



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = -6y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x - 6)^2 + (y - 6)^2 + (z - 6)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 20 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 10$, $BE = 9$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарик. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть девять коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$ являются пятым и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| + \left|y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| \leq 8$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle CBA = 46^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) В первом случае Пусть всего коробок - n
При первом условии подходящих случаев: C_{n-3}^2 (способов выбрать 2 коробки кроме тех трёх в которых лежат шарик), т.е. в выигрышном случае игрок их точно выиграет)

А всего способов выбрать 5 коробок: C_n^5

Тогда вероятность выигрыша:
 $\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}$

2) Аналогично, для 9 коробок
выигрышных случаев: C_{n-3}^6 ,
а всего случаев: C_n^9
Вероятность выигрыша: $\frac{C_{n-3}^6}{C_n^9}$

3) Тогда вероятность увеличилась

$$b: \left(\frac{C_{n-3}^6}{C_n^9} \right) : \left(\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} \right) = \frac{C_{n-3}^6 \cdot C_n^5}{C_n^9 \cdot C_{n-3}^2} = \frac{\left(\frac{(n-3)!}{6!(n-9)!} \cdot \frac{n!}{5!(n-5)!} \right)}{\left(\frac{n!}{9!(n-9)!} \cdot \frac{(n-3)!}{2!(n-5)!} \right)}$$

$$= \frac{(n-3)! \cdot n! \cdot 9!(n-9)! \cdot 2!(n-5)!}{6!(n-9)! \cdot 5!(n-5)! \cdot n! \cdot (n-3)!} = \frac{9^3 \cdot 8^2 \cdot 7 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{42}{5} \text{ раз.}$$

Ответ: в $\frac{42}{5}$ раз



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(1): x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$$

$$(2): 5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$$

~~корни (1) -~~

(a_6) - ср. пр. ; корни (1) - a_6 и a_7 $a - ?$

корни (2) - a_5 и a_8

$$a_6 + a_7 = a_1 + 5d + a_1 + 6d = a_1 + 4d + a_1 + 7d = a_5 + a_8$$

т.е. суммы корней ур-я равны

разделим (2) на 5 :

$$x^2 - \frac{(a^3 - 4a^2)}{5}x - \frac{2a^3 - 6a - 15}{5} = 0$$

Тогда сумма корней ур-я (2) :

равна $\frac{(a^3 - 4a^2)}{5}$ (по т. Виета.)

сумма корней ур-я (1) : $a^2 - 4a$

Приравняем:

$$\frac{(a^3 - 4a^2)}{5} = a^2 - 4a$$

$$a^3 - 9a^2 + 20a = 0 \quad (*)$$

1) $a = 0$, тогда (1) ур-е принимает вид:

$$\frac{x^2}{\geq 0} + 4 = 0 - \text{нет решений}$$

$a = 0$ - не подх.

2) $a \neq 0$: разделим (*) на a :

$$a^2 - 9a + 20 = 0$$

$$\begin{cases} a = 5 \\ a = 4 \end{cases}$$

~~Ответ~~

Но при $a = 4$ ур-я прим. вид:

~~каждое при $x = 2$~~

$$(1) x^2 - 4 = 0 : x = \pm 2 \quad - \text{т.е. для } a_6 \text{ и } a_7, \text{ то } |d| = |2 - 2| = 0$$

$$(2) 5x^2 - 16 = 0 : x = \pm \sqrt{\frac{16}{5}}$$

Очевидно ни $x = \sqrt{\frac{16}{5}}$ ни $x = -\sqrt{\frac{16}{5}}$ не могут



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Даны значения этой прогрессии
т.е. $|d|=4$ и a_6 и a_4 целые числа.

При $a = 5$:

$$(1): x^2 - 5x - 1 = 0 \quad : \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{29}}{2}$$

