



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [4 балла] Ненулевые числа  $x, y, z$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения  $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$ , если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа  $n$  состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа  $n^3$ ?
3. [5 баллов] Окружность  $\omega$  с диаметром  $AB$  пересекает сторону  $BC$  остроугольного треугольника  $ABC$  в точке  $D$ . Точка  $F$  выбрана на отрезке  $AC$  так, что  $DF \perp AC$ , а  $E$  — точка пересечения отрезка  $DF$  с окружностью  $\omega$ , отличная от  $D$ . Найдите  $AF$ , если  $AC = 20$ ,  $AB = 15$ ,  $BE = 10$ .
4. [4 балла] В теленгрипе ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарику. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых корни уравнения  $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$  являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения  $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$  являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура  $\Phi$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют неравенству  $\left|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| + \left|y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leqslant 6$ . Фигуру  $\Phi$  непрерывно повернули вокруг начала координат на угол  $\pi$  по часовой стрелке. Найдите площадь множества  $M$ , которое замела фигура  $\Phi$  при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе  $BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  выбраны точки  $P$  и  $Q$  так, что  $AB = BP$ ,  $AC = CQ$ . Внутри треугольника  $ABC$  выбрана точка  $D$ , для которой  $DP = DQ$ , а  $\angle PDQ = 90^\circ$ . Найдите  $\angle DCB$ , если известно, что  $\angle DBC = 35^\circ$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                                       |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

δ1

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2 = z(z+4) \\ yz = 4x + x^2 = x(x+4) \\ zx = 4y + y^2 = y(y+4) \end{cases}$$

из системы переменных  
получим

$$x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 = xy \cdot yz \cdot zx = z(z+4) \cdot x(x+4) \cdot y(y+4)$$

т.к.  $x, y, z$  - конечные числа

$$x^2 y^2 z^2 = xyz(z+4)(y+4)(x+4) \Rightarrow xyz = (z+4)(y+4)(x+4)$$

$$(z+4)(y+4)(x+4) - xyz = 0$$

$$xyz + 4yzx + 4xz + 4yz^2 + 16x + 16y + 16z + 64 = 0 - xyz = 0$$

$$4yzx + 4xz + 4yz^2 + 16x + 16y + 16z + 64 = 0 \quad \text{из системы получим}$$

$$4(z^2 + 4z) + 4(y^2 + 4y) + 4(x^2 + 4x) + 16x + 16y + 16z + 64 = 0$$

$$4z^2 + 16z + 16z + 4z^2 + 32z + 4y^2 + 32y + 4x^2 + 32x + 64 = 0$$

$$4(z+4)^2 + 4(y+4)^2 + 4(x+4)^2 - 64 \cdot 3 + 64 = 0$$

$$4(z+4)^2 + 4(y+4)^2 + 4(x+4)^2 = 64 \cdot 3$$

$$(z+4)^2 + (y+4)^2 + (x+4)^2 = 16 \cdot 3 = 32$$

4.1.9



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

52

Заметим что число при  $n+1 = 10^{25000}$  m.e.  $n = 10^{25000} - 1$   $n^3 = (10^{25000} - 1)^3 = 10^{75000} - 3 \cdot 10^{50000} + 3 \cdot 10^{25000} - 1$

тогда рассмотрим где числа  $k, m$

$$k = 10^{75000} - 3 \cdot 10^{50000} \quad m = 3 \cdot 10^{25000} - 1$$

$$k+m = n^3$$

$$\text{тогда число } k = 10^{50000} (10^{25000} - 3) = 10^{50000} \underbrace{(99\dots 97)}_{24999}$$

m.e. это число быва

$$\underbrace{99\dots 9}_{24999} \underbrace{70\dots 0}_{50000}$$

аналогично

$$m = 2 \cdot 3 \cdot 10^{25000} - 1 = \underbrace{29\dots 9}_{25000} \text{ а т.к.}$$

последние 50000 цифр  $k$  являются нулями, а единица  $m$   $\overset{25000}{\overline{\dots}}$  то  $n^3 = k+m =$

$$= \underbrace{99\dots 9}_{24999} \underbrace{70\dots 0}_{25000} \underbrace{29\dots 9}_{25000}$$

m.e.  $n^3$  будет иметь 2

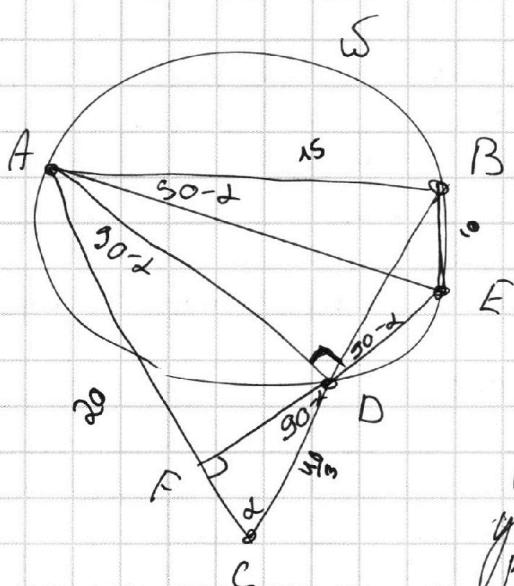
и 9999 - девяток в десятичной записи

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть  $\angle ACB = \alpha$

тогда из условия  
 $\angle DFC = 90^\circ$  т.е.

$$\angle FDC = 180^\circ - \angle DFC - \angle DCF = \\ = 30 - \alpha$$

$\angle FDC = \angle BDE$  как вертикальные  
 $\angle BDE = \angle BAE$  т.к.

