^2 - x^2 - y^2 - z^2} \\ & \cancel{(x+y+z)^2 - 2(xy + yz + xz)} \neq 27 \end{aligned}$$

по Th Виета $x+y+z = -3$

$$xy + yz + xz = 0$$

$$\Rightarrow 0 + 3 \cdot (-3) + 27 = 27 - 9 = 18 \text{ --- единственное}$$

неверно значение при $x, y, z \neq 0$

Ответ: 18



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

~~Приведем всю систему на 2 и сложим все 3 уравнения~~

~~$$2xy + 2xz + 2yz = 6x + 6y + 6z + 2x^2 + 2y^2 + 2z^2$$~~

~~$$x^2 - 2xy = x^2 - 6x - y^2 + 6y - z^2 + 6z = x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + yz + xz)$$~~

~~$$-6x - 6y - 6z = x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 2xz + z^2 + y^2 - 2yz + z^2$$~~

~~$$+ 6(xy + yz + xz) = (x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2$$~~

~~справа $> 0 \Rightarrow$ слева $> 0 \Rightarrow (x+y+z) \leq 0$~~

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \quad | \cdot z \\ yz = 3x + x^2 \quad | \cdot x \\ zx = 3y + y^2 \quad | \cdot y \end{cases}$$

$$\begin{cases} xyz = 3z^2 + z^3 \\ xyz = 3x^2 + x^3 \\ xyz = 3y^2 + y^3 \end{cases}$$

Рассмотрим функцию

$$f(x) = 3x^2 + x^3$$

при $x > 0$ $3x^2$ - мон \uparrow x^3 - мон \uparrow $f(x)$ \uparrow

тогда в 3-х макс $f(x)$ принимает отрицательные значения $xy = z < 0$

\Rightarrow может эти макс совпадать если $x, y, z > 0$, тогда

$$x^2 = 3x + x^2 \quad \text{при } x > 0 \quad x = 0 \Rightarrow z = 0 \text{ значит хотя бы 1 из } f(x) < 0.$$

Если 1 число < 0 (например x) то $xy < 0$ т.к. $y > 0$, а $3z + z^2 > 0$

т.к. $z > 0$

и отриц = полож.

Тогда либо 2 либо 3 числа < 0 .

найдем Т. макс, минимумы у $f(x)$ $f'(x) = 6x + 3x^2$ $f'(x) = 0$

$$\begin{cases} x^2(x+2) = 0 \\ x = 0 \\ x = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x(2+x) = 0 \\ x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1 - продолжение

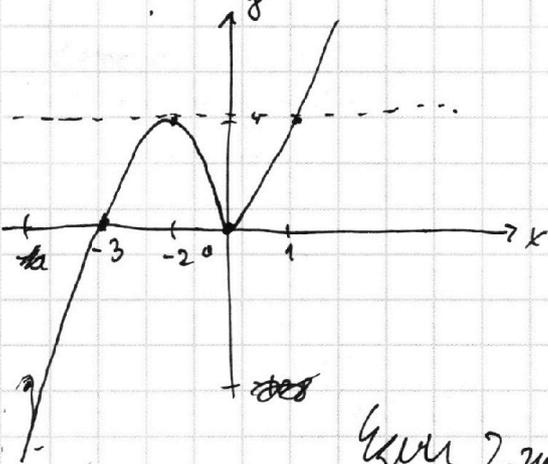
$f'(x)$ + - +

$f(x)$ ↗ ↘ ↗

$x = -2$ 1. макс
лока

$x = 0$ г. мин
лока

Тогда x -цели выглядят примерно так.



Найдем нули x -линии

$$f(x) = 0$$

$$x^2(3+x) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$f_{\max} = f(-2) = -108$$

$$f_{\min} = f(0) = 0$$

При $x < -3$ $f(x)$ мон.

тогда если $x, y, z < -3$ то они

мон. совпадают и

это значит $x = z = y = 0$.

Если 2 числа совпадают, укажем это $f(x) = 4$
($x=y=0$ не может быть, так как $x, y, z < -3$) и $xz = -2$ а $z = \frac{f(x)}{xy} = 1$ получим

теперь нам нужно выбрать наименьшее число $A = f(x)$ от 0 до 4, чтобы

корни уравнения $f(x) = A$ давали в произведение A .

$$x^3 + 3x^2 - A = 0 \quad \text{на th. Виета для множителей больших степеней}$$

произведение данных корней будет давать $0x + A$

$$xyz \in (0; 4]$$

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 =$$

$$= 1 + 1 + 16 = 18$$

$$\frac{xyz}{z} = 3z + z^2 \quad | \cdot z \neq 0$$

$$xyz = 3z^2 + z^3$$

$$z^3 + 3z^2 - A = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

N2

Число составленное из 40.000 девяток можно представить в виде

$$10^{40000} - 1, \text{ тогда оно в виде даст } (10^{40000} - 1)^3 =$$

$$= 10^{120000} - 3 \cdot 10^{80000} + 3 \cdot 10^{40000} - 1. \text{ Это мы и получим}$$

1000...03000...0 вычитаем число 300000...01

$$\begin{array}{r} 1000 \dots 03000 \dots 0 \\ - 300000 \dots 01 \\ \hline 999 \dots 9997 \dots 0029999 \dots 999 \end{array}$$

Занимаем единицу у старшего разряда до 1 тройки у тройки остался только 2.

