



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 15$, $BE = 10$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарик. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$ являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$ являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| + \left|y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leq 6$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle DBC = 35^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2 \\ yz = 4x + x^2 \\ 2x = 4y + y^2 \end{cases}$$

рассмотрим варианты:

① $y = x = z$, тогда $z^2 = 4z + z^2$
 $z = 0$ - не подходит

т.к. система в ненулевых числах,

② $x \neq 0$ $y = x$

$$\begin{cases} x^2 = 4z + z^2 \\ xz = 4x + x^2 \\ xz = 4x + x^2 \end{cases} \text{ рассмотрим, тогда}$$

$$xz = 4x + x^2 ; x = 0, \text{ тогда } 4z + z^2 = 0$$

тогда решение системы $x = 0$ - числа ненулевые!
 $y = 0$ - ~~то~~ $z = -4$
 $z = -4$ не подходит.

$x \neq 0$, тогда $z = 4 + x$. $x = y = z - 4$ - подставим в первое, получим:

$$z^2 - 8z + 16 = 4z + z^2$$

$$16 = 12z$$

$$z = \frac{4}{3} = z, \text{ тогда } x = -\frac{8}{3}; y = -\frac{8}{3}; z = \frac{4}{3}$$

подставим получим: $\left(\frac{16}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^4 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16^2 + 32}{9} = 16 \cdot 2 = 32$.

③ $x \neq y \neq z$, тогда вычтем из первой строки вторую.

$$y(x - z) = z^2 - x^2 + 4z - 4x \quad | :x - z$$

$$y = -x - z - 4 ; y + x + z = -4, \text{ подставим в систему}$$

$$xy = 2(-x - y - z) + z^2$$

$$xy = -2x - 2y ; xy + 2x + yz = 0, \text{ тогда!}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

решение: $\underbrace{99 \dots 9}_{25} = 10^{25} - 1$, тогда перенесем

$$\cancel{(10^{25} - 1)^3} = \cancel{(10^{25} - 1)(10^{25} - 1)(10^{25} - 1)} =$$

$$\begin{aligned} (10^{25} - 1)^3 &= \cancel{10^{75} - 1 + 10^{25} \cdot 3 - 3 \cdot 10^{50}} = \\ &= 10^{25} (10^{50} + 3 - 10^{25} \cdot 3) - 1 = \end{aligned}$$

~~$99 \dots 9 \cdot 7 \cdot 0000 \cdot 3 \cdot 0 \dots 0$~~ 900 число

$$\underbrace{99 \dots 9}_{24} \cdot \underbrace{7}_{1} \cdot \underbrace{0000}_{24} \cdot \underbrace{3}_{1} \cdot \underbrace{0 \dots 0}_{25} - 1 =$$

$$= \underbrace{99 \dots 9}_{24} \cdot \underbrace{7}_{1} \cdot \underbrace{0 \dots 0}_{24} \cdot \underbrace{2}_{1} \cdot \underbrace{9 \dots 9}_{25}, \text{ ответ: } 49$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решение.

$\angle$ -точка
пер. AC с W

$\angle B = \beta$ тогда заметим что

$\angle AEF = 180 - \beta$ значит $\angle FAE = 90 - \beta$

~~заметим что~~

~~$\angle FAE = 90 - \beta$~~

~~$\angle AEF = 180 - \beta$~~

$\angle C = \angle$ тогда $\angle D = 90 + \angle$

тогда из вписанности

$\angle BAE = 90 - \angle$ тогда

проведем EB - получим

$\triangle ADEF$

$$\begin{array}{r} 10000 \\ - 100 \\ \hline 9900 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 100 \\ - 10 \\ \hline 90 \end{array}$$

$$\times 99$$

$$10000$$

$$- 100$$

$$9900$$

$$(a-b)^3 = (a-b)(a+b)(a-b)$$

$$10^{25} - 1$$

$$100 = 50 - 25 - 1$$

$$25 - 1$$

$$100 \dots 0$$

$$1 \cdot 1$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Пусть $n=8$ во коробок, тогда C_8^5 - способов
выбрать 5 коробок, C_8^3 - способов выбрать 3 коробки
(4 - способа выигрыши)~~
 ~~C_8^5 - способов выбрать 5 коробок, C_8^3 - способов выбрать 3 коробки
(1 - выигрыши)~~

пусть $n > 8$, тогда C_n^5 - способов выбрать 5 коробок
 C_n^8 - способов выбрать 8 коробок

в первом случае C_{n-3}^2 - вар. выигрыши.