отображаются на одну дугу  
такие замечания что  
углы одинаковы. на диаметр  
написан  $90^\circ$  т.е.  $\angle ADB = 90^\circ$  т.е.

именем с ними  $\angle ADF = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

т.е.  $\triangle CAD \sim \triangle ADF$  по 2 углам

(также  $\angle DAF = \angle CAD$  и  $\angle DFA = 90^\circ \Rightarrow \angle QDA = 90^\circ$ ) т.е.

$\angle ACD + \angle ADF = \alpha$  из подобия а  $\angle CAD = 180^\circ - (90^\circ + \alpha) = 90 - \alpha$   
по теореме синусов для окр.  $\omega$

$$\frac{AB}{\sin 90^\circ} = \frac{BE}{\sin 90 - \alpha}$$

$$\text{т.е. } AB = BE / \sin 90 - \alpha \Rightarrow \sin 90 - \alpha = \frac{BE}{AB} = \frac{2}{3} \text{ т.е.}$$

но с другой стороны  $\frac{CD}{\sin 90 - \alpha} = \frac{AC}{\sin 90^\circ}$  т.е.

$$\text{так } CD = \frac{2}{3} AC = \frac{12}{3} \text{ но тогда по теореме Пифагора } \\ AD^2 + CD^2 = AC^2 \text{ т.е. } AD^2 = AC^2 - CD^2 = 15^2 - 12^2 = 15 \cdot 15 - 12 \cdot 12 = 81 \text{ т.е.}$$

но и в 3 подобия  $\Rightarrow \triangle DAF \sim \triangle CAD$  следует что  $\frac{AD}{AF} = \frac{AC}{AD}$  син.

$$\text{т.е. } AD^2 = AF \cdot AC \text{ т.е. } AF = \frac{AD^2}{AC} = \frac{81}{15} = \frac{27}{5} = 5.4 \text{ т.е.}$$

$$\frac{5.4 \cdot AC^2}{5 \cdot AC} = \frac{5.4 \cdot AC}{5} = \frac{54}{5} \Rightarrow \text{OTBET}$$

еще дополнение

$$q = AC^2 - CD^2 = (AC - CD)(AC + CD) = \frac{1}{3} AC \cdot \frac{2}{3} AC = \frac{5}{9} AC^2$$

т.е.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$S_4$  (В вопросе ответила  $S_{28}$ )

Пусть  $S$ - кол-во коробок, тогда ~~пак.~~ пронумеруем шариками от 1 до  $3S$ , тогда всего расстановок шариков есть это 1ый шарик на одно из  $S$  мест II на одно из  $(S-1)$  и III на одно из  $(S-2)$ , т.е. всего имеем  $S(S-1)(S-2) = x$ , тогда посчитаем кол-во случаев, что в выбранных 5 есть 3 шарика I на 5 мест, II на 4 места, III на 3 места т.е.

$S \cdot 4 \cdot 3$  т.е. его вероятность выиграть составляет

$\frac{S \cdot 4 \cdot 3}{x}$ , аналогично посчитаем вероятность

выиграть сих 8 коробок т.е. среди выбранных 8, 3 шарика ( $S_{28}$  т.е. взять 3 коробки или можно) т.е. I на 8 мест II на 7 III на 6 т.е.

Вероятность выиграть  $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{x}$  т.е. вероятность уменьшилась в

$x \neq 0$

$$\frac{\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{x}}{\frac{S \cdot 4 \cdot 3}{x}} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{S \cdot 4 \cdot 3} = \frac{4 \cdot 7}{5} = \frac{28}{5} = \frac{56}{10} = 5,6 \text{ 4.5.9.}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

*55 продолжение*

25  $(a+1)(3a^3 - 5a^2 + 3a - 8)$  3 25  $\Rightarrow$  Т.к.  $D_1 > 0$ ,  $D_2 > 0$   
 $(\sqrt{D_1})^2 = D_1$ ,  $-\sqrt{D_2} = D_2$

225  $(3a^4 - 2a^3 + 23a^2 - 8) = a^6 - 2a^5 + a^4 + 16a^6 + 64$ .  
 $= 17a^6 - 2a^5 + a^4 + 64a + 32$   $\stackrel{51, -6, 3, 132, 36}{=}$

75a^4  $75a^4 - 50a^3 + 75a^2 - 8 = 51a^6 - 6a^5 + 3a^4 + 64a + 32$   $\stackrel{192a + 36}{=}$

$P = 51a^6 - 6a^5 - 72a^4 - 50a^3 + 75a^2 + 64a + 32 = 0$

заметим что  $\sqrt{24} \stackrel{3+\sqrt{5}}{>} \frac{3+\sqrt{14}}{2} > 2,5$

$3a^6 \geq 72a^4$   $18a^6 \geq 72a^4$   $7a^6 \geq \frac{50}{8}a^6 \geq 50a^3$   
 $m.e. a^6 \geq 72a^4$   $5a^6 \geq 5 \cdot 2^4 \cdot a^4 \geq 80a^2 \geq 75a^2$

$192a + 36 > 0$   $m.e.$   $\Rightarrow 7 + 5 + 18 + 3 = 33$   $m.e.$   
 $0 = P \geq 192a + 36 > 0$  противоречие