доидя до 3 снизу занимаем занимаем пять до самой первой 1

Итого получим в первой 40.000 - все девятки, во второй 40.000 двойку и все нули, в третьей 40.000 семерку и все девятки.

$$\text{Итого } 40.000 + 40.000 - 1 = 79999$$

Ответ: 79.999

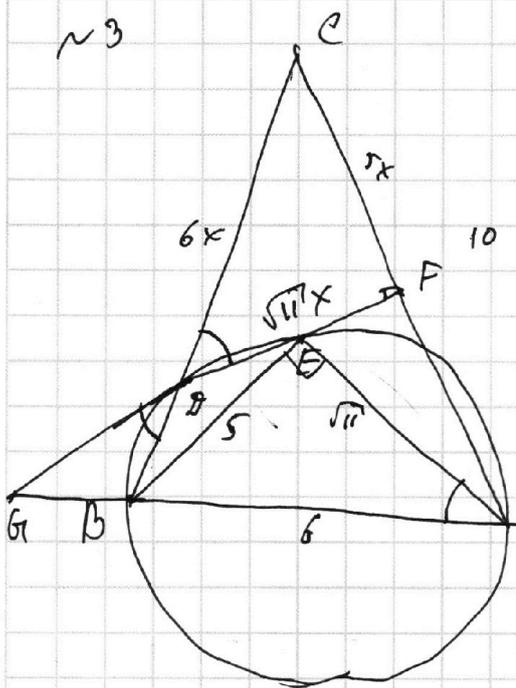


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



AB -диаметр $\Rightarrow \angle BEA = 90^\circ \Rightarrow$

в $\triangle BEA$ по Th Pyth: $EA = \sqrt{11}$

т.к. $ABDE$ - вписан $\Rightarrow \angle EAB + \angle EDB = 180^\circ$

а $\angle CDF$ - смеж с $\angle BDE \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CDF + \angle BDE = 180^\circ$

\Downarrow
 $\angle EAB = \angle CAF = \alpha$

\Downarrow
 $\triangle DFC \sim \triangle AEB$

по 2-м углам.

и $\frac{CF}{DC} = \frac{BE}{AB} = \frac{5}{6}$

и $DC = 6x$
 $CF = 5x$, где x - нек. число.
 $DF = \sqrt{11}x$

Th. меншага $\triangle ABC$ и секущая GF

$$\frac{FC}{BD} \cdot \frac{AF}{CF} \cdot \frac{CD}{BD} \cdot \frac{GB}{AB} = 1 \quad (1)$$

Th меншага $\triangle GAF$ и секущая BC

$$\frac{AB}{BG} \cdot \frac{GD}{DF} \cdot \frac{CF}{AC} = 1 \quad (2)$$

$$(1) \cdot (2) \quad \frac{AF}{CF} \cdot \frac{CD}{BD} \cdot \frac{GB}{AB} \cdot \frac{AB}{BG} \cdot \frac{GD}{DF} \cdot \frac{CF}{AC} = 1 \quad \frac{AF \cdot 6x \cdot 6 \cdot GB}{BD \cdot AB \cdot \sqrt{11}x \cdot 10} = 1 \quad (3)$$

в $\triangle GEA$ и $\triangle GBE$ две параллельные $\angle EGB$ - опр. $\angle CDF$

$\angle GBE = \angle BGA = \angle BEA = \alpha = \angle EAB$
(верт)

$$\frac{GB}{GD} = \frac{GE}{AE} = \frac{BE}{AE} = \frac{BE}{AE} \Rightarrow \triangle GBD \sim \triangle GEA$$

Тогда (3) $\frac{AF \cdot 6x \cdot 6 \cdot GB}{BD \cdot \sqrt{11}x \cdot 10 \cdot \sqrt{11}} = 1$

$$AF = \frac{11 \cdot 10}{36} = \frac{110}{36} = \frac{55}{18}$$

Ответ: $\frac{55}{18}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

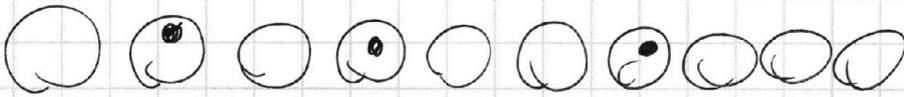
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

нч

Пусть у нас N коробок с маршмэллоу, тогда выбрать 5 коробок из N можно C_N^5 способами. Из них вычеркнем те, где есть все 3 шарика. Расчитать их по N коробкам можно C_N^3 способами.



Из этих C_N^5 способов нам подойдут лишь те, где мы взяли 3 коробки с маршмэллоу и 2 любых других. Это C_{N-3}^{5-3} выбор 2-х ост.

