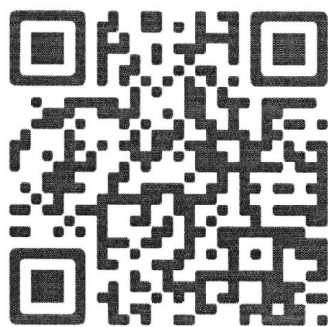




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2, \\ yz = -2x + x^2, \\ zx = -2y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

- ✓ 2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 30 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
- ✓ 3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 8$, $BE = 6$.
4. [4 балла] В теленгре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть семь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$ являются четвертым и девятым членами этой прогрессии.
- ✓ 6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| + \left|x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| \leq 4$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
- ✓ 7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle BCA = 50^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N=2

$$n = \underbrace{999 \dots 99}_{30001 \text{ цифр}} = 10^{30001} - 1$$

$$n^3 = (10^{30001} - 1)^3 = 10^{90003} - 3 \cdot 10^{60002} + 3 \cdot 10^{30001} - 1 = \cancel{10^{90003}} - \cancel{3 \cdot 10^{60002}}$$

~~Будет 17 цифр, так как порчуется цифра 9~~
~~100...070...0300...0~~

$$10^{90003} - 3 \cdot 10^{60002} = \underbrace{9999 \dots 9}_{29999} \underbrace{7000 \dots 0}_1 = X$$

$$X + 3 \cdot 10^{30001} = \underbrace{99 \dots 9}_{29999} \underbrace{70000 \dots 0}_1 \underbrace{30000 \dots 0}_1 \underbrace{0000 \dots 0}_{30001} = Y$$

$$Y - 1 = \underbrace{999 \dots 9}_{29999} \underbrace{70000 \dots 0}_1 \underbrace{29999 \dots 9}_{30001}$$

т.е. всего получится $29999 + 30001 =$
 $= \boxed{60000}$

Ответ: 60000



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда $\frac{AE}{AD} = \frac{\sqrt{28}}{AD} = \frac{4}{5}$, т.е. $AD = \frac{5\sqrt{28}}{4} = \frac{5\sqrt{7}}{2}$

Как мы помним, $\frac{BE}{DF} = \frac{AB}{AD}$, т.е.:

$$\frac{6}{DF} = \frac{8}{\frac{5\sqrt{7}}{2}} \quad DF = \frac{15\sqrt{7}}{8}$$

Тогда $AF^2 = AD^2 - DF^2 = \frac{25 \cdot 7^{16}}{4} - \frac{225 \cdot 7}{64} =$
 $= \frac{25 \cdot 7(16 - 9)}{64} = \frac{5^2 \cdot 7^2}{8^2}$

т.е. $AF = \left(\frac{35}{8} \right)$

Ответ: $\frac{35}{8}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

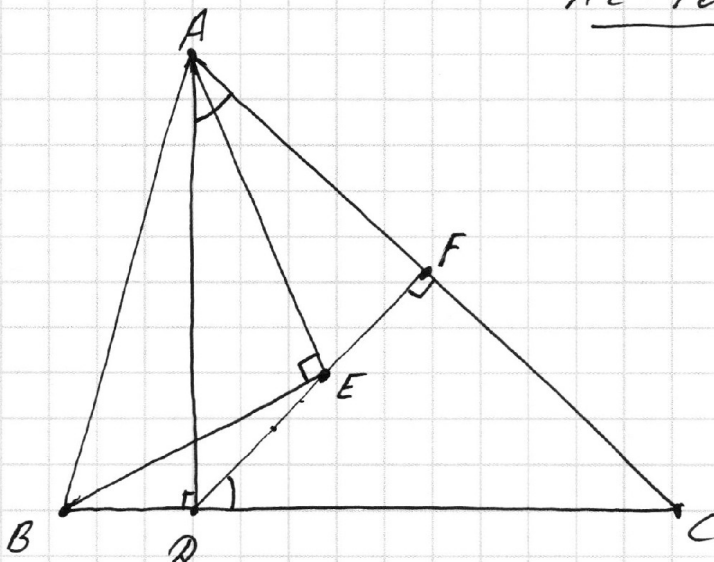
1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