$m.e.$  таких  $a$  не существует

$a \in \emptyset$   $\square$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Возьмём  $a$  из. члены  
записав что  $f(x) = x^2 - (a^2 - a)x + \frac{a^2 - a}{2} = 0$   
тогда  $D_1 \neq$  (дискриминант 0, )  $D_1 = (a^2 - a)^2 - 4 \cdot \frac{a^2 - a}{2}$   
тогда  $y f(x)$  вида корни тогда и только тогда  
когда  $D_1 > 0$  и они имеют вид

$$\frac{\pm \sqrt{D_1} - (a^2 - a)}{2} = \frac{\pm \sqrt{D_1} + (a^2 - a)}{2} \text{ нал. сущна}$$

а)  $a_i$  все  $a_i$  - i-ий член прогрессии имеет разн  
тогда  $a_i = a_0 + id$  т.е.  $a_4 + a_5 = a_0 + 4d =$

$$= a_2 + a_7 \text{ тогда } \text{посчитали } a_4 + a_5 \text{ то}$$

$$\frac{-\sqrt{D_1} + (a^2 - a)}{2} + \frac{-\sqrt{D_1} + (a^2 - a)}{2} = \cancel{\frac{\sqrt{D_1} + (a^2 - a)}{2}} \text{ (исходя из условия в таком порядке)}$$

$$g(x) = 2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$$

$$(D_2 \text{ дискриминант} / \text{ аналогично} D_2 > 0)$$

$$D_2 = (a^3 - a^2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2a^6 - 8a - 4) =$$

$$= a^6 - 2a^5 + a^4 + 8(2a^6 + 8a + 4) \text{ тогда аналогично}$$

$$-\frac{\sqrt{D_2} - (a^3 - a^2)}{2 \cdot 2} \neq \frac{-\sqrt{D_2} - (a^3 - a^2)}{2 \cdot 2} = \frac{a^3 - a^2}{2}$$

$$a_2 + a_7 = \frac{a^3 - a^2}{2} = a^2 - a \text{ т.е. } a^3 - a^2 = 2a^2 - a$$

$$a^3 - 3a^2 + a = 0 \quad a(a^2 - 3a + 1) = 0$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ a^2 - 3a + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 5 \quad \text{т.е. корни}$$

$$\frac{\pm \sqrt{D} - (-3)}{2} \quad \text{т.е.} \quad \frac{\sqrt{5} + 3}{2}$$

$$\text{и} \quad \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

и. пропедевтическое



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

55

$$\begin{cases} a=0 \\ a \neq 2 \\ a = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ a = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\text{При } a=0 \\ 0 < D_1 = a^4 - 2a^3 + a^2 - \frac{(8-4a^3)}{3} = \\ = \frac{3a^4 - 2a^3 + 3a^2 - 8}{3} = \frac{-8}{3} < 0$$

$0 < 0$  — противоречие т. е.  $a=0$

$$3a^4 - 2a^3 + 3a^2 - 8 = (a+1)(3a^3 - 5a^2 + 8a - 8) \text{ m.e.}$$

$$D_1 = \frac{2(a+1)(3a^3 - 5a^2 + 8a - 8)}{3}$$

$$\text{При } a = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad a+1 = \frac{5-\sqrt{5}}{2} \text{ — псл.}$$

$$3a^3 - 5a^2 + 8a - 8 = \frac{(27(3-\sqrt{5})^3 - 10(3-\sqrt{5})^2 + 32(3-\sqrt{5}) - 64)}{8} = \\ = \frac{(27 - 9\sqrt{5} + 5 - 5\sqrt{5}) - 10(9 - 2\sqrt{5} + 5) + 32(3 - \sqrt{5}) - 64}{8} = \\ = \frac{27 + 45 - 32\sqrt{5} - \frac{140}{5} + 20\sqrt{5} + 96 - 32\sqrt{5} - 64}{8} = \\ = \frac{-44\sqrt{5} + 72 - 1820 + 96}{8} = \frac{-36 - 44\sqrt{5}}{8} = -0,6 - 5,5\sqrt{5} \text{ — отр.}$$

нах — отр. нах. — отр.  $m.e. \rightarrow D_1 > 0$  — противоречие

$m.e. \quad a = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$  — неотр.