коробок из $N-3$ ост, т.к. 3 уже заняты маршмэллоу

$$\text{Тогда } P_5 \cdot \text{вероятность с 5 коробками это } \frac{C_{N-3}^2}{C_N^5} = \frac{\frac{N \cdot (N-3)!}{2! \cdot (N-5)!}}{\frac{N!}{5! \cdot (N-5)!}} = \frac{5! \cdot (N-3)!}{2 \cdot N!}$$

Для 6 коробок тоже самое, только все C_N^6 способов, а нулевые

$$C_{N-3}^{6-3} = C_{N-3}^3 \quad \text{и} \quad P_6 = \frac{C_{N-3}^3}{C_N^6} = \frac{\frac{(N-3)!}{3! \cdot (N-6)!}}{\frac{N!}{6! \cdot (N-6)!}} = \frac{6! \cdot (N-3)!}{6 \cdot N!}$$

$$\text{Как и нужно кайтти } \frac{P_6}{P_5} = \frac{6! \cdot 2}{5! \cdot 6} \cdot \frac{(N-3)! \cdot N}{N! \cdot (N-3)!} = 2$$

Ответ: в 2 раза



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5 d -разность прогрессии $\neq 0$ среднее арифм. 2-х членов ариф. прогрессии

$x_1 = a_5$ $x_3 = a_8$
 $x_2 = a_6$ $x_4 = a_3$

Тогда $\frac{a_5 + a_6}{2} = \frac{a_3 + a_8}{2}$ — это член стоящий посередине и для 5-6 и для 3-8 по середине стоит 5,5-ый член $(a_5 + \frac{d}{2})$

По Th. Виета $x_1 + x_2 = \frac{a^2 - a}{1}$
 $x_3 + x_4 = \frac{a^3 - a^2}{4}$

$x_1 + x_2 = x_3 + x_4$
 $4a^2 - 4a = a^3 - a^2$
 $a^3 - 5a^2 + 4a = 0$
 $a(a^2 - 1)(a - 4) = 0$
 $\begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \\ a = 4 \end{cases}$ — все три варианта пусть

Проверим если бы Валютность, т.е. то будет 2 разных курса. (Курс не могут совпадать т.к. арифм. прогр. не прст.)

$a = 0: x^2 - 5 = 0 \quad x = \pm \sqrt{5}$

$4x^2 - 4 = 0 \quad x = \pm 1 \quad \checkmark$

$a = 1: x^2 - 4 = 0 \quad x = \pm 2 \quad \checkmark$

$4x^2 - 1 = 0 \quad x = \pm 0,5$

$a = 4: x^2 - 12x - 1 = 0 \quad D = 144 + 4 = 148 > 0 \quad \checkmark$

$4x^2 - 48x - 1508 = 0 \quad D = 48^2 + 4 \cdot 4 \cdot 1508 > 0$

Ответ: $a \in \{0, 1, 4\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

Разрешим модуль

1) оба ≥ 0 : ~~$x \geq 7,5$~~ $y \geq x - 7,5 + \frac{y}{6\sqrt{3}} \geq 0$
 $x - 7,5 - \frac{y}{6\sqrt{3}} \geq 0$; $x - 7,5 + \frac{y}{6\sqrt{3}} + x - 7,5 - \frac{y}{6\sqrt{3}} \leq 3$

$y \leq -6\sqrt{3}x + 45\sqrt{3}$; $x \leq 9$

$y \leq 6\sqrt{3}x - 45\sqrt{3}$

2) I ≥ 0 , II < 0 : $x - 7,5 + \frac{y}{6\sqrt{3}} \geq 0$; $x - 7,5 + \frac{y}{6\sqrt{3}} - x + 7,5 + \frac{y}{6\sqrt{3}} \leq 3$
 $x - 7,5 - \frac{y}{6\sqrt{3}} < 0$

$y \geq -6\sqrt{3}x + 45\sqrt{3}$; $y \leq 9\sqrt{3}$

$y > 6\sqrt{3}x - 45\sqrt{3}$

3) I < 0 , II ≥ 0 : $y < -6\sqrt{3}x + 45\sqrt{3}$; $7,5 - x - \frac{y}{6\sqrt{3}} + x - 7,5 - \frac{y}{6\sqrt{3}} \leq 3$
 $y \leq 6\sqrt{3}x - 45\sqrt{3}$; $-\frac{y}{3\sqrt{3}} \leq 3 \rightarrow y \geq -9\sqrt{3}$

4) оба < 0 : $y < -6\sqrt{3}x + 45\sqrt{3}$; $7,5 - x - \frac{y}{6\sqrt{3}} - x + 7,5 + \frac{y}{6\sqrt{3}} \leq 3$
 $y > 6\sqrt{3}x - 45\sqrt{3}$; $15 - 2x \leq 3$; $2x \geq 12$; $x \geq 6$

Условие не разрешимое модуль, означает, что данные точки лежат выше и ниже соотв прямой $-6\sqrt{3}x + 45\sqrt{3}$ и $6\sqrt{3}x - 45\sqrt{3}$

Нарисуем ИС
 верш. проходит через точку $(0; 45\sqrt{3})$
 $4(7,5; 0)$
 Мин. проходит через $(0; -45\sqrt{3})$
 $(7,5; 0)$

обозначим область для каждого пути



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

Нарисуем прямые
они симметричны друг
к другу

получившаяся область -
это трапеция
с центром $(2,5; 0)$

сторонами 3 и $18\sqrt{3}$

Что можно представить

как очень много отрезков паралл.
отт. к ос. абсц.