во втором случае C_{n-3}^5 , тогда просят найти:

$$\frac{\frac{C_{n-3}^5}{C_n^8}}{\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}} = \frac{C_{n-3}^5 \cdot C_n^5}{C_n^8 \cdot C_{n-3}^2} = \frac{C_{n-3}^5}{C_{n-3}^2} \cdot \frac{C_n^5}{C_n^8} =$$

$$= \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{5!} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}$$

$$= \frac{(n-3)(n-2)}{2} \cdot \frac{(n-1)(n-6)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{5!}$$

$$\frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{5!} \cdot 2! \cdot 8! = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{8 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8!}{5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{4 \cdot 7}{5} = \frac{28}{5}$$

вероятность увеличилась в $\frac{28}{5}$ раз; ~~если $n=8$~~
~~тогда C_8^5 - способов выбрать 5 коробок, C_8^3 - способов выбрать 3 коробки~~

Ответ: $\frac{28}{5}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2 - a^3}{3} = 0 \quad \text{— корни } x_1; x_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{прогрессия } a_1 - \text{нач.} \\ b_1 - \text{разность} \end{array} \right.$$

$$2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0 \quad x_3; x_4$$

Напишем т. Вчета для обеих 3-х именов $\Rightarrow$

$$x_1 + x_2 = a^2 - a$$

$$x_3 + x_4 = \frac{a^3 - a^2}{2}$$

с другой стороны это $a_1 + 3b_1 + a_1 + 4b_1 =$

$$x_1 + x_2$$

$$a_1 + b_1 + a_1 + 6b_1 =$$

$$x_3 + x_4, \text{ тогда}$$

заменим что

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4 \Rightarrow$$

$$a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{2}, \text{ тогда}$$

① $a = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{2}{3} = 0$ нет реш. в действительном

② $a = 1 \quad x^2 + \frac{1}{3} = 0$ нет реш. в действительном, тогда

поделим на $a(a-1)$

$$1 = \frac{a}{2}$$

$2 = a$, получим

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$2x^2 - 4x - 148 = 0 \quad |^2$$

$$x^2 - 2x - 74 = 0 \quad \text{— осталось}$$

проверить корни

$$D_1 = 4 + 4 \cdot 74 = 4 \cdot 3$$

$$x_1 = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3}$$

$$D_2 = 4 + 4 \cdot 74 = 4 \cdot 75 = 4 \cdot 25 \cdot 3$$

$$x_1 = \frac{2 - 2 \cdot 5\sqrt{3}}{2} = 1 - 5\sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{2 + 2 \cdot 5\sqrt{3}}{2} = 1 + 5\sqrt{3}, \text{ тогда}$$

последовательность выглядит так: 2

~~1-5√3~~ ② ~~1-3√3~~ ③ ~~1-√3~~ ④ ~~1+√3~~ ⑤ ~~1+3√3~~ ⑥ ~~1+5√3~~ ⑦
 $1 - 7\sqrt{3}$ — удовлетворяет $\Rightarrow a = 2$ — подходит Ответ: 2