$$d = |a_4 - a_5| = 2\sqrt{D_1} \quad 4t = \frac{25}{50d} d^2$$

$$5d = |a_7 - a_2| = 2\sqrt{D_2}$$

$m.e. \quad 25$

$25$

$$4D_2 = 25d^2 = 100D_1$$

$$D_2 = 25D_1$$

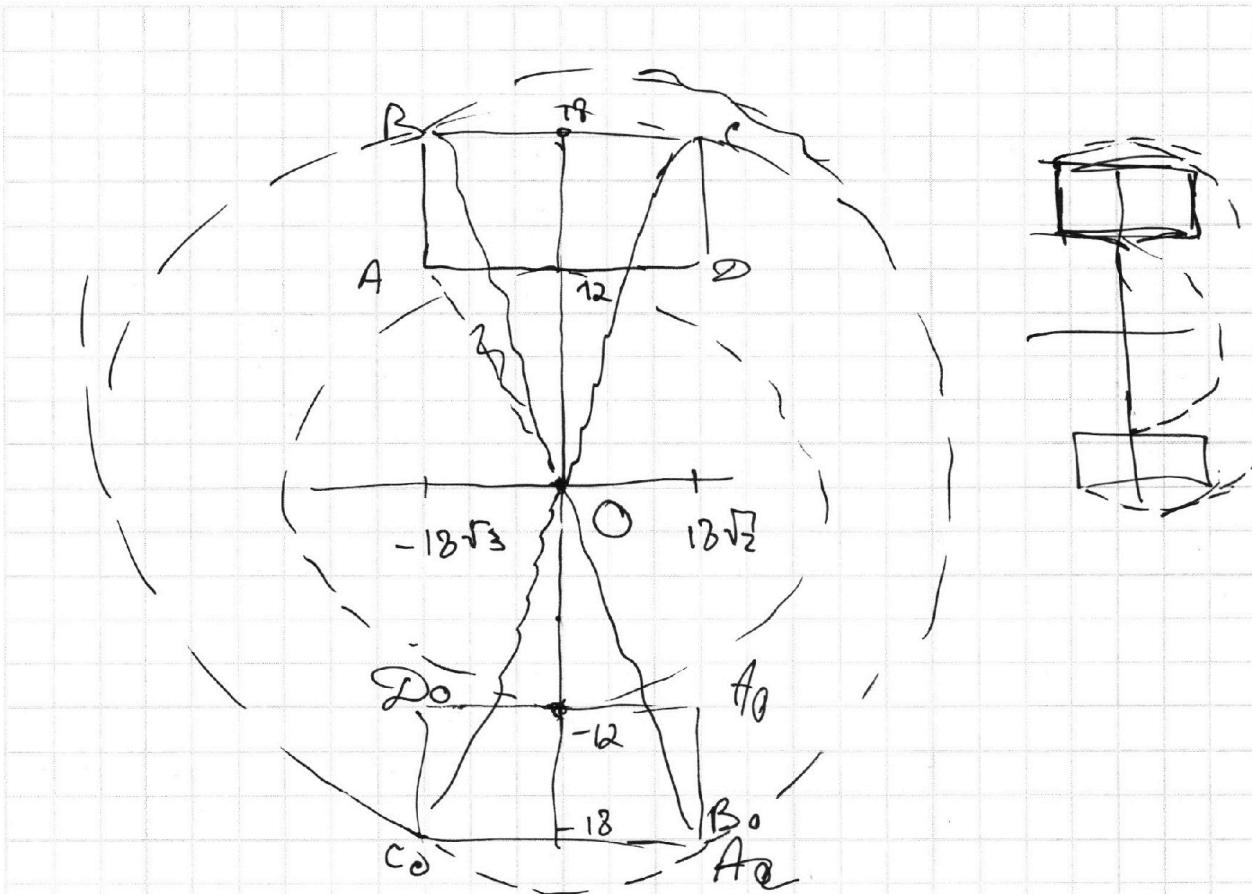


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
Ч ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Рассмотрим мин. расстояние до прямого гипотенузы т.е. пока прямогульник поворачивали она заходит мин тойкой прямой на окр. радиуса 12 и отсю  $\angle 90^\circ$

на окр. радиуса  $= \sqrt{18^2 + 18 \cdot 3} = 18$  (отсю  $\angle 30^\circ$  вершина)

т.е. то и если при  $\theta$  до  $30^\circ$  то  $B$  максимум  $30^\circ$  от

ней и она  $B$  т.е. от прямой наим близкой окр. — наим. маленькой ( $18$  и  $12$  радиусов)

см. продолжение

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
5 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

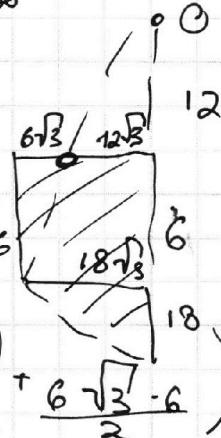


нужно 2 фигуры вот такого вида

а это сектор с углом  $30^\circ$   
т.к.  $\operatorname{tg} = \sqrt{3}$  нужно

поделить на подобные

треугольник с  $\frac{2}{3}$  нужно  
не начинать вычитать треугольник  
в прямоугольнике это



$$2 \left( \frac{\frac{30}{360}}{\pi} \cdot \pi \cdot 18^2 - \left( \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot \frac{144\sqrt{3}}{2} + \frac{6\sqrt{3}}{2} \cdot 6 \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{6} \pi \cdot 18^2 - 144\sqrt{3} + 36\sqrt{3} =$$

$$\approx 18\sqrt{3} - 108\sqrt{3} \quad \text{нужно брать / пока не открыта окраина}$$

$$-\pi \cdot 12^2 + \pi \cdot 18^2 = \pi \cdot 6 \cdot 30$$

$$180\pi + 216\pi - 108\sqrt{3} = 288\pi - 108\sqrt{3}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 6 продолжение