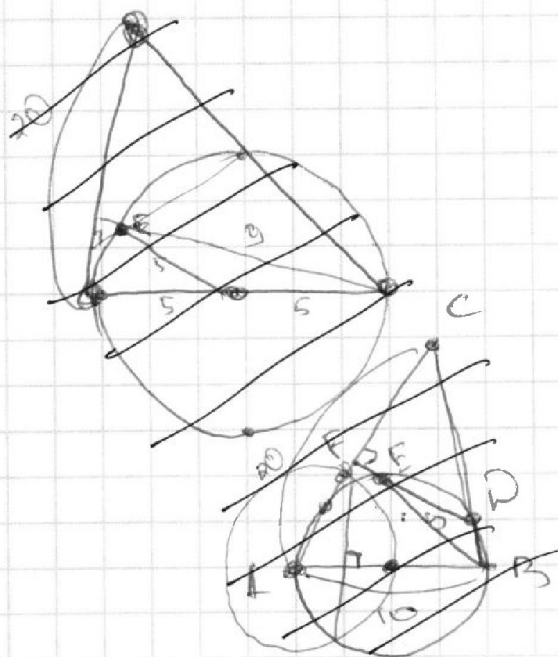
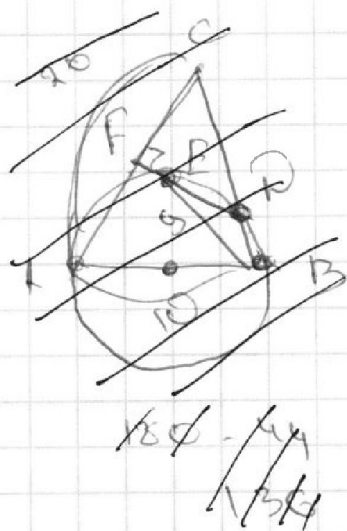
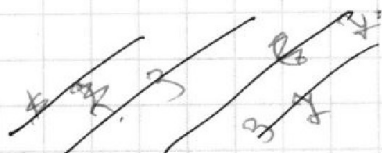
$$(2): 5x^2 - 25x - 295 = 0 \quad : \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{261}}{2} = \frac{5 \pm 3\sqrt{29}}{2}$$

Подходит например:

$$a_5 = \frac{5 - 3\sqrt{29}}{2} \quad a_6 = \frac{5 - \sqrt{29}}{2} \quad a_4 = \frac{5 + \sqrt{29}}{2} \quad a_3 = \frac{5 + 3\sqrt{29}}{2}$$

$$d = \sqrt{29}$$

Ответ: 5.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

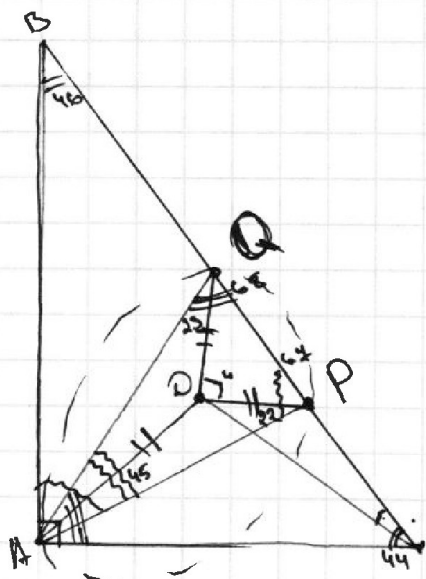
5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: ABC - т/у
 $AB \sim BP$, $AC \sim CQ$
 $DP \sim DQ$
 $\angle PDQ = 90^\circ$
 $\angle CBA = 46^\circ$
 $\angle DCB = ?$

1) $\angle ACB = 90^\circ - \angle CBA = 44^\circ$

2) т.к. $\triangle ABP$ - р/б (по угл),
 $\angle PAB = \angle APB = \frac{180^\circ - \angle ABC}{2} = 67^\circ$

3) Аналогично для $\triangle ACQ$:

$\angle CAQ = \angle CQA = \frac{180^\circ - \angle ACB}{2} = 68^\circ$

4) $\triangle DPQ$ - р/б: $\angle DPQ = \angle DQP = 45^\circ$

5) $\angle APD = \angle APQ - \angle DPQ = 67 - 45 = 22$

$\angle AQD = \angle AQP - \angle DQP = 68 - 45 = 23$

6) мес-к. $AQDP$: $\angle QAP = 360^\circ - \angle APD - \angle AQD - \angle PDQ = 360^\circ - 22 - 23 - (360^\circ - \angle PDQ) = 315 - 270 = 45^\circ$

7) Пров $\omega(D; R = DP = DQ)$ пусть
пересекает AD в A' , тогда

$\angle PA'Q = \frac{1}{2} \angle PDQ = 45^\circ$, но $\angle PAQ = 45^\circ$

тогда $A \equiv A'$, тогда $AD = DP = DQ$ (радиусы)

8) $\triangle ACQ$: $AD = QD$, тогда $D \in$ ~~лучи~~ ^{бисс.}
тогда $\angle DCP = \frac{1}{2} \angle ACB = 22^\circ$

Ответ: 22°

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$a^2 - 4a = a^2 - 4a^2$$

$$a^2 - 9a^2 + 20a = 0$$

$$a^2 - 9a + 20 = 0$$

$$\begin{cases} a = 5 \\ a = 4 \end{cases}$$

$$x^2 - (16 - 16)x + 16 - 24 + 4 = 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x = \pm 2$$

$$5x^2 - (64 - 40)x - 2 \cdot 64 - 24 - 15 = 0$$

$$5x^2 - 16x = 0$$

$$5x^2 = \frac{16x}{5}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{16x}{5}}$$

$$\begin{array}{r} \times 128 \\ 24 \\ \hline 152 \\ \times 15 \\ \hline 1520 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 15 \\ 5 \\ \hline 125 \end{array}$$

$$a = 5$$

$$x^2 - (25 - 20)x + 25 - 30 + 4 = 0$$

$$25 + 4 = 29$$

$$x^2 - 5x - 1 = 0$$

$$5x^2 - (125 - 100)x - 250 - 30 - 15 = 0$$

$$5x^2 - 25x - 295 = 0$$

$$x^2 - 5x - 59 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{259}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{29}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{259} - \sqrt{29}}{2}$$

