



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = -6y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x - 6)^2 + (y - 6)^2 + (z - 6)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 20 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E – точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 10$, $BE = 9$.
4. [4 балла] В теленграе ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарику. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть девять коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$ являются пяттым и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| + \left|y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| \leq 8$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипotenузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle CBA = 46^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) В первом случае Пусть всего поробок-
При первом условии подходит следующих
случаев: C_{n-3}^2 (способов выбрать
2 поробки кроме тех трёх в которых
сидят шариками), т.к. в втором случае
шарик идёт также воть условия-
ва)

А всего способов выбрать 5
поробок: C_n^5

Тогда вероятность второго:

$$\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}$$

2) Аналогично, для 9 поробок
втором случае: C_{n-3}^6 ,
а всего случаев: C_n^9
Вероятность второго: $\frac{C_{n-3}^6}{C_n^9}$

3) Тогда вероятность увеличивается

$$b: \left(\frac{\frac{C_{n-3}^6}{C_n^9}}{\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}} \right)^2 = \frac{C_{n-3}^6 \cdot C_n^5}{C_n^9 \cdot C_{n-3}^2} = \frac{\frac{(n-3)! \cdot n!}{6!(n-9)! \cdot 5!(n-5)!}}{\frac{n! \cdot (n-3)!}{9!(n-9)! \cdot 2!(n-5)!}} = \frac{\cancel{(n-3)!} \cdot \cancel{n!} \cdot \cancel{g!(n-9)!} \cdot \cancel{2!(n-5)!}}{\cancel{g!(n-9)!} \cdot \cancel{5!(n-5)!} \cdot \cancel{n!} \cdot \cancel{(n-3)!}} = \frac{8^3 \cdot 8^2 \cdot 7 \cdot 2}{5 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 2} = \frac{42}{5}$$

результат

Ответ: б $\frac{42}{5}$ раз

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(1): x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$$

$$(2): 5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$$

~~корни (1)~~

(an) - ср. пр.; корни (1) - a_6 и a_7 , $a - ?$
корни (2) - a_5 и a_8

$$a_6 + a_7 = a_1 + 5d + a_1 + 6d = a_1 + 4d + a_1 + 7d = a_5 + a_8$$

т.е. сумма корней ур-я равна

разделим (2) на 5:

$$x^2 - \frac{(a^3 - 4a^2)}{5}x - \frac{2a^3 - 6a - 15}{5} = 0$$

Тогда сумма корней ур-я (2) :

равна $\frac{(a^3 - 4a^2)}{5}$ (по т. Виета.)

сумма корней ур-я (1) : $a^2 - 4a$

Приравняем:

$$\frac{(a^3 - 4a^2)}{5} = a^2 - 4a$$

$$a^3 - 9a^2 + 20a = 0 \quad (*)$$

1) $a = 0$, тогда (1) ур-е. применим вид:

$$\frac{x^2}{20} + 4 = 0 \quad - \text{нет решений}$$

$a = 0$ - не подх.

2) $a \neq 0$: разделим (*) на a :

$$a^2 - 9a + 20 = 0$$

$$[a = 5]$$

$$[a = 4]$$

~~Решение~~

Но при $a = 4$ ~~ура~~ ур-я прим. вид:

$$(1) x^2 - 4 = 0 : x = \pm 2 \quad - \text{т.к. } a_6 \text{ и } a_7, \text{ то}$$

$$(2) 5x^2 - 16x = 0 : x = \pm \sqrt{\frac{16x}{5}} \quad |cd| = 12 - 21 = 4$$

Однажды $x = \pm \sqrt{\frac{16x}{5}}$ и $x = -\sqrt{\frac{16x}{5}}$ не могут



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Быть членами этой прогрессии
т.к. $|d|=4$ и a_6 и a_8 целые числа.