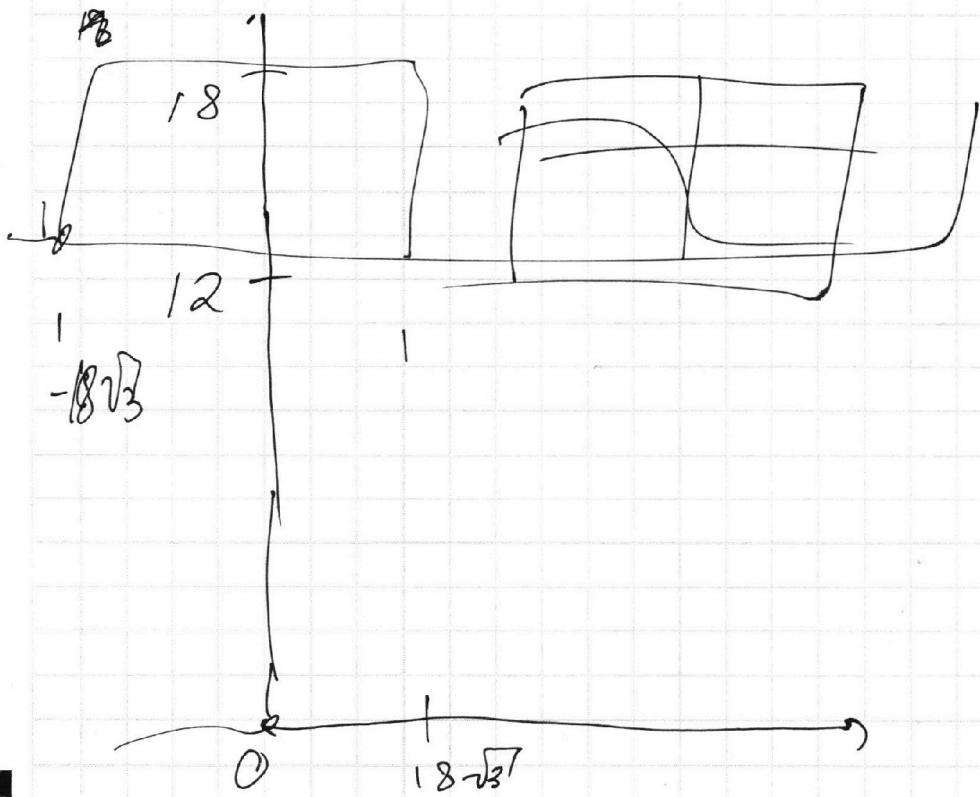
��ещадь  $M$ , что замена фигура, сейчас  
постанови  $A \rightarrow C, B \rightarrow D, C \rightarrow A; D \rightarrow B$

ищ а тогда наиб. отрезки из  $OB\phi$  это  
по теор. ~~диагонала~~  $OA, OB, OC, OD$  они

~~равны тк - пропорциональны т.е.~~

~~никаких точек дальше окр. с этии  
радиусом~~

см. продолжение



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

## №6 предварительное

м.р.

В  $|x_1 - y_1|$  и  $|x_1 + y_1|$  в основании пишите сумма модулей ~~и~~ ~~и~~ ~~и~~ знаки одинаковых а в другом разности ~~и~~ т.е. с таким же знаком что и в сумме остается тот модуль что больше (речь про разность и раскрытие ~~факты~~ ~~одинаковых~~ модулей) ~~а~~ ~~и~~ ~~и~~ модули это  $|x_1|$  и  $|y_1|$  т.е. если  $|x_1| > |y_1|$  то  $|x_1| \leq 6$  т.е.  $|x_1| \leq 3$  т.е.  $|y_1| \leq x_1 \leq 3$ , аналогично если  $|y_1| \geq |x_1|$  то

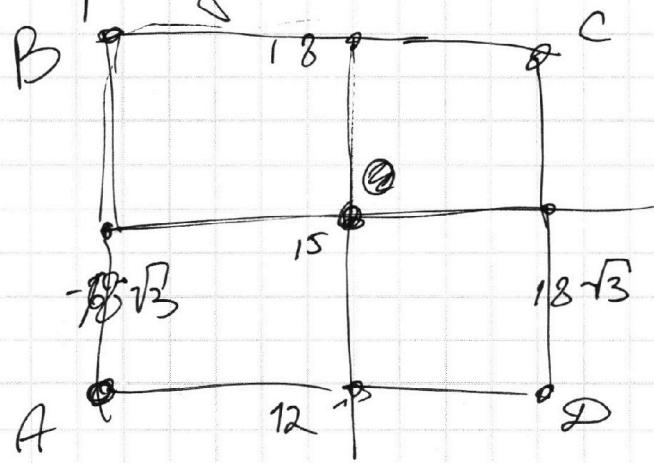
$3 \geq |y_1| \geq |x_1|$  т.е.

$$\begin{cases} |x_1| \leq 3 \\ |y_1| \leq 3 \end{cases} \quad \begin{cases} |\frac{x}{6\sqrt{3}}| \leq 3 \\ |y - 15| \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -18\sqrt{3} \leq x \leq 18\sqrt{3} \\ 12 \leq y \leq 18 \end{cases}$$

т.е. у нас фигура

это прямоугольник



см. в Решение

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} y - 15 &= y_1 \\ \frac{y - 15}{67^3} &= x_1 \end{aligned}$$

№6

~~мога~~

$$\text{мога } |x_1 - y_1| + |x_1 + y_1| \leq 6$$

~~так~~ т.к. левая часть модули то  
она не отр.  
так как може. раскроется ~~один~~