При повороте на $\pi \equiv 180^\circ$ каждый такой отрезок заметает

полосу т.к. разл. угол и он \perp разл. углу, значит

множество таких отрезков заметает этот отрезок в каждой точке -
получим кольцо шириной в длину прямой.

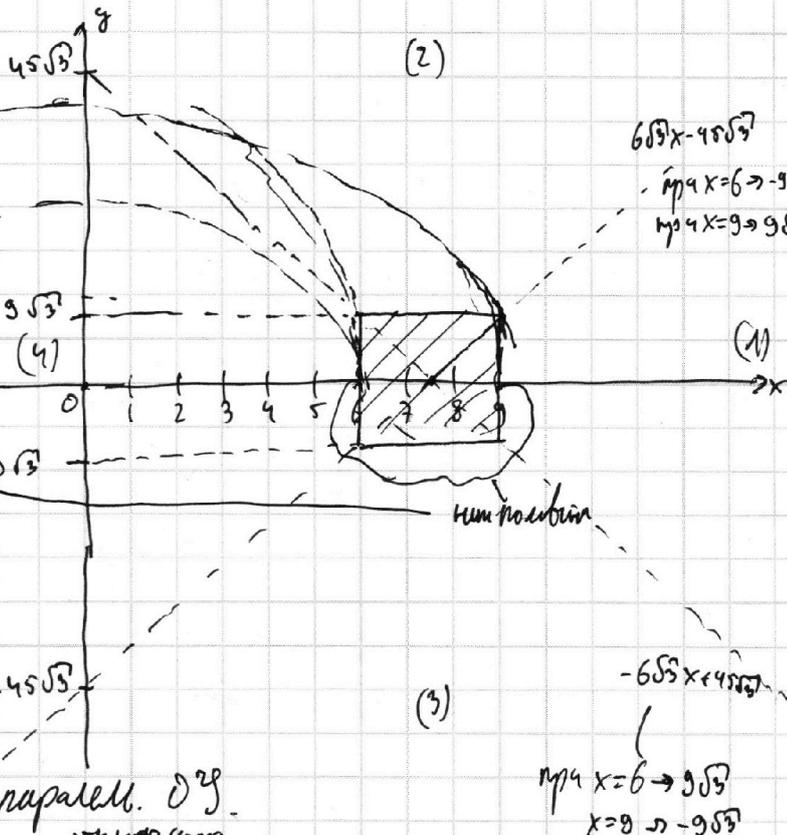
т.е. 3., внутр. радиус 6 и внеш. 9 ($7,5 + 1,5$ и $7,5 - 1,5$)

$$\text{Что площадь} = S_1 = \frac{1}{2} \pi (R_{\text{вн}}^2 - R_{\text{внт}}^2) = \frac{\pi}{2} \cdot (81 - 36) = \frac{45\pi}{2}$$

Также после замечания останется "внешн" или "внутр" прямая, что
спираль (с начала и с конца вращ.) поэтому S_1 добавится $2 \cdot \frac{S}{2} = S_{\text{прямой}}$

$$= 18\sqrt{3} \cdot 3 = 54\sqrt{3} \quad \text{Тогда что площадь} \quad \frac{45\pi}{2} + 54\sqrt{3}$$

$$\text{Ответ: } \frac{45\pi}{2} + 54\sqrt{3}$$



$$6\sqrt{3}x - 45\sqrt{3}$$

$$\text{пр } x=6 \rightarrow -9\sqrt{3}$$

$$\text{пр } x=9 \rightarrow 9\sqrt{3}$$

$$-6\sqrt{3}x + 45\sqrt{3}$$

$$\text{пр } x=6 \rightarrow 9\sqrt{3}$$

$$x=9 \rightarrow -9\sqrt{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~7 - продолжение

$$DM = \frac{\sqrt{2}x}{2} = \frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

$$BD \quad MP = \frac{\sqrt{2}x}{2} \text{ (полюса } PA)$$

$$EM = \frac{\sqrt{2}x}{2} \quad MP + CP = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sin 25^\circ}{\sin 20^\circ} \right) \cdot x$$

