



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = -6y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x - 6)^2 + (y - 6)^2 + (z - 6)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 20 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 10$, $BE = 9$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарик. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть девять коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$ являются пятым и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| + \left|y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| \leq 8$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle CBA = 46^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
5 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2

Представим число в виде

$$n = \underbrace{100 \dots 0}_{20001} - 1$$

$$n^3 = \underbrace{100 \dots 0}_{20001}^3 - 3 \underbrace{100 \dots 0}_{20001}^2 + 3 \underbrace{100 \dots 0}_{20001} - 1 =$$

$$= \underbrace{100 \dots 0}_{60003} - \underbrace{300 \dots 0}_{40002} + \underbrace{300 \dots 0}_{20001} - 1$$

$$\underbrace{100 \dots 0}_{20001-2} \quad \uparrow \quad \underbrace{97000 \dots 0}_{40002} \quad + \quad \underbrace{30000}_{2001} \quad - 1$$

первое

будет второе на конце

Ответ: 2

$$1 \underbrace{000}_{x} \underbrace{97000}_{y} \underbrace{3000}_{z} - 1$$

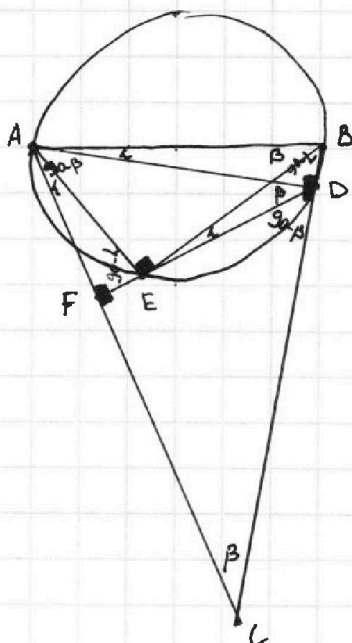


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☒4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача N3



AC = 20

AB = 10

BE = 8

AF = ?

0) Построим вспомогательные отрезки AE и AD

1) $\angle AEB = 90^\circ$ тк опирается на диаметр.2) Обозначим $\angle FAE = \alpha$. Тогда $\angle AEF = 90 - \alpha$,

$$\angle BED = 180 - 90 - (90 - \alpha) = \alpha$$

 $\alpha = \angle BAD = \angle BED$ как опирающиеся на одну дугу.3) $\angle ADB = 90^\circ$ тк тоже опирается на диаметр $\Rightarrow$

$$\angle ADC = 90^\circ; \angle ABD = 90 - \alpha$$

4) $\triangle AEF \sim \triangle ABD$ $\frac{AF}{AD} = \frac{AE}{AB}$ (*)

5) Обозначим $\angle C = \beta$. Тогда $\angle FDC = 90 - \beta = \angle DAC$

Тогда $\triangle CFD \sim \triangle CDA$ $\frac{DF}{DA} = \frac{DC}{AC}$ (★)

6) $\angle ADF = 90 - \angle FDC = \beta \Rightarrow \angle ABE = \beta$ как опирающиеся на одну дугу. $\Rightarrow \angle EAB = 90 - \beta$.

Тогда $\triangle AEB \sim \triangle DFC$ $\frac{AE}{DF} = \frac{AB}{DC}$ (●)

7) из равенства (*) выразим AF:

$$AF = \frac{AE}{AB} \cdot AD$$

из равенства (★) выразим AD

$$AD = \frac{DF}{DC} \cdot AC$$

из равенства (●) выразим $\frac{DF}{DC} = \frac{AE}{AB}$

Итого: $AF = \frac{AE}{AB} \cdot \frac{AE}{AB} \cdot AC = \frac{AE^2}{AB^2} \cdot AC$

8) $AE^2 = AB^2 - BE^2$ по т. Пифагора

$$AE^2 = 100 - 64 = 36$$

9) $AF = \frac{36}{100} \cdot 20 = \frac{18}{5}$

Ответ: $AF = \frac{18}{5}$



1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 14

Скажем, что всего коробок было n .