мога рассмотрим случай

$$x_1 - y_1 < 0 \quad x_1 + y_1 < 0$$

~~т.к. неотр.~~

$$|x_1 - y_1| + |x_1 + y_1| = |2x_1| = |2x_1|$$

$$x_1 - y_1 < 0 \quad x_1 + y_1 > 0$$

$$|x_1 - y_1| + |x_1 + y_1| = |-x_1 + y_1| + x_1 + y_1 = |2y_1| = |2y_1|$$

$$x_1 - y_1 > 0 \quad x_1 + y_1 < 0$$

$$|x_1 - y_1| + |x_1 + y_1| = |x_1 - y_1| - |x_1 - y_1| = |2y_1|$$

$$x_1 - y_1 > 0 \quad x_1 + y_1 > 0$$

$$|x_1 - y_1| + |x_1 + y_1| = |x_1 - y_1 + x_1 + y_1| = |2x_1|$$

т.е. каждый раз получается

или  $|2y_1|$  или  $|2x_1|$  значит что

$|2y_1|$  получается тогда когда  $|y_1| \geq |x_1|$

$|2x_1|$  получается тогда когда  $|x_1| \geq |y_1|$

и. превышение



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

### 57 продолжение

тогда заметим что т.к.  $\Delta P = \Delta Q$  это чл.  
~~в условии~~ на ср  $D = \text{чл}$   $\angle QDP = 90^\circ$  чл  
 $\Delta DPQ - \text{р.ч.}$  т.е.  $\angle DQP = \angle DPQ = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$  т.е.  
 т.  $D$  это перп. прямых <sup>из точек  $P, Q$</sup>   $\angle QDP = 45^\circ$  к  $BC$   
 (она единственная) но заметим что т.  $O$  это  
 также аналогично пересечения этих же  
 прямых т.е.  $O$  совпадает с  $D$  тогда  $D -$   
 точка incentr  $\Delta ABC$  т.е.  $\angle DBA = \sum \angle BAC = 35^\circ$   
 $\angle ABC = 70^\circ$  т.е.  $\angle ACB = 180^\circ - 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$   
 т.к.  $D$ -инцентр то  $\angle DCB = \frac{1}{2} \cdot \angle ACB = 10^\circ$  чл. чл  
 ответ:  $10^\circ$



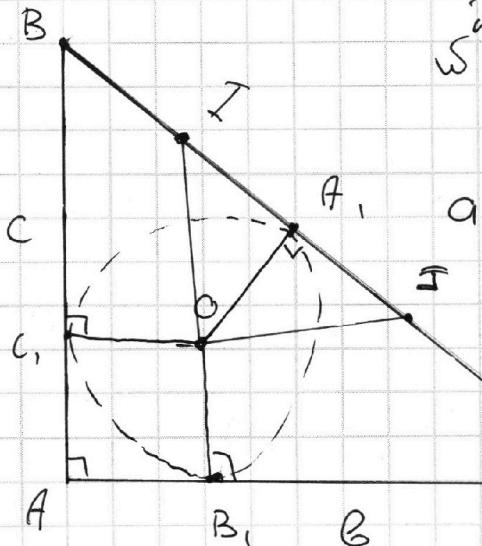
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

57



Проведена вписанная окр.  $\triangle ABC$  с центром  $O$

т.к. окр. впис.  $\angle A, O \perp BC$

$\angle OCB = \angle OBC$

$\angle OBA = \angle OCA$

тогда пусть пусть

$$AB = c$$

$$BC = a$$

$$CA = b$$

тогда, засим что

$OC = OB = r$  - радиус вписанной

окр.

$$\angle OCB = \angle OCA = \angle ABO = \angle ABC = 90^\circ$$

$$\text{т.е. } \angle OBC = 360^\circ - 270^\circ = 90^\circ$$

т.е.  $AC, OB$  - прямоугольник с

равными смежными сторонами т.е. квадрат  
т.е.  $OC = CB = AB = AC$ , но заметим т.к.  $B, C$ ,  
точки касания вписанной то  $AC = AB = \frac{a+b-c}{2}$

$$\text{т.е. } r = \frac{a+b-c}{2} \text{ т.е. } AB = OC = r,$$

пусть  $A, I = A, J = r = \frac{a+b-c}{2}$   $J$  - на дуге  $AC$   $I$  на дуге

$A, B$  тогда  $IOJ$  - прямоугольный треугольник

т.к. медиана равна половине стороны  $OA = IA = JA$ ,  
также заметим что  $OA + BC$  т.е.  $OA$  - высота и медиана  
в  $\triangle IOJ$  т.е.  $IOS$  р.10. т.е.  $IO = JO$  также

заметим т.к. точка  $A$ , это точка  
касания с прямой  $BC$ , то  $CA = \frac{a+b-c}{2}$ ,  $q$

$$BA_1 = \frac{a+c-b}{2} \text{ тогда отрезки}$$

$$BJ = BA_1 + AJ = \frac{a+c-b}{2} + r = \frac{a+c-b}{2} + \frac{a+b-c}{2} = \frac{AB}{2} \text{ т.е.}$$

точка  $J$  совпадает с точкой  $P$  т.к.