$$PC + BA = 2\sqrt{a^2+b^2} - (a+b) \quad \sqrt{a^2+b^2} + PA$$

$$-PA = \sqrt{a^2+b^2} - (a+b) = -\sqrt{2}x$$

$$PC + BA + PA = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\text{Th sm } \triangle BDC: \frac{\sin 20^\circ}{x} = \frac{\sin 45^\circ}{CD} = \frac{\sin 115^\circ}{b} \quad CD = \frac{\sqrt{2}}{2 \sin 20^\circ} x \quad b = \frac{\sin 115^\circ}{\sin 20^\circ} \cdot x$$

$$\text{Th sm } \triangle BPD: \frac{\sin \beta}{x} = \frac{\sin 45^\circ}{BD} \quad BD = \frac{\sqrt{2}}{2 \sin \beta} x$$

$$a + \frac{\sin 115^\circ}{\sin 20^\circ} x - \sqrt{a^2 + \frac{\sin^2 115^\circ}{\sin^2 20^\circ} x^2} = \sqrt{2}x \quad |^2$$

$$a^2 + \frac{\sin^2 115^\circ}{\sin^2 20^\circ} x^2 + 2ax \frac{\sin 115^\circ}{\sin 20^\circ} = 2x^2 + a^2 + \frac{\sin^2 115^\circ}{\sin^2 20^\circ} x^2 + 2\sqrt{2}x \sqrt{\quad}$$

$$\cancel{a^2} + \frac{\sin^2 115^\circ}{\sin^2 20^\circ} x^2 = 2x^2 + 2\sqrt{2} \sqrt{a^2 + \frac{\sin^2 115^\circ}{\sin^2 20^\circ} x^2} \quad |^2$$

$$\cancel{a^2} + \frac{\sin^2 115^\circ}{\sin^2 20^\circ} x^2 - 2ax \frac{\sin 115^\circ}{\sin 20^\circ} = 2 \left(a^2 + \frac{\sin^2 115^\circ}{\sin^2 20^\circ} x^2 \right)$$

$$0 = a + \frac{\sin 115^\circ}{\sin 20^\circ} x^2 - 2ax \frac{\sin 115^\circ}{\sin 20^\circ}$$

$$\angle QBD = \angle PCD = 20^\circ$$

$$\text{Ответ: } 20^\circ$$

$$\left(a - \frac{\sin 115^\circ}{\sin 20^\circ} x \right)^2 = 0$$

$$\angle C = \frac{\sin 115^\circ}{\sin 20^\circ} x = b \Rightarrow \text{симметричная}$$

\triangle - р/б и картину

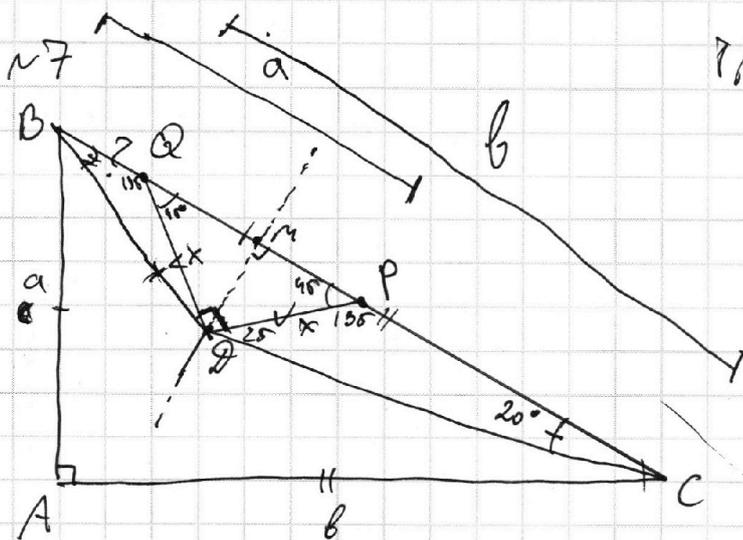


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\angle M \cdot DQ = PD = 20$

$\angle D$ - линия на сер. \perp к отрезку QP
пусть M - сер PA , тогда

DM - сер \perp к PA

Пос $QD = PD$ и $\angle QDP = 90^\circ$

ΔQDP - прям и р/б.

и $QM = DP = x$

то $QP = \sqrt{2}x$
 $QD = \frac{\sqrt{2}x}{2}$ (по т. Пиф.)
 $\frac{\sqrt{2}x}{2}$ - мед. в прям Δ .

Т.к. В прям ΔABC $AB = a$, $AC = b$
по т. Пиф $BC = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$BQ + QP + PC = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\begin{aligned} BQ + QP + PC &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ + PA + CP &= b \\ PA + BQ &= a \end{aligned}$$

$$2PA + CP + BQ = a + b$$

$$a + b - \sqrt{a^2 + b^2} = PQ = \sqrt{2}x$$

$$PC = \sqrt{a^2 + b^2} - a$$

$$BQ = \sqrt{a^2 + b^2} - b$$

Т.к. \sin в ΔBQD

$$BD = MB^2 + BQ$$

$$\angle BPC = 180^\circ - \angle QPD = 135^\circ \text{ (линей)}$$

$$\angle PDC = 180^\circ - 20^\circ - 135^\circ = 25^\circ \text{ (} \angle \text{ в } \Delta \text{)}$$

$$\text{Т.к. } \sin \text{ в } \Delta PDC: \frac{\sin 135^\circ}{DC} = \frac{\sin 20^\circ}{x} = \frac{\sin 25^\circ}{CP}$$

$$CP = \frac{\sin 25^\circ}{\sin 20^\circ} \cdot x \quad CD = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 25^\circ} \cdot x$$