При $a=5$:

$$(1): x^2 - 5x - 1 = 0 \quad : \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{29}}{2}$$

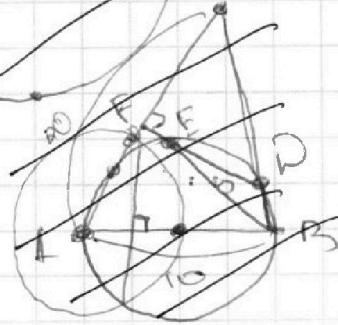
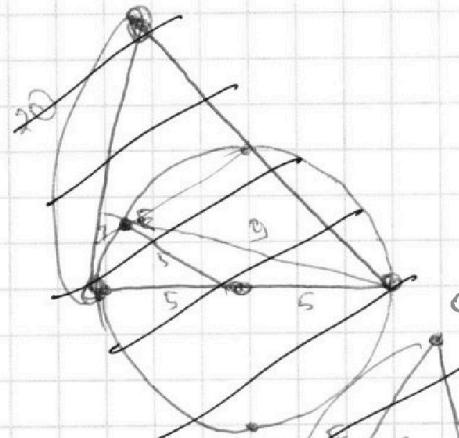
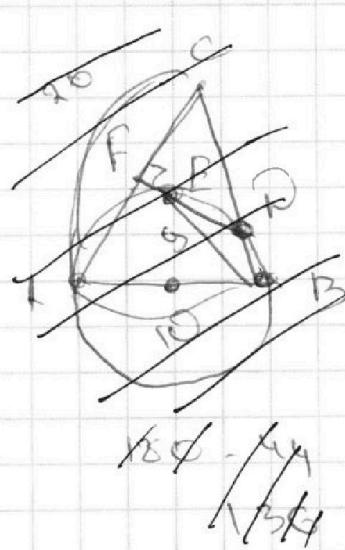
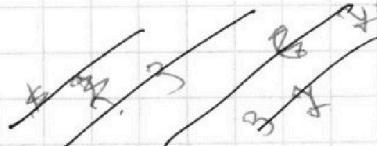
$$(2): 5x^2 - 25x - 295 = 0 \quad : \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{261}}{2} = \frac{5 \pm 3\sqrt{29}}{2}$$

Подходит например:

$$a_5 = \frac{5 - 3\sqrt{29}}{2} \quad a_6 = \frac{5 - \sqrt{29}}{2} \quad a_7 = \frac{5 + \sqrt{29}}{2} \quad a_8 = \frac{5 + 3\sqrt{29}}{2}$$

$$d = \sqrt{29}$$

Ответ: 5.





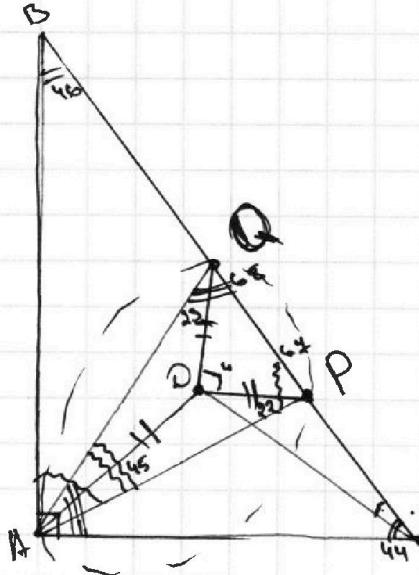
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>					
--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	-------------------------------------

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Dans: ABC -xyz

$$AB \sim BP, \quad AC \sim CQ$$

$$DP \approx DQ$$

$$\angle PDQ = 90^\circ$$

$$\angle CBA = 46^\circ$$

$$\angle PCB = ?$$

$$1) \angle ACB = 90^\circ - \angle BAC = 44^\circ$$

2) R.H.OF BP - p15 (no amp),
 so no cb key;
 $\angle PAB = \angle APB = \frac{1}{2} \angle ABC = 67^\circ$