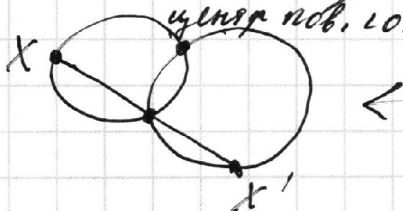
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N = 3

$$\begin{array}{l} AC = 10 \quad AB = 8 \quad BE = 6 \\ AF = ? \end{array}$$



Пусть $\angle FDC = \angle$. Тогда $\angle FCD = 90^\circ - \angle$, т.е. $\angle DAC = 90^\circ - (90^\circ - \angle) - \angle$. Тогда окружность (DAF) касается DC . $O(DAF) = \varphi$. Рассмотрим пов. гомотетию, которая $D \mapsto \varphi$. При такой пов. гомот. $B \mapsto D$, т.к. BD касается φ , а $E \mapsto F$ (образы при пов. гомот. окружностей касаются в центре пов. гомот.).



Тогда $\triangle BAE \sim \triangle DAF$.

$$\frac{BE}{DF} = \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AF}$$

Но $\triangle DAF$ также $\sim \triangle CAD$, а т.е. $\triangle BAE \sim \triangle CAB$.

$$\frac{AB}{AC} = \frac{8}{10} = \frac{AE}{AD}$$

$$AE^2 = AB^2 - BE^2 = 64 - 36 = 28$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - 2a)x + (a^2 - a - 7) = 0$$

$$\begin{aligned} D &= (a^2 - 2a)^2 - 4(a^2 - a - 7) = \\ &= a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 4a^2 + 4a + 28 \geq 0 \end{aligned}$$

$$a^4 - 4a^3 + 4a + 28 \geq 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 4

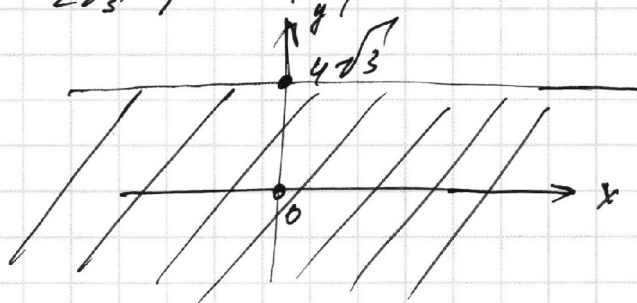
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left| x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} \right| + \left| x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} \right| \leq 4$$

1кл.)

$$\left(x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} \right) - \left(x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} \right) \leq 4;$$

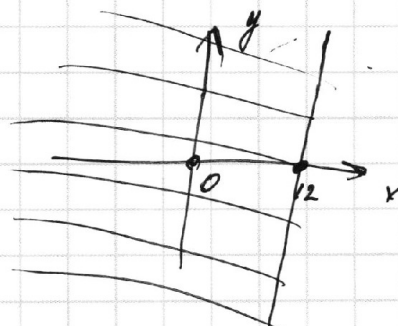
$$\frac{y}{\sqrt{3}} \leq 4;$$
$$y \leq 4\sqrt{3}.$$



$$2кл.) \left(x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} \right) + \left(x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} \right) \leq 4;$$