пусть $\angle DCB = \beta$, тогда

$$\angle QDB = 45^\circ - \beta \text{ (внеш угол)}$$

$$\frac{\sin \beta}{x} = \frac{\sin(45^\circ - \beta)}{BQ} \quad BQ = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \beta - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \beta}{\sin \beta} \cdot x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cot \beta - 1) x$$

$$\angle QDC = 90^\circ + 25^\circ = 115^\circ$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$(x - 7.5 + \frac{y}{6\sqrt{3}}) \cdot (x - 7.5 - \frac{y}{6\sqrt{3}}) \leq 3$
 $xy = -6\sqrt{3}x + \dots$
 $y = 6\sqrt{3}x - \dots$
 $\frac{15}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}}$ $\frac{7.5}{6} = \frac{8.25}{12}$
 $x - 7.5 + x - 7.5 \leq 3$
 $2x - 15 \leq 3$
 $2x \leq 18$
 $x \leq 9$
 $x - 7.5$
 $15 - 2x \leq 3$
 $2x \geq 12$
 $x \geq 6$
 $\frac{1}{36}$
 $\frac{108}{-18}$
 $(x+iy-z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz$
 $xy z = 3z^2 + z^3$
 $xy z = 3x^2 + x^3$
 $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$
 $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = x^3 - (x_1+x_2+x_3)x^2 + x_1x_2x + \dots$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

x5

d-разность прогрессии fo

То, что корни - это члены прогрессии, означает, что их разность кратна какому-то числу d. Для первого уравнения разность соседних, то $x_1 - x_2 = d$ для второго - разность между ними члена, то разность корней $x_3 - x_4 = 5d$. Не теряя общности будем считать, что $x_1 > x_2$, $x_3 > x_4$.

Разность корней это в ив. выражении это $x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}}{2}$
 $= \frac{\sqrt{\frac{b^2}{a^2} - 4\frac{c}{a}}}{2}$, где $\frac{c}{a}$ - номер в ив. 3-х член. = $\frac{a^3 - 2a^2 + a^2 - ca + 20}{a^2}$
 по Г. Виета

Для I уравн

$$x_1 - x_2 = \sqrt{(a-1)^2 - 4(a-5)} = \sqrt{a^2 - 2a^3 + a^2 - 4a + 20}$$

Для II уравн

$$x_3 - x_4 = \sqrt{\frac{(a^2 - a^2)^2}{16} - 4 \cdot \frac{1}{4} (2a^4 + 2a^2 - a^2 - 4)}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{a^6 - 2a^5 + a^4 - 8a^4 - 32a^2 + 32a^6 - 64}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{33a^6 - 2a^5 - 31a^4 - 32a^2 - 64}$$

$$x_3 - x_4 = \frac{\sqrt{31}}{4} = \frac{\sqrt{(a^3 - a^2)^2 - 4(a^4(2-a^2) - 2(2-a^2))}}{4} = \frac{\sqrt{(a^3 - a^2)^2 + 4(a^4 - 2)(a^2 - 2)}}{4}$$

$$5(x_1 - x_2) = x_3 - x_4$$

$$\frac{4 + 2 + 5 + 4 + 5 + 5 + 6}{11} = \frac{10}{10}$$

$$31$$

$$20 \sqrt{a^2(a-1)^2 - 4(a-5)} = \sqrt{a^4(a-1)^2 + 4(a-2)(a^2-2)}$$

среднее арифм 2 членов при прогрессии равно члену стоящему между ними

и 5+6 и 3+8 вых в полусумме получим вых пятый с половиной член
 значит раз $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{x_3 + x_4}{2}$ ($\frac{3+8}{2} = \frac{5+6}{2}$) ($a + \frac{d}{2}$)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 6x + 9$$