В первом случае, когда можно выбрать 5 коробок, всего вариантов это сделать C_n^5 способами. Благоприятными, т.е. когда игрок выигрывает, являются три коробки с шарами и еще 2 любые $\rightarrow C_{n-3}^2$

В этом случае вероятность отгадать: $\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} \Rightarrow$

$$\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{\frac{(n-3)!}{2!(n-5)!}}{\frac{n!}{5!(n-5)!}} = \frac{(n-3)! \cdot 5!}{2! \cdot n!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}$$

Во втором случае аналогично всего способов выбрать 3 коробки C_n^3 , а способов, чтобы выиграть C_{n-3}^6 (3 пустых коробки и 6 любых)

Вероятность отгадать: $\frac{C_{n-3}^6}{C_n^3} \Rightarrow$

$$\frac{C_{n-3}^6}{C_n^3} = \frac{\frac{(n-3)!}{6!(n-9)!}}{\frac{n!}{3!(n-3)!}} = \frac{(n-3)! \cdot 3!}{6! \cdot n!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}$$

Вероятность увеличилась в $\frac{\frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{n(n-1)(n-2)}}{\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{6 \cdot 7}{5} = 8,4$

Ответ: в 8,4 раза.



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5

- 1) $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$ - 6^{ой} и 7^{ой} члены последовательности
2) $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x + (-2a^3 - 6a - 15) = 0$ - 5^{ой} и 8^{ой} члены последовательности.

С пятого по восьмой члены последовательности можно записать в общем виде: $b + 4d$; $b + 5d$; $b + 6d$; $b + 7d$, где b - первый элемент последовательности, d - разность прогрессии.

Можно заметить, что сумма корней первого уравнения в таком виде, равна сумме корней второго уравнения: $b + 4d + b + 7d = b + 5d + b + 6d$.
Давайте учтем это свойство по т. Виета.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$a^2 - 4a = \frac{a^3 - 4a^2}{5} \Leftrightarrow a^3 - 3a^2 + 20a = a(a - 5)(a - 4) = 0$$

Тогда для a остается всего три варианта: 0; 4; 5.

• $a = 0$ Первое уравнение: $x^2 + 4 = 0$ - корней нет вообще.

• $a = 4$ Первое уравнение: $x^2 + 16 - 24 + 4 = x^2 - 4 = 0$
 $x = 2 / -2$

Второе уравнение: $5x^2 - 128 - 24 - 15 = 5x^2 - 167 = 0$
 $x^2 - 33,4 = 0$
 $x = \pm \sqrt{33,4}$

$$\text{т.к. } 25 < 33,4 < 36$$

$$5 < \sqrt{33,4} < 6$$

Тогда корни в порядке возрастания мы запишем так: $-\sqrt{33,4}$; -2 ; 2 ; $\sqrt{33,4}$.

Между -2 и 2 разность 4, а между $-\sqrt{33,4}$ и $-2 < 4$.
Этот вариант тоже не подходит.

• $a = 5$ I $x^2 - 5x - 1 = 0$

$$\text{II } 5x^2 - 25x - 295 = 0 ; x^2 - 5x - 59 = 0$$

$$\text{I } D = 25 + 4 \cdot 1 = 29 \quad x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{29}}{2}$$

$$\text{II } D = 25 + 4 \cdot 59 = 261 \quad x_{1,2} = \frac{5 \pm 3\sqrt{29}}{2}$$

Тогда последовательность с разностью $\sqrt{29}$:

$$\frac{5 - 3\sqrt{29}}{2}, \frac{5 - \sqrt{29}}{2}, \frac{5 + \sqrt{29}}{2}, \frac{5 + 3\sqrt{29}}{2}$$