3) А самое главное, что ΔCQ :

$$\angle CAQ = \angle CAQ_A = \frac{180 - \angle ACB}{2} = 68^\circ$$

$$3) \circ DPQ - P15^\circ : \angle DPQ = \angle DQP = 45^\circ$$

$$5) \angle APD = \angle APQ - \angle DPQ = 64^\circ - 45^\circ = 22^\circ$$

$$\angle AQR = \angle AQP - \angle PQR = 68^\circ - 45^\circ = 23^\circ$$

$$6) \text{ rekt-k. A QDP: } \angle QAP = 360 - \angle APD - \angle ADQ - \angle PDQ = 360 - 22 - 23 - (360 - \angle PDQ) = \\ = 315 - 270 = 45^\circ$$

3) Роб в (D ; $R = DP = DQ$) ^{нечс} _{сма}
непересі $A'D$ & A' , та ga

$$\angle PA'Q = \frac{1}{2} \angle P\textcircled{C} Q = 45^\circ, \text{ so } \angle PAQ = 45^\circ$$

согласно $A^T = A'$, согласно $AD = DP^{-PQ}$ (последний)

8) $\Rightarrow ACQ$: $AD = QD$, wegen $D \in$ ~~Quer~~ \cap

$$\angle DCP = \frac{1}{2} \angle ACB = 22^\circ$$

Oberer: 22°



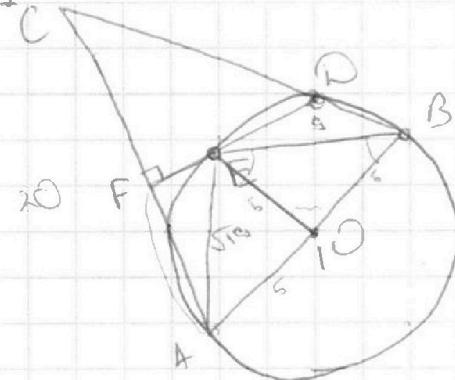
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r}
 599 \\
 \times 599 \\
 \hline
 8991 \\
 + 899 \\
 \hline
 8991 \\
 + 899 \\
 \hline
 598001 \\
 + 8982009 \\
 \hline
 598001 \\
 + 8982009 \\
 \hline
 598002999
 \end{array}$$

0230107
17



$$\begin{aligned}
 x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0 \\
 5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0
 \end{aligned}$$

$$a^2 - 4a = \frac{a^3 - 4a^2}{5}$$

$$5a^2 - 4a = a^3 - 4a^2$$

$$a^3 - 9a^2 + 4a = 0$$

$$x^2 + u = 0$$

$$5x^2 - 15 = 0 \quad a^2 - 9a - 4 = 0$$

$$x^2 + 4 = 0$$

$$x^2 - 3 = 0$$

*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + bx + ac = 0$$

$$b^2 - 4ac$$

2

$$\begin{aligned}
 c^2 &= a^2 + b^2 - 2ac \cos \gamma \\
 c^2 - a^2 - b^2 &= -2ac \cos \gamma \\
 \cos \gamma &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\
 \frac{50 - 81}{50} &= -\frac{31}{50} \\
 &= -0,62
 \end{aligned}$$

$$\frac{81}{90} = \frac{9}{10} = 0,9$$

$$\begin{array}{r}
 295 \\
 - 25 \\
 \hline
 45
 \end{array}$$

5

$$\begin{array}{r}
 100 - 81 = \\
 19 \\
 - 15 \\
 \hline
 4
 \end{array}$$

$$a^3 - 4a^2 = 5a^2 - 20a$$

$$a^3 - 9a^2 + 20a = 0$$

$$\begin{array}{r}
 51 \\
 - 42 \\
 \hline
 9 \\
 - 42 \\
 \hline
 33 \\
 - 42 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 59 \\
 + 29 \\
 \hline
 261
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 181 \\
 - 152 \\
 \hline
 29
 \end{array}$$