$$2xy = 6z + 2z^2$$

$$2yz = 6x + 2x^2$$

$$2xz = 6y + 2y^2$$

$$\frac{6}{N} \cdot \frac{4}{(N-1)} = \frac{3}{(N-1)}$$



$$2(xy + yz + xz) = 6z + 6x + 6y + x^2 + y^2 + z^2$$

$$-6z - 6x - 6y - x^2 - y^2 - z^2 = -(x+y+z)^2$$

$$-(x+z)^2 - (y+z)^2 - (z+z)^2 = (x+y+z)^2 - 9$$

$$(x+z)^2 + (y+z)^2 + (z+z)^2 = 9 - (x+y+z)^2$$

$$9^3 = 3^6 = 279$$

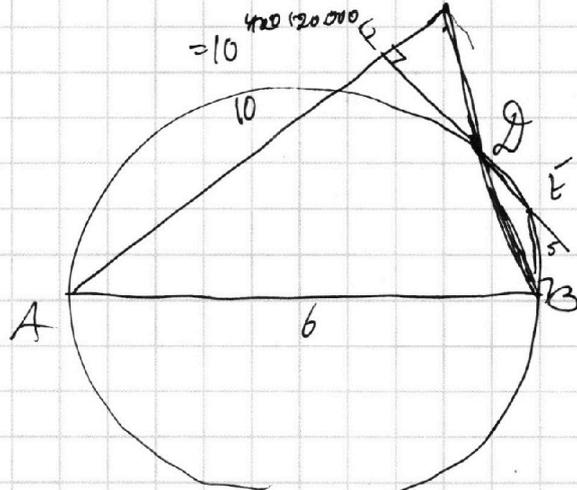
$$10^3$$

$$99$$

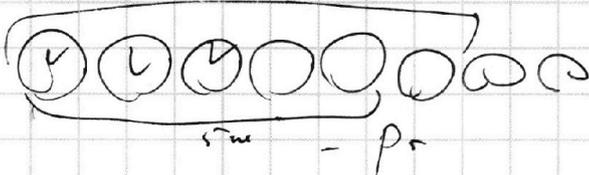
$$100$$

$$(10^{40.000} - 1)^3 = C$$

$$= 10^{40000(20000)}$$



$$6nr - p_6$$



$$6nr - p_6$$

$$p_6 - ?$$

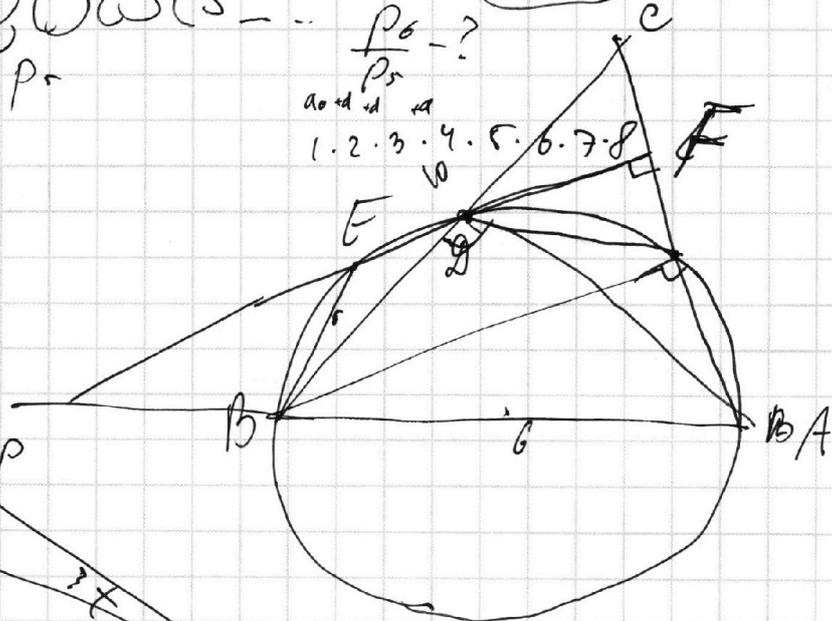
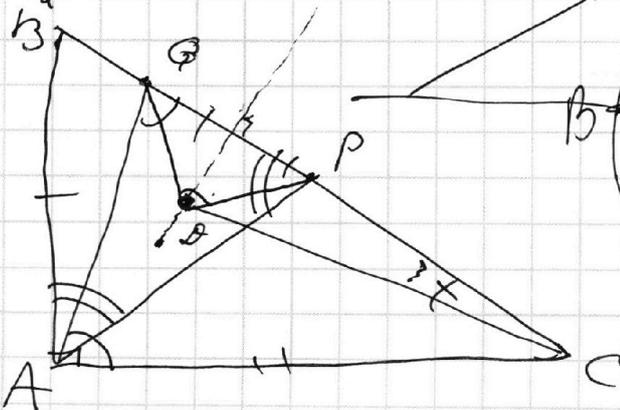
$$p_5$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$$