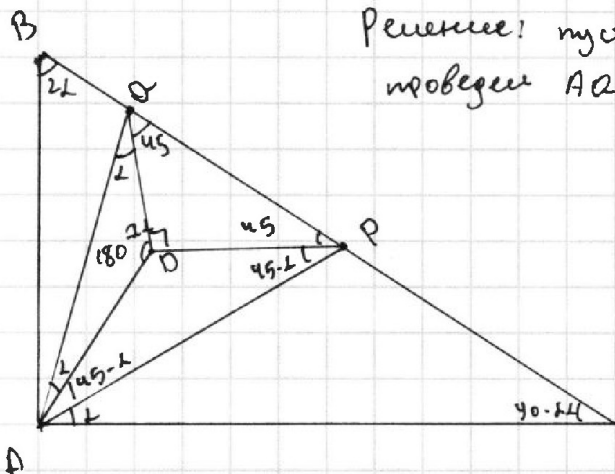


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

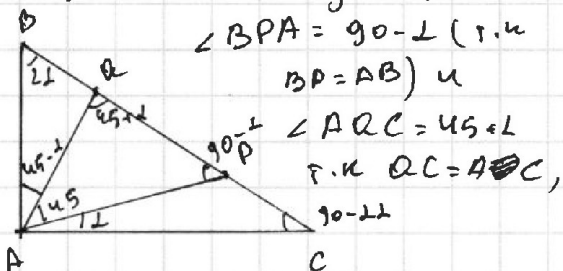
1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Решение: пусть угол $\angle B = 2x$; тогда $\angle C = 90 - 2x$
 проведем AQ, AP, DP . Посмотрим углы.

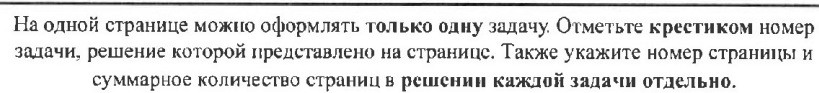


$\angle BPA = 90 - x$ (т.к. $BQ = AB$) и
 $\angle AQC = 45 + x$
 т.к. $QC = AC$,
 значит $\angle AQP = 180 - 90 - 45 - x - x = 45^\circ$, тогда заметим

что $QD = DP$ и $\angle QDP = 90^\circ$, тогда D - определяется как
 центр опис. окружности ΔAQP , тогда $AD = DQ = DP$
 как радиус опис. окружности. тогда $\angle DQA = \angle DPA$
 заметим что $ABQD$ - вписанный т.к. $\angle ADQ = 180 - 2x$;
 а $\angle B = 2x$, и $ADPC$ - вписанный т.к. $\angle ADP = 90 + x$;

$\angle C = 90 - 2x$, тогда по условию сказано что $\angle DBC = 35^\circ$
 $\angle QAD = \angle DBA$ - из вписанности $\angle D = 35^\circ$, тогда

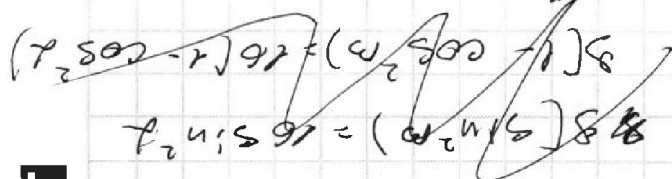
$\angle DBC = \angle DCB = 45 - x = 10^\circ$ Ответ: 10



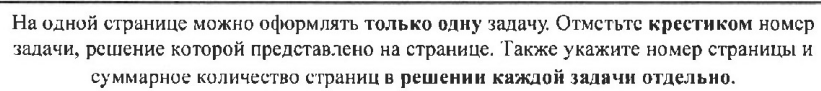
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