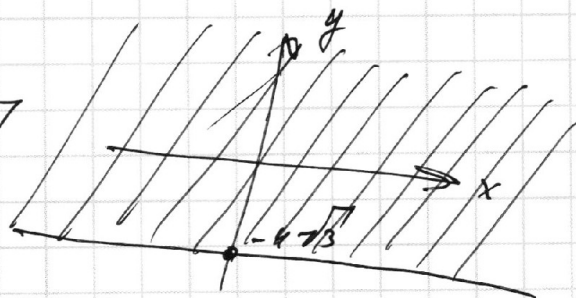
$$2x - 20 \leq 4;$$

$$x \leq 12.$$



$$3кл.) - \left(x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} \right) + \left(x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} \right) \leq 4;$$

$$-\frac{y}{\sqrt{3}} \leq 4;$$
$$y \geq -4\sqrt{3}.$$





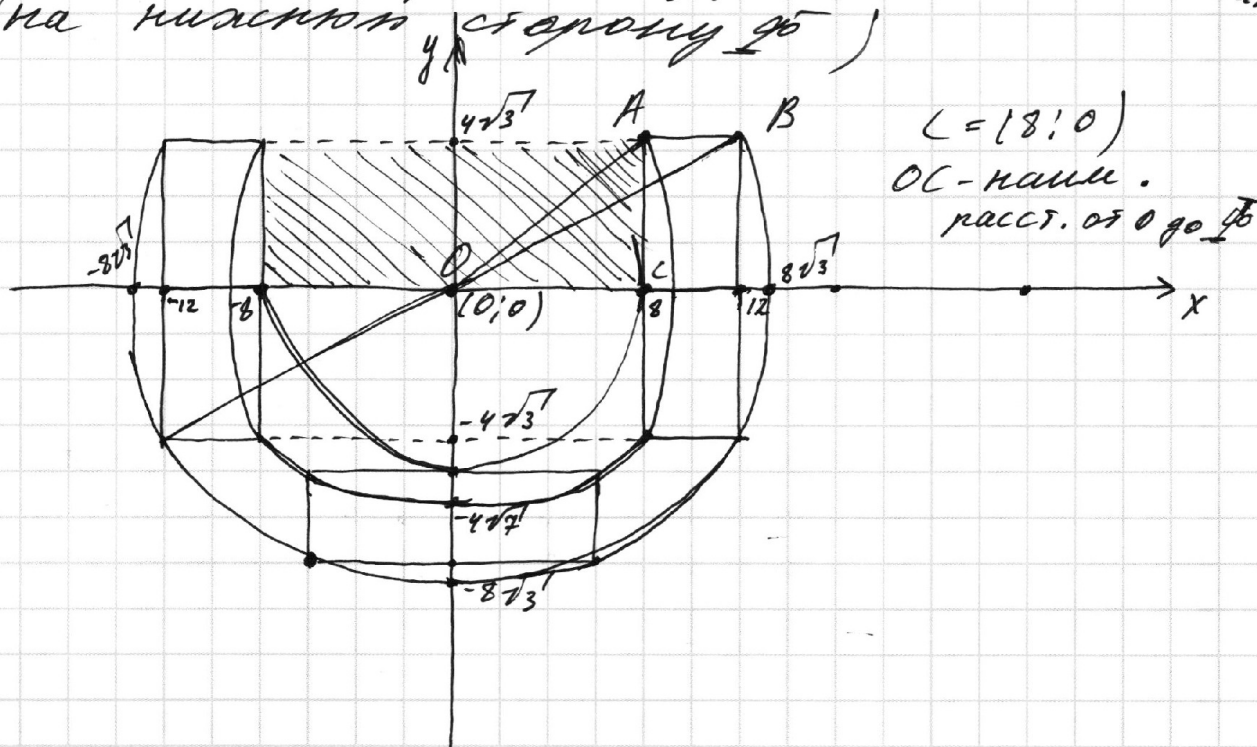
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

не найдётся, т.к. расстояние от $(0;0)$ до B - наибольшее из всех расстояний от $(0;0)$ до Φ (это правда, т.к. OB - наиб. накл. на правую сторону прямоугольника Φ , но так как все и наиб. накл. на левую сторону Φ)



$$OB^2 = 144 + 48 = 192 = (8\sqrt{3})^2$$

Тогда уравнение траектории B (но с поворотом на 2π):

$$x^2 + y^2 = 192$$

$$OA^2 = 64 + 48 = 112 = (4\sqrt{7})^2$$

Тогда уравнение траектории

$$A \text{ с повор. на } 2\pi: x^2 + y^2 = 112$$

Короче говоря, нам надо найти S_1 сегмента большой окр. и S_2 сегмента малой окр. ($x^2 + y^2 = 64$) и вычесть из S_1 , S_2 , а также $-S_3$ прямоуго, закр.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