$$10$$

$$x_2 - x_1 = d$$

$$x_4 - x_3 = sd$$





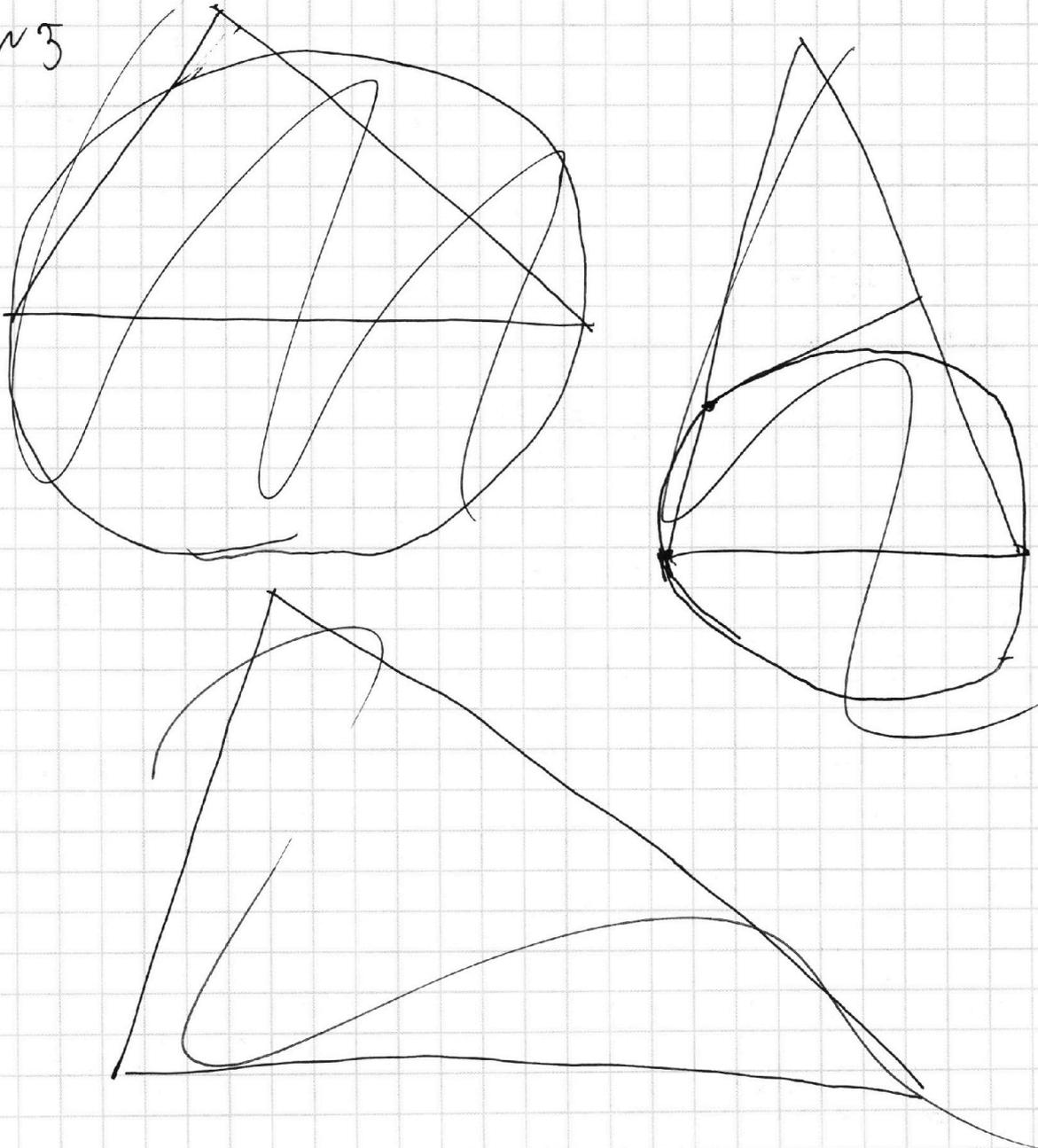
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№3



$$\frac{84}{45} - \frac{36}{18} = \frac{110}{36} = \frac{55}{18} =$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

Поймем, что за ~~функция~~ ^{линия} задается ~~уравнением~~ ^{уравнением} вида

$$|x-a+ky| + |x-a-ky| = 3$$

функция ~~я~~ будет ~~вызвать~~ ^{данной} ~~элемент~~ ^{линии} ~~и~~ ^{состав} ~~элем~~ ^{элем}

Найдем нули модулей, это $y \in x-a+ky=0 \Rightarrow y = -\frac{x}{k} + \frac{a}{k}$ - I модуль

и $x-a-ky=0 \Rightarrow y = \frac{x}{k} - \frac{a}{k}$ - II модуль

Если точка выше обеих прямых, то разбиваем сложением

$$x-a+ky + x-a-ky = 3$$

$$x = 1,5 + a = 9$$

Если точка выше $y = \frac{x-a}{k}$ и ниже $y = -\frac{x+a}{k}$ то I мод - с "+", II мод - с "-"

$$a-x-ky + x-a-ky = 3$$

$$y = -\frac{1,5}{k}$$

Если точка ниже $y = \frac{x-a}{k}$ и выше $y = -\frac{x+a}{k}$ то оба с "-"

$$x-a+ky - x-a-ky = -3$$

$$x = -1,5 + a = 6$$

~~$$x = \frac{a}{k} - \frac{1,5}{k}$$~~

$$\frac{69}{76} = \frac{48}{48}$$

3 4 5 6 7 8

$$\begin{array}{r} 2048 \\ - 2052 \\ \hline 1540 \\ - 32 \\ \hline 1508 \end{array}$$

$$512 + 32 - 2048 - 4(2^2)^2 = 8$$

$$(2^1)^6 = 2^{12}$$