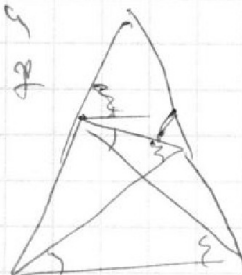
$$\begin{array}{r} \times 59 \\ 4 \\ \hline 236 \\ 25 \end{array}$$

$$259 \quad 25 + 236$$

$$\begin{array}{r} \times 29 \\ 261 \\ \hline 158 \\ 841 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 59 \\ 295 \\ \hline 25 \\ 59 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 16 \\ 16 \\ \hline 289 \\ 256 \end{array}$$



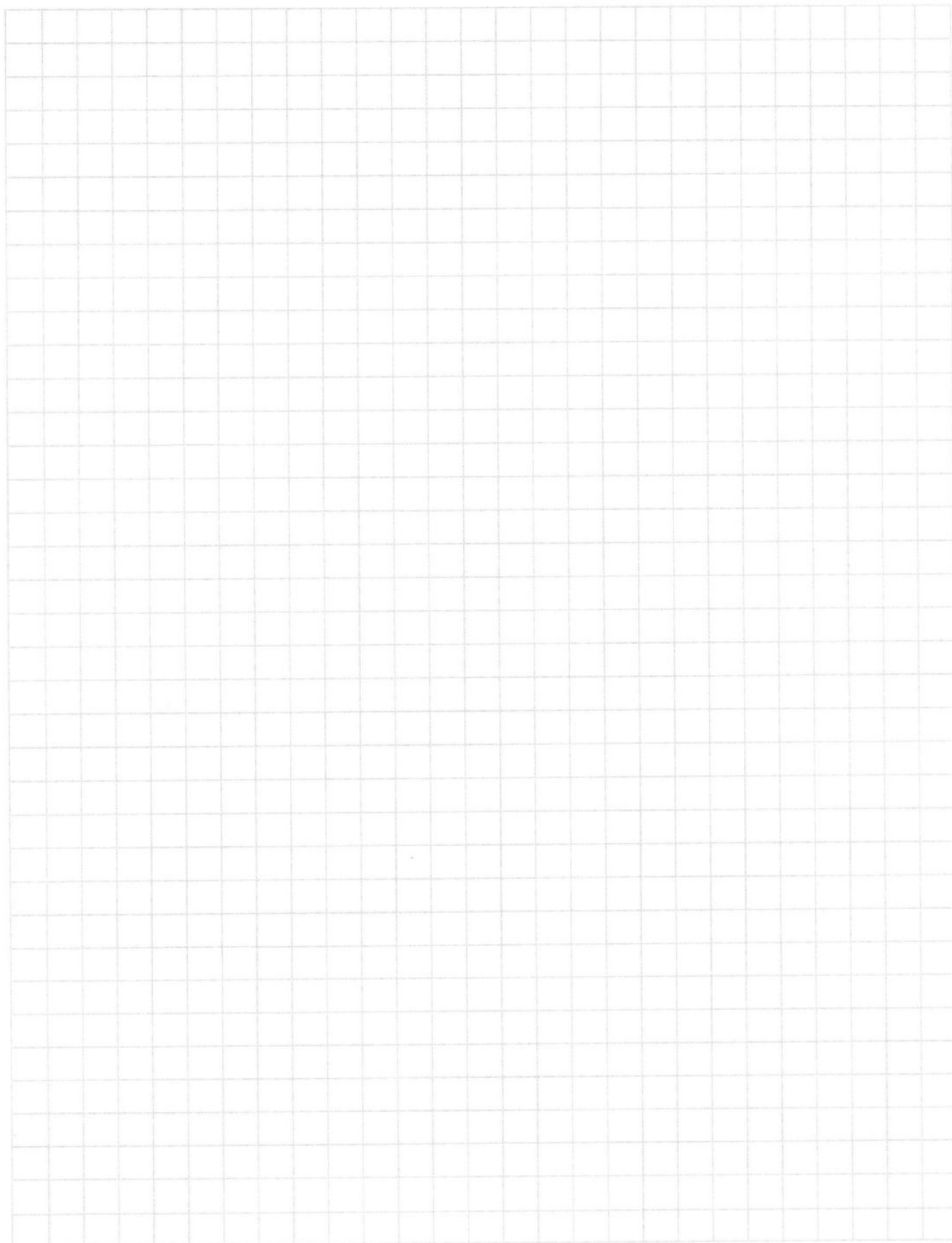


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