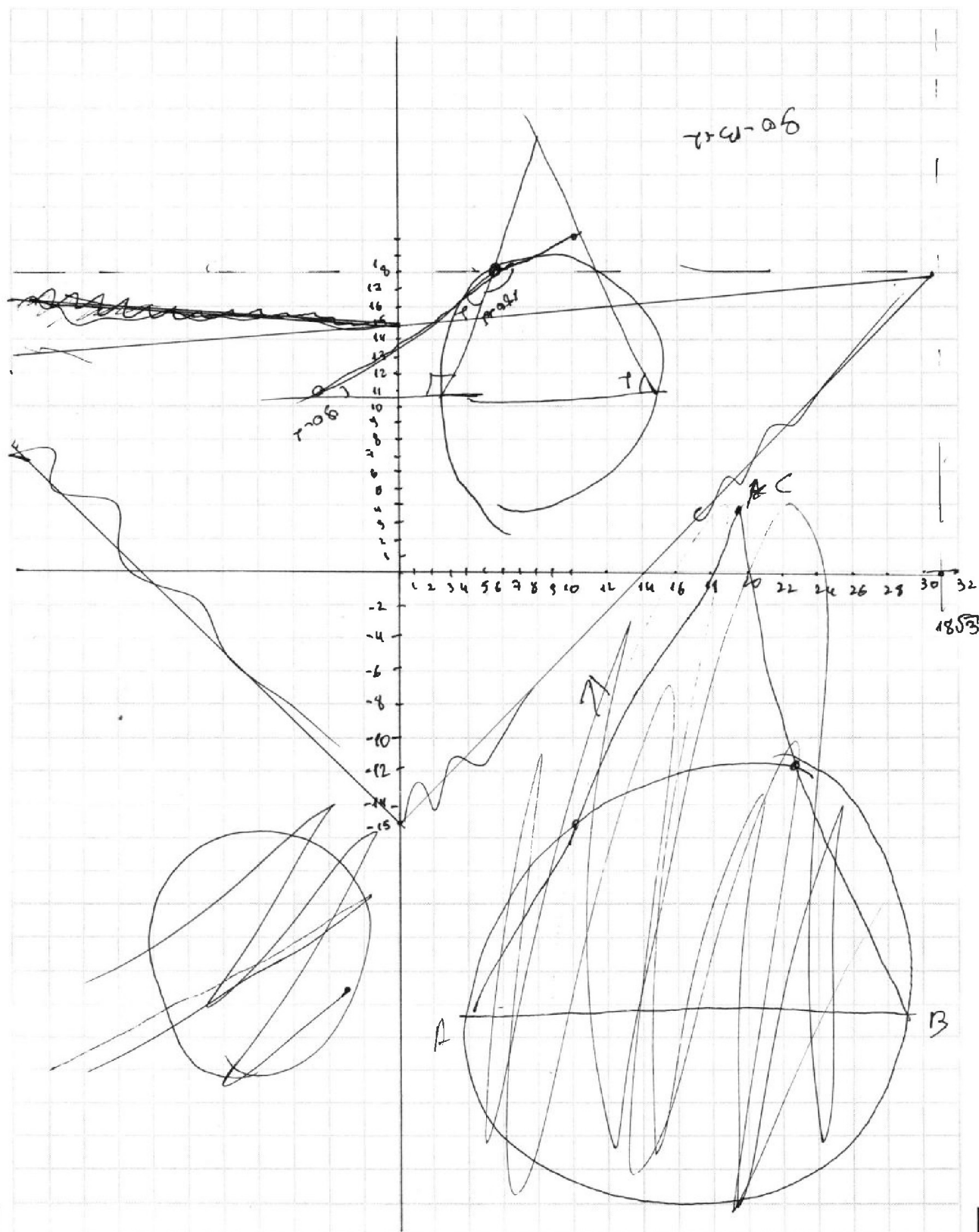
$$\frac{8}{99} = \left(\frac{3}{n} \right) = \frac{2 \cdot 1 \cdot 8}{7 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 8}$$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(x_1 + 10)(x_1 + 40) = x_1^2 + 120x_1 + 70x_1$$

$$(x_1 + 0)(x_1 + 70) = x_1^2 + 80x_1 + 70x_1$$

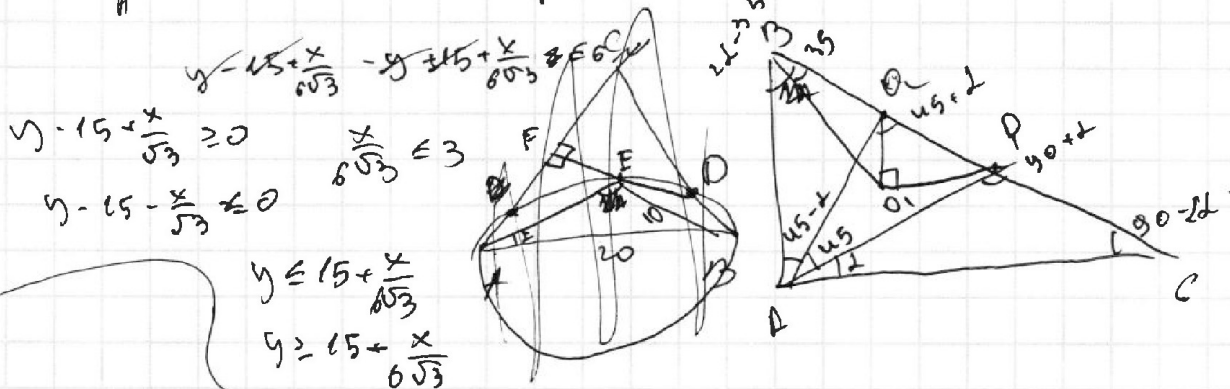