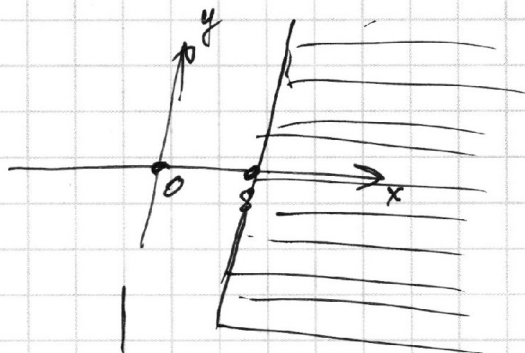
СТРАНИЦА
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

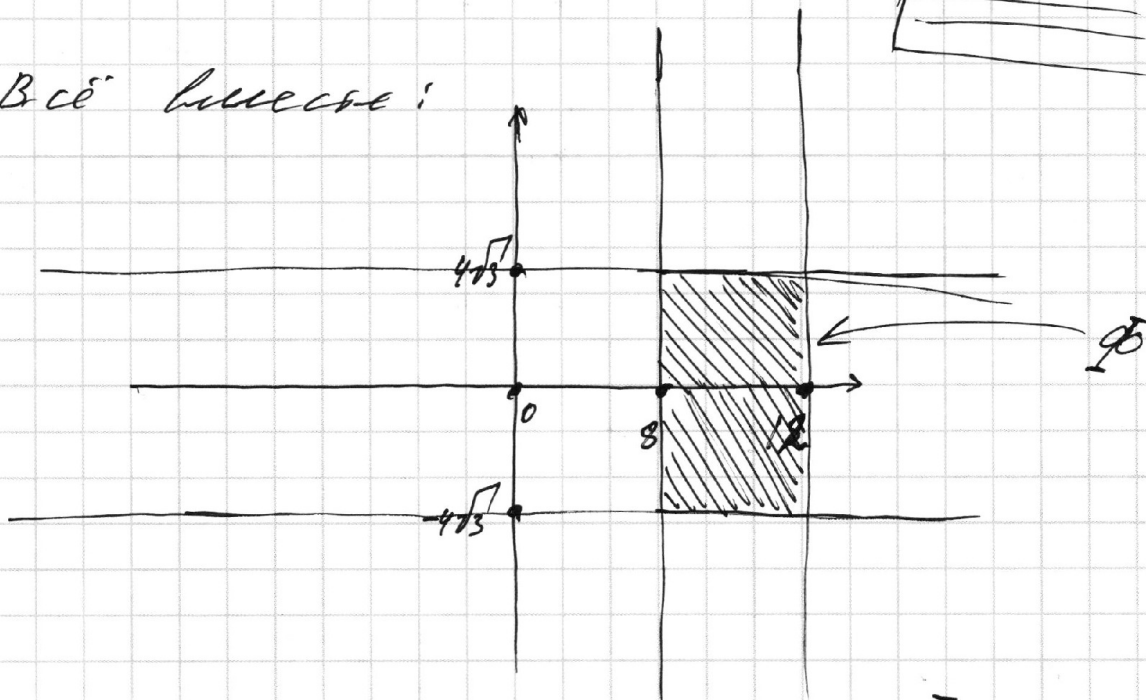
$$4\sqrt{3}) - (x - 10 + \frac{4}{2\sqrt{3}}) - (x - 10 - \frac{4}{2\sqrt{3}}) \leq 4;$$

$$-2x + 20 \leq 4;$$

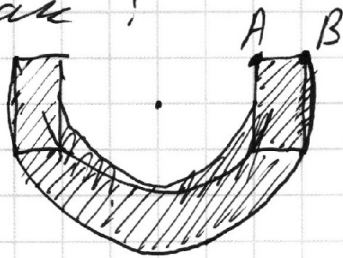
$$x \geq 8.$$



Всё вместе:



Каждая точка ~~на траектории~~ Φ при повороте будет ехать (непрерывно двигаться) по окружности с центром $(0;0)$ и радиусом $= r(0;0)$; ~~на траектории~~ $r(0;0)$. Тогда схематически множество M выглядит так:



где нижняя дуга-траектория B, а верхняя - траектория A

Понятно, что нижняя траектория B точек



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\angle O B P O X \angle (O X; O B) = \arctg \frac{4\sqrt{3}}{12} = \arctg \frac{\sqrt{3}}{3}$
тогда вся фигура = $192\pi + 2 \arctg \frac{\sqrt{3}}{3}$

$S_1 = \cancel{576\pi} \quad 192\pi \cdot \frac{192\pi + 2 \arctg \frac{\sqrt{3}}{3}}{2\pi}$

$S_2 = \frac{64\pi}{2} = 32\pi \quad S_3 = 16 \cdot 4\sqrt{3} = 64\sqrt{3}$

тогда $S_{\text{ит}} = 192\pi \cdot \frac{192\pi + 2 \arctg \frac{\sqrt{3}}{3}}{2\pi} -$
 $- 32\pi - 64\sqrt{3}$

(*)

ответ: (*)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА
 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7 (продолжение)

Тогда $\angle APC = 360^\circ - 90^\circ - 160^\circ = 110^\circ$, а $\angle AQB = 360^\circ - 90^\circ - 155^\circ = 115^\circ$. Тогда $\angle BAC = 180^\circ - 40^\circ - 115^\circ = 25^\circ$, а $\angle PAC = 180^\circ - 50^\circ - 110^\circ = 20^\circ$. Тогда $\angle QAP = 90^\circ - 25^\circ - 20^\circ = 45^\circ$, что означает, что $QAPC$ - вписанный, при этом центр этой окр. - это D , потому что $DQ = DP$ и $\angle QDP = 90^\circ$, что в 2 раза $\angle QAP$. (если это не очевидно, то можно сказать так: D - середина QP . Тогда центром нашей окр. должна быть такая точка, что $\angle QDP = 90^\circ$, но такая точка единственная)

$\angle APQ = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$, тогда $\angle ADQ = 70^\circ$. $\angle = 140^\circ$. Тогда $\angle DAQ = \angle DQA = \frac{180^\circ - 140^\circ}{2} = 20^\circ$. $\angle BAD = \frac{25^\circ + 20^\circ}{2} = 45^\circ$, а $\angle BQD = \frac{115^\circ + 20^\circ}{2} = 135^\circ$, что означает вписанность $ADQB$, т.е. $\angle QBD = \angle QBC = \angle QAD = 20^\circ$

Ответ: 20°



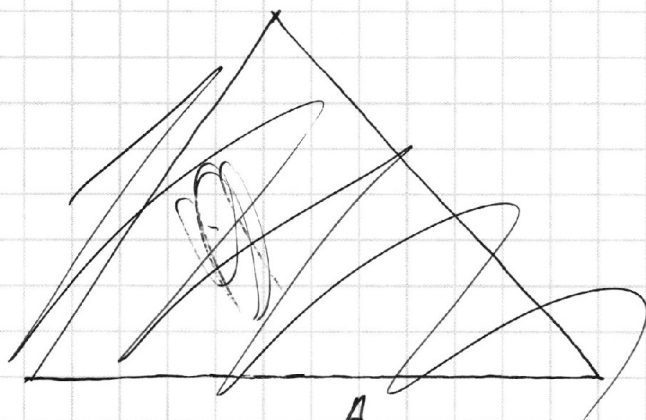
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$N = 7$