Ответ: $a = 5$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

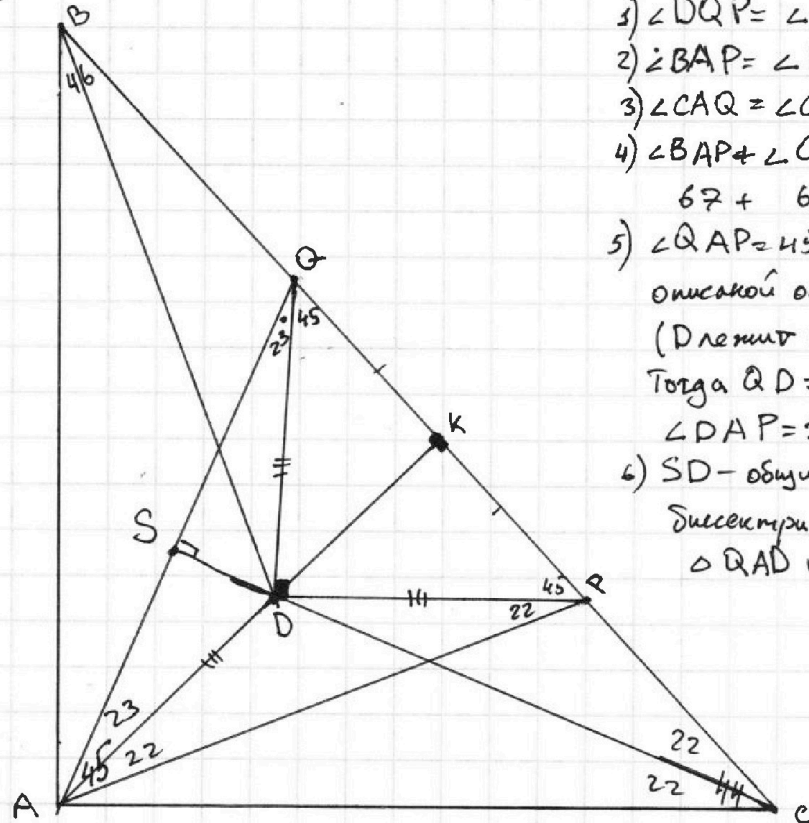
7
☒

СТРАНИЦА
4 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 7

КДА - не прямая!



- 1) $\angle DQP = \angle DPQ = 45^\circ$ тк $\triangle DQP$ равнобед.
- 2) $\angle BAP = \angle BPA = 67^\circ \Rightarrow \angle DPA = 22^\circ$
- 3) $\angle CAQ = \angle CQA = 68^\circ \Rightarrow \angle DQA = 23^\circ$
- 4) $\angle BAP + \angle QAC = \angle BAC + \angle QAP$
 $67 + 68 = 90 + \angle QAP$
 $\angle QAP = 45$ и $\angle QDP = 90 \Rightarrow D$ центр описанной окружности $\triangle AQP$
(Делит на 2 хорды QP, AP, QA)
Тогда $QD = DP = AD$
 $\angle DAP = 22, \angle DAQ = 23$
- 6) SD - общий серпер (медиана, высота, биссектриса) равнобедренных $\triangle QAD$ и $\triangle QAC \Rightarrow \angle SCB = \angle DCB = 22^\circ$

Ответ: 22°



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4 2 5

$$n = \underbrace{9 \dots 9}_{2000s}$$

$$n^3 =$$

$$\left(\underbrace{11111}_{1000s} \cdot 9 \right)^3 = \underbrace{m n^3}_{2000s} \cdot 729$$

$$20002 \quad \left(\underbrace{100 \dots 0}_{2000s} - 1 \right)^3$$

$$\underbrace{1000}_{2000s}^3 - 3 \underbrace{10000}_{2000s}^2 + 3 \underbrace{100000}_{2000s} - 1$$

$$\underbrace{100 \dots 0}_{60003} - 3 \underbrace{00 \dots 0}_{40002} + \underbrace{300 \dots 0}_{20001} - 1$$

$$\begin{array}{r} + 30000 \\ \hline 100009700 \dots 0 \\ \hline 40002 \end{array}$$