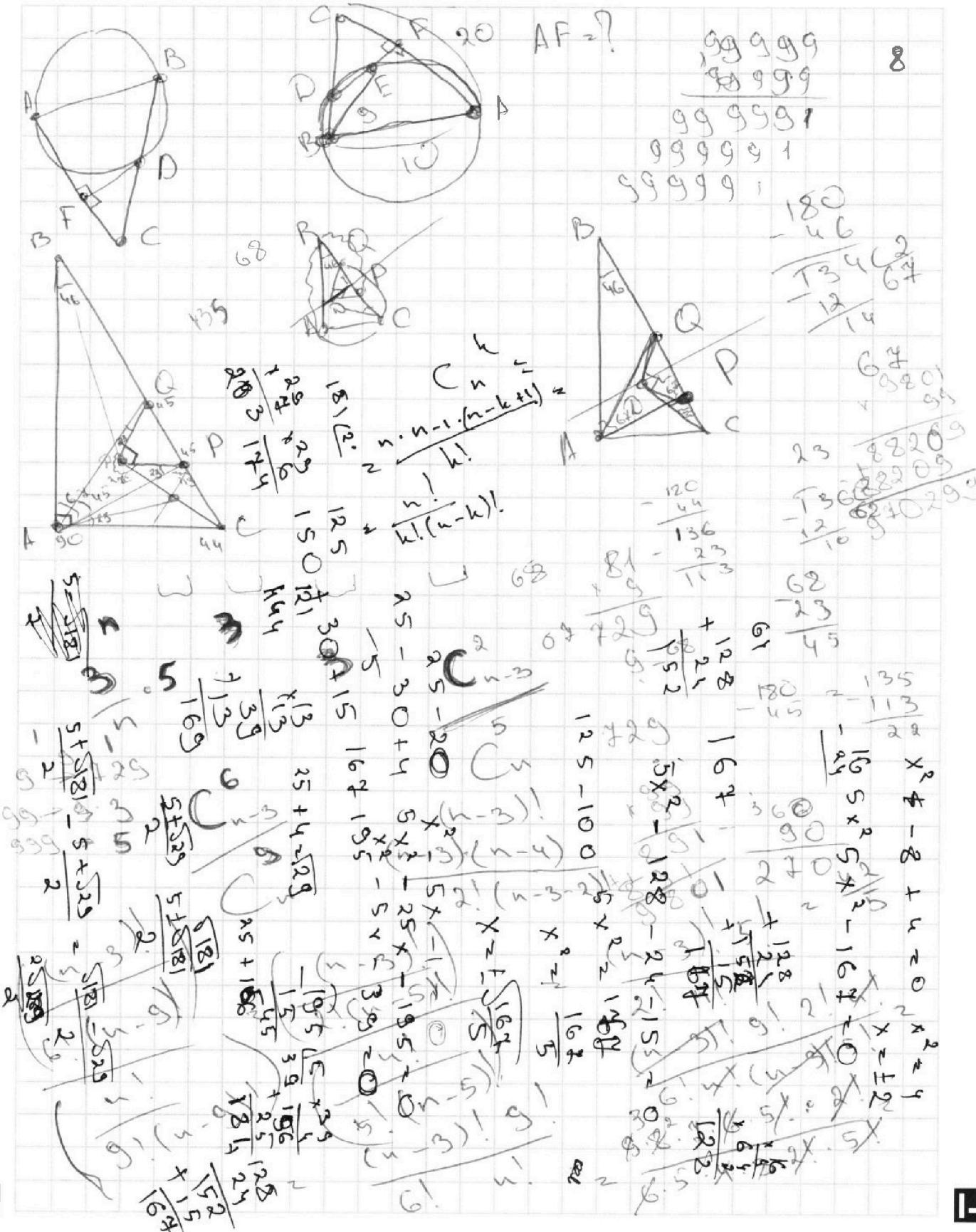
$$\begin{array}{r}
 000 \\
 58 \\
 \hline
 58
 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a^2 - 4a = a^2 - 4a$$