$BP = BA = BS$  аналогично  $CI = CA_1 + A_1I =$

$$= \frac{a+b-c}{2} + \frac{a+c-b}{2} = \frac{a+c-b}{2} = \frac{AC}{2} \text{ т.е. } I \text{ совпадает с } Q$$

см. продолжение

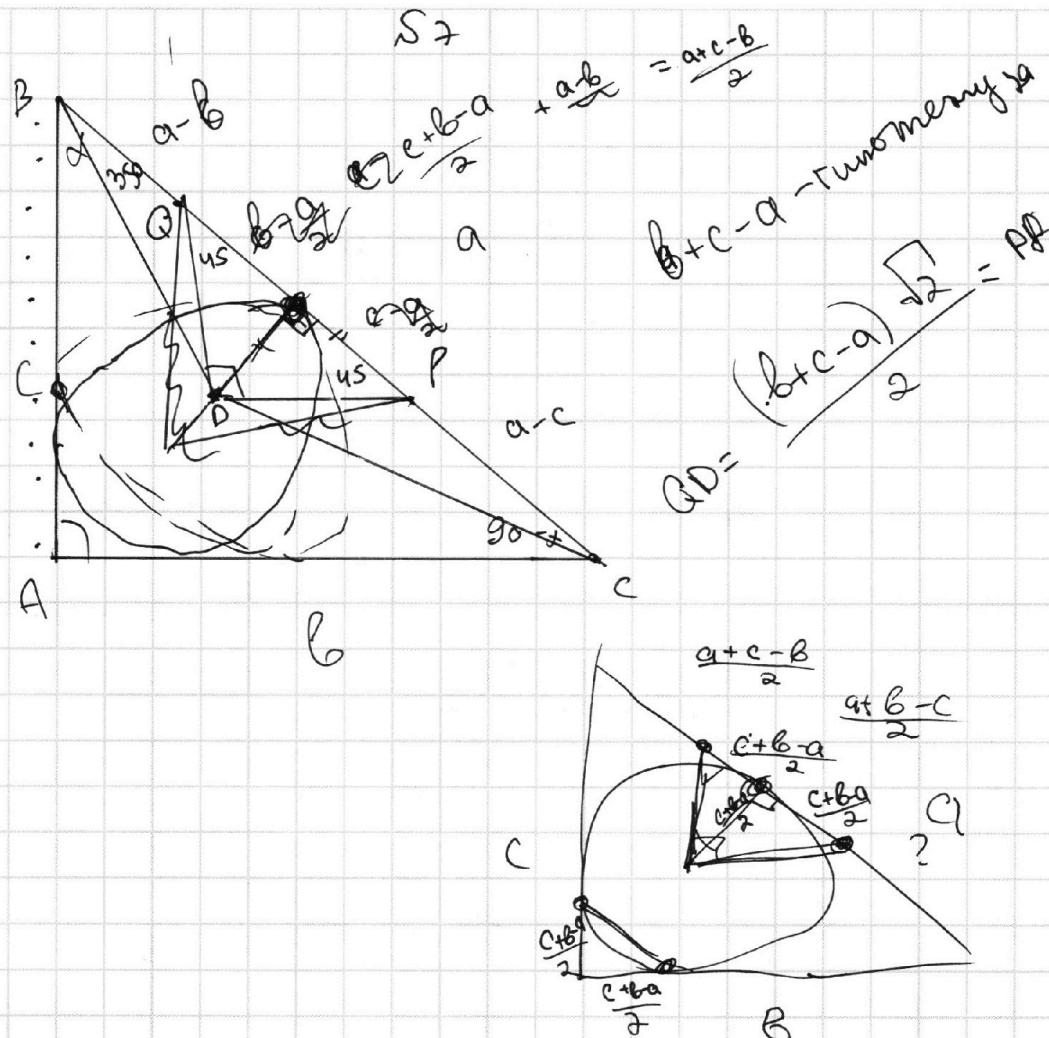


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$3 \cdot 8 - 5 \cdot 4 + 16$$

$$\frac{11}{24} - 20$$

$$6,2 \quad 7,8$$

10

14

$$\begin{array}{r} 10+6,2=16 \\ \hline 16,2 \\ \textcircled{8,4} \\ 4,2 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

56 Чертёж

$$|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}| + |y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}| \leq 6$$

$$\left| \frac{x}{6\sqrt{3}}(y - 15) \right| \leq 6 \quad \begin{aligned} \frac{\pm(y - 15)}{6\sqrt{3}} &\leq 3 \\ \pm \frac{x}{6\sqrt{3}} &\leq 3 \end{aligned}$$

202

100 4

$$\begin{aligned} \text{так } |y - 15| &\leq 3 \\ \left| \frac{x}{6\sqrt{3}} \right| &\leq 3 \end{aligned}$$

$$CD^2 = AC^2 \cdot \sin 90^\circ = 400$$

$$AD^2 = AC^2 - CD^2$$

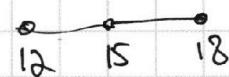
$$(AD - CD)(AD + CD)$$

$$\cancel{B} \left( \frac{1}{3} AC \right) \left( \frac{5}{3} AC \right) =$$

$y_1 - x_1$

$$|x_1| \leq 6\sqrt{3} \quad |y - 15|$$

$y_1 + x_1$



$$12 \leq y \leq 18$$

$$-6\sqrt{3} \leq x \leq 6\sqrt{3}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{array}{l} xy = 4z + z^2 \\ y^2 = 4x + x^2 \\ zx = 4y + y^2 \end{array} \right. \quad \text{Черновик}$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{c} + \\ - \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{r} 999999999 \\ \hline 249999 \end{array} \\
 \begin{array}{r} 003 \\ \hline 300000 \end{array}
 \end{array}$$

999 - 97000003  
24989      ~~50000~~ 9999  
1      1  
25000  
1      1  
25000  
25000  
50001      1000  
~~noz~~ 0