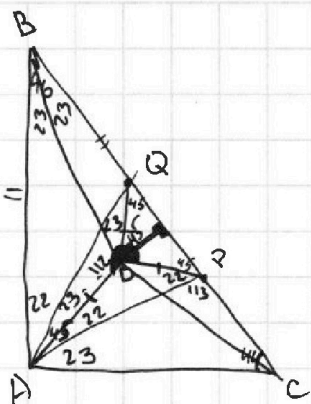


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$90 - 46 = 44$$

$$\frac{180 - 46}{2} = \frac{134}{2} = 67$$

$$67 + 46 = 100 + 13 = 113$$

$$\frac{180 - 44}{2} = \frac{136}{2} = 68$$

$$67 + 68 - 90 = 120 + 15 - 90 = 45$$

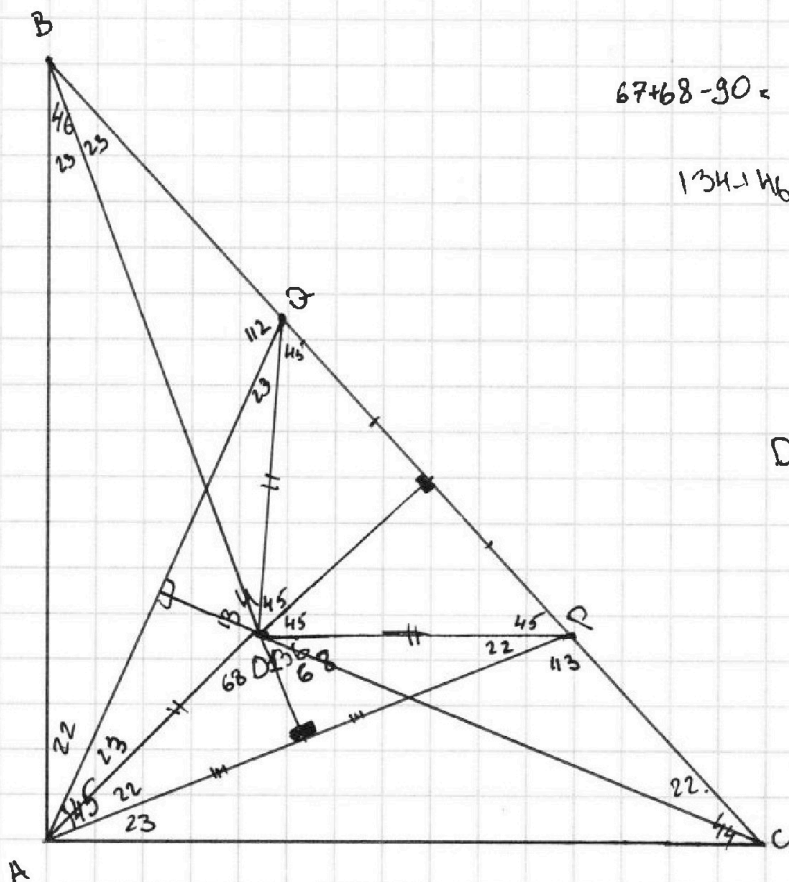
$$180 - 68 = 120 - 8 = 112$$

$$112 + 45 = 157 \rightarrow 158$$

$$45 + 23 + 22 + 113 + 44 = 180 + 180 = 360$$

$$112 + 90 = 202 \rightarrow 158$$

14:37



$$67 + 68 - 90 = 135 - 90 = 45$$

$$134 + 46 = 170 + 10 = 180$$

DLB.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$9^3 = 729$$

$$(999...9)^3 = 729.111...111^3$$

$$\left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{xz}{y}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x}\right)^2 = ?$$

$$\begin{array}{r} \times 121 \\ 121 \\ \hline 121 \\ 121 \\ \hline 1331 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 111 \\ 111 \\ \hline 111 \\ 111 \\ \hline 12321 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 12321 \\ 12321 \\ \hline 12321 \\ 12321 \\ \hline 12321 \end{array}$$

попробуем

C_n^5 - все варианты

поршней

C_{n-3}^2

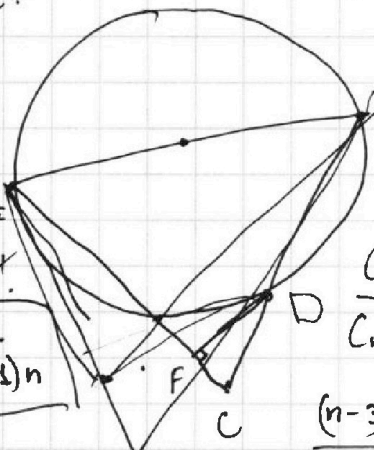
$$\begin{array}{r} \times 1234321 \\ 1234321 \\ \hline 1234321 \\ 1234321 \\ \hline 1234321 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1234321 \\ 1234321 \\ \hline 1234321 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1234321 \\ 1234321 \\ \hline 1234321 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1234321 \\ 1234321 \\ \hline 1234321 \end{array}$$

$$\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{\frac{(n-3)!}{2! \cdot 1!}}{\frac{n!}{5! \cdot 1!}} = \frac{(n-3)! \cdot 5!}{2! \cdot n!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{(n-2)(n-1)n}$$



$$\begin{array}{r} 729 \\ 729 \\ \hline 729 \\ 729 \\ \hline 729 \end{array}$$

C_n^9 - все

C_{n-3}^6 - поршней

$$\frac{C_{n-3}^6}{C_n^9} = \frac{\frac{(n-3)!}{6! \cdot 1!}}{\frac{n!}{9! \cdot 1!}} = \frac{(n-3)! \cdot 9!}{6! \cdot n!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{(n-2)(n-1)n}$$

$$\frac{387}{\frac{(n-2)(n-1)n}{5 \cdot 4 \cdot 3}} = \frac{387 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{(n-2)(n-1)n} = \frac{387 \cdot 60}{(n-2)(n-1)n} = \frac{23220}{(n-2)(n-1)n}$$