$$a^2 - 4a^2 + 20a = 0$$

$$a^2 - 9a + 20 = 0$$

$$\begin{cases} a=5 \\ a=4 \end{cases}$$

$$x^2 - (16-16)x + 16 - 24 + 4 = 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x = \pm 2$$

$$5x^2 - (125-100)x - 2 \cdot 64 - 24 - 15 = 0$$

$$5x^2 - 164 = 0$$

$$5x^2 = \frac{164}{5}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{164}{5}}$$

$$a = \sqrt{5}$$

$$x^2 - (25-20)x + 25 - 30 + 4 = 0 \quad | \quad 25 + 4 = 29$$

$$x^2 - 5x - 1 = 0$$

$$x = \pm \sqrt{29}$$

$$x = \pm \sqrt{29}$$

$$5x^2 - (125-100)x - 250 - 30 - 15 = 0$$

$$5x^2 - 25x - 295 = 0$$

$$-\frac{295}{25} \left(\frac{5}{59} \right)$$

$$x^2 - 5x - 59 = 0$$

$$\begin{array}{r} x = 5 \pm \sqrt{259} \\ \hline 236 & 4 \\ 25 & 25 \\ \hline 259 & 85 + 236 \end{array}$$

$$x = 5 \pm \sqrt{259}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{259}}{2}$$

$$\sqrt{259} = \sqrt{259}$$

$$\frac{\sqrt{259} - \sqrt{259}}{2}$$

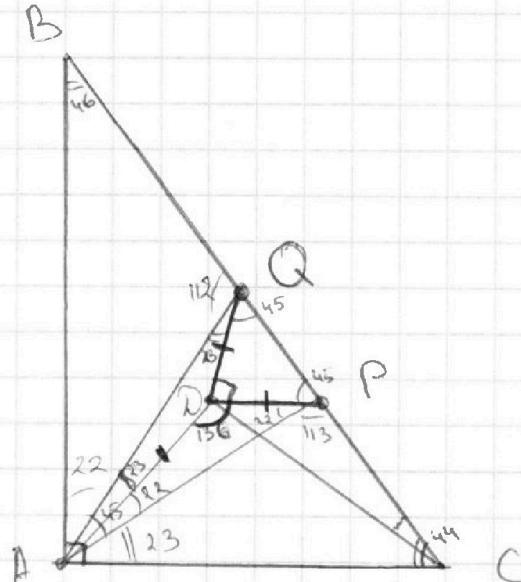
$$\begin{array}{r} x = \frac{29+29}{261} \left(\frac{17}{17} \right) \frac{16}{16} \\ \hline 158 & 17 \\ 261 & 261 \\ \hline 841 & 289 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



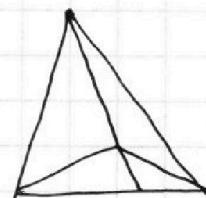
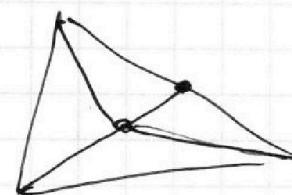
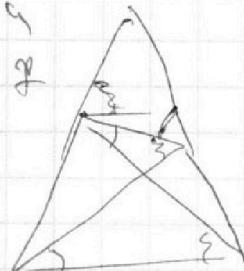
$$\begin{array}{r} \overset{1}{\cancel{3}} \cancel{4} \text{ (2)} \\ - \overset{1}{\cancel{1}} \cancel{2} \\ \hline 14 - \overset{6}{\cancel{4}} \text{ (5)} \\ \hline 22 \end{array}$$

$$-\sqrt{36} \sqrt[3]{68}$$

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 280 \\ 158 - \alpha + 152 - \beta &= 45 \end{aligned}$$

۱۳۵

$$\begin{array}{r}
 + 1 1 3 \\
 4 9 \\
 \hline
 1 5 9
 \end{array}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!