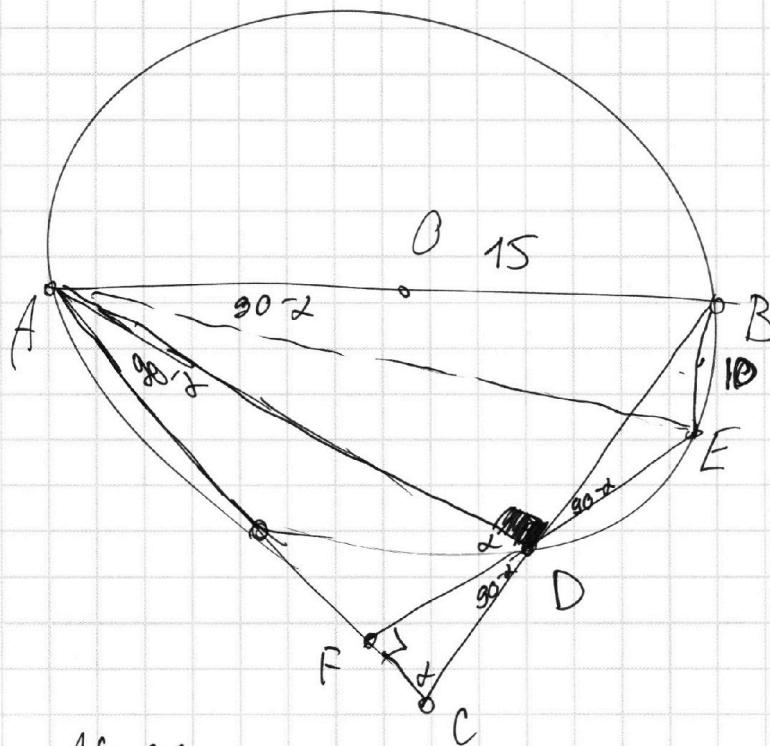
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

53



$$AC = 20 \quad AB = 15$$

$$BF = 10$$

$$\sin 90^\circ = \frac{1}{3}$$

$$CD = x$$

$$AC = 3x^2$$

$$AD^2 = AC^2 - CD^2 = 8x^2$$

$$AF \cdot AC = AD^2$$

$\alpha$  известно

$$AD^2 = AF \cdot AC$$

m.e.

$$\frac{AB}{\sin 90^\circ} = 2R$$

$$2R = \frac{10}{\sin BAE}$$

$$\sin BAE = \frac{1}{3}$$

$$3x \cdot AF = 8x^2$$

$$AF = \frac{8}{3}x$$

$$2 \frac{2}{3}x = ?$$

$$\frac{16x}{3}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow 5 \\ -\sqrt{a^2 - a} \quad \sqrt{2-a^3} \end{matrix}$$

$$2x^2 - (a^3 - a^2)x + (-2a^6 - 8a - 4) = 0 \quad \begin{matrix} \text{--} 2 \cdot \sqrt{a^2 - a} \\ 708 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} D &= a^4 - 2a^3 + a^2 - \frac{4(2-a^3)}{3} = \frac{3a^4 - 6a^3 + a^2 - 8 - 4a^3}{3} = \frac{3a^4 - 10a^3 + a^2 - 8}{3}, \\ &= \frac{3a^4 - 10a^3 + a^2 - 8}{3} > 0 \quad 2a^4 - 2a^3 + a^2 - 8 > 0 \\ &\quad \sqrt{D} \approx \sqrt{3a^4 + 6a^3 + 3a^2} \end{aligned}$$

$$D_2 = (a^3 - a^2)^2 - 4(-2a^6 - 8a - 4) \cdot 2 = (a^6 - 2a^5 + a^4) + 16a^6 + 64a^4 + 32$$

$$\frac{\pm \sqrt{D_2}}{2} = \frac{\pm \sqrt{16a^6 + 64a^4 + 32}}{2} = \frac{\pm \sqrt{16(a^6 + 4a^4 + 2)}}{2} = \frac{\pm 4\sqrt{a^6 + 4a^4 + 2}}{2}$$

$$\text{от} \quad \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2(a^3 - a^2)}{2 \cdot 2} = \frac{2(a^2 - a)}{2}$$

$$a^3 - a^2 = 2a^2 - a$$

$$a(a^2 - 3a + 1) = 0$$

$$\begin{cases} a = 0 & \text{недр.} \\ \frac{a + \sqrt{5} + a^3}{2} \end{cases}$$

$$\frac{-\sqrt{5} + 3}{2}$$

$$\begin{aligned} &D = 9 - 4 = 5 \\ &\pm \sqrt{5} \end{aligned}$$

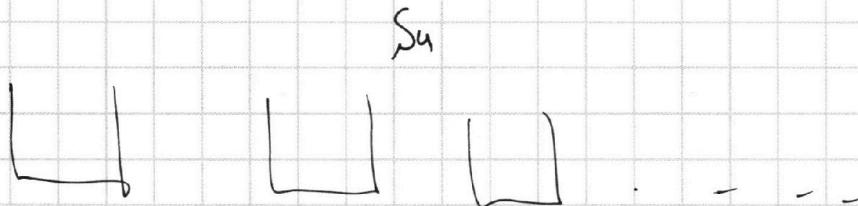


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



5 - кол. - во коробок

$$\text{C} \quad \frac{5(5-1)(5-2)}{3!} - \text{всего - случаев}$$

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} - \text{внешни 5}$$

$$\frac{2 \cdot 7 \cdot 8}{3!} - \text{внутри}$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3} - \text{остаток?}$$

$$= \frac{4 \cdot 7}{5} = \frac{28}{5} = 5,6$$