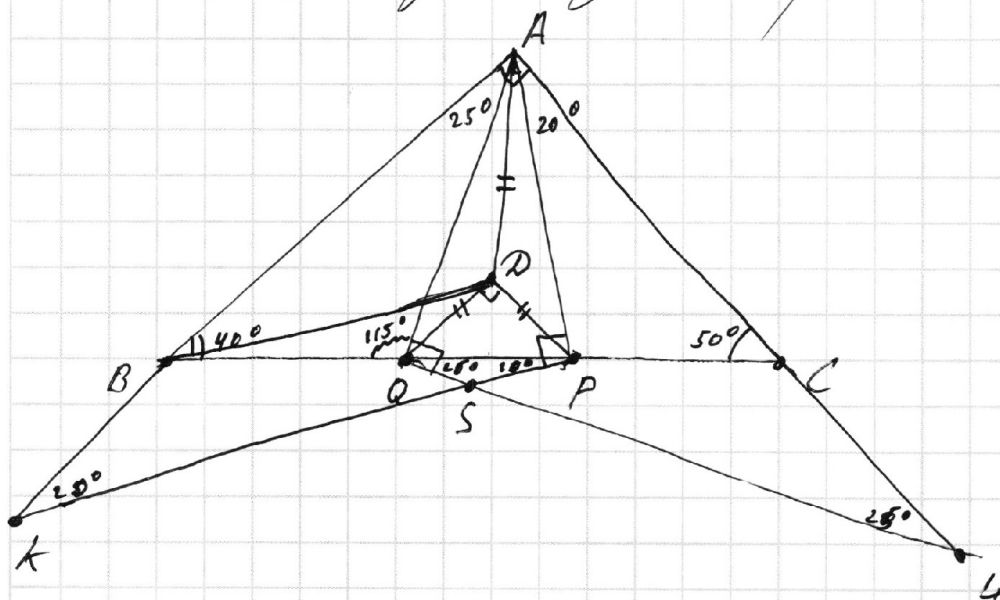


$$AB = BP$$

$$AC = CQ$$

$$\angle C = 50^\circ$$

$$\angle DBC = ?$$



Сделаем незамысловатое геом. построение: отразим A , отн. C и отн. B , получив точки L и K соотв-но. Тогда $AC = CL = CL$, т.е. в $\triangle ACL$ медиана - половина стороны $\Rightarrow \angle ACL = 90^\circ$. Аналогично замечая, что $\angle ACK = 90^\circ$. Рассчитаем углы: $\angle LCL + \angle CLC = 50^\circ$, $\angle LCL = \angle CLC = \frac{50^\circ}{2} = 25^\circ$. $\angle BKP + \angle BPK = 40^\circ$, $\angle BKP = \angle BPK = 20^\circ$. $QL \cap KP = S$. $\angle QSP = 180^\circ - 20^\circ - 25^\circ = 135^\circ$, т.е. $\angle QSP$ и смежных с ним $= 45^\circ$. Рассчитаем $\angle LSPC$ и $\angle BQS$ по $\Sigma \angle$ в $4x4$. $SPCL$ и $KBSQ$ соотв-но. $\angle LSPC = 360^\circ - 25^\circ - 130^\circ - 45^\circ = 160^\circ$. $\angle BQS = 360^\circ - 45^\circ - 20^\circ - 140^\circ = 155^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть коробок всего k . Тогда изм.
 $P(\text{выигрыша}) = \frac{C_n^2 k}{C_n^5}$

Значо
+970
х70
у70
00000
у770

всего
событий

Аналог.

событий
т.е. мы фиксиру-
ем 3 коробка, обя-
зательные для выиг-
рыша, а ещё выбо-
рать можно C_n^2 сп-ми.

Если же он мог бы выбрать 7
коробок, то $P(\text{выигрыша}) =$

$$\frac{C_n^4}{C_n^5}$$

по аналог. принци-
пам

$$\frac{C_n^4}{C_n^5}$$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-4)}{4!}$$

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

$$(a^3 + 7)(a - 4)$$

$$a^4 - 4a^3 + 7a - 28$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