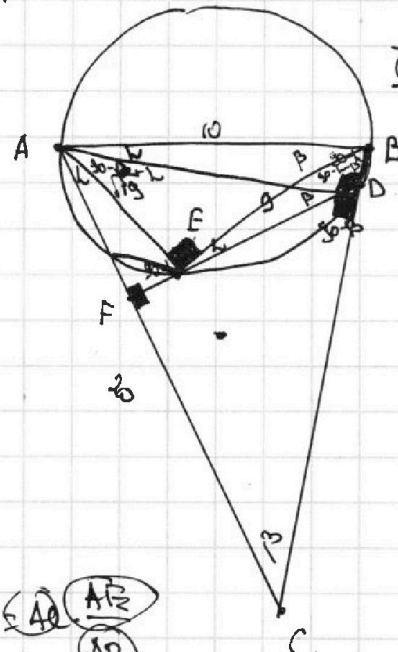
$$\frac{AE}{AD} = \frac{FE}{DB} = \frac{AE}{AB}$$

$$\frac{AE}{DF} = \frac{AB}{DC} = \frac{BE}{CF}$$

$$\frac{AD}{DF} = \frac{AC}{DC} = \frac{CD}{CF}$$

$$\frac{AE}{AB} = \frac{DF}{DC}$$

AF-?
AC=20
AB=10
BE=9
AE=5/9



$$AF = \frac{AE}{AB} \cdot AD$$

$$AD = \frac{AC}{AB} \cdot \frac{DF}{DC} = \frac{AC}{AB} \cdot \frac{AE}{AB}$$

$$AF = \frac{AB}{AB} \cdot AC \cdot \frac{AE}{AB} = \frac{AE^2}{AB^2} \cdot AC = \frac{19}{100} \cdot 20 = \frac{19}{5} - \text{ответ 3}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0 \quad 6^{00} \text{ и } 7^{00}$$

$$5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0 \quad 5^{00} \text{ и } 8^{00}$$

$$\begin{matrix} 5 & a+4d \\ 6 & a+5d \\ 7 & a+6d \\ 8 & a+7d \end{matrix}$$

$$2a+11d$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{-b}{a} &= x_1 + x_2 \\ \frac{c}{a} &= x_1 x_2 \end{aligned} \right\} \text{бует.}$$

$$a^2 - 4a = \frac{a^3 - 4a^2}{5}$$

$$a^3 - 4a^2 = 5a^2 - 20a$$

$$a^3 - 9a^2 + 20a = 0$$

$$a(a^2 - 9a + 20) = 0$$

$$a(a-5)(a-4) = 0$$

$$0 \quad 5 \quad 4$$

$$4 + 2 + 5 + 4 + 5 + 5 + 6$$

$$6 + 9 + 10 + 6$$

$$12 + 19 = 31$$

$$14$$

$$a^2 + 11ad + 30d$$

$$a^2 + 11ad + 28d$$

$$3d = 3((a^2 - 4a)^2 - 4(a^2 - 6a + 4))$$

$$3d = (a^3 - 4a^2)^2 + 4 \cdot 5(a^3 - 6a + 4)$$

$$3a^4 - 24a^3 + 48a^2 - 12a^2 + 72a - 48 =$$

$$= a^6 - 8a^5 + 16a^4 + 20a^3 + 120a + 300$$

$$D = 81 - 4 \cdot 20 = 1$$

$$\frac{9 \pm 1}{2} = 5/4$$

$$1) a=0 \quad x^2 + 4 = 0 \text{ нет корней}$$

$$5x^2 - 15 = 0$$

$$2) a=5 \quad x^2 - (5)x + (-1) = 0 \quad x^2 - 5x - 1 = 0$$

$$5x^2 - 25x - 295 = 0$$

ответ 5

$$x^2 - 5x - 59 = 0$$

$$D = 25 + 4 \cdot 1 = 29$$

$$\frac{5 \pm \sqrt{29}}{2}$$

$$25 + 4 \cdot 59 = 225 + 236 = 261$$

$$5 \cdot 29$$

$$\frac{5 - 3\sqrt{29}}{2}$$

$$\frac{5 - \sqrt{29}}{2}$$

$$\frac{5 + \sqrt{29}}{2}$$

$$\frac{5 + 3\sqrt{29}}{2}$$

$$\frac{5 \pm 3\sqrt{29}}{2}$$

$$3) a=4 \quad x^2 - 4 = 0 \quad 2/-2$$

$$5x^2 - 128 - 24 - 15 = 5x^2 - 167 = 20$$

$$x^2 - 33,4 = 0$$

$$-\sqrt{33,4} \quad -2 \quad 2 \quad \sqrt{33,4}$$

$$\begin{array}{r} 59 \\ \times 52 \\ \hline 104 \\ 260 \\ \hline 2704 \end{array} \quad \begin{array}{r} 59 \\ \times 52 \\ \hline 118 \\ 290 \\ \hline 3064 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 12 \\ \hline 34 \\ 203 \\ \hline 2034 \end{array} \quad \begin{array}{r} 18 \\ \times 16 \\ \hline 108 \\ 288 \\ \hline 2884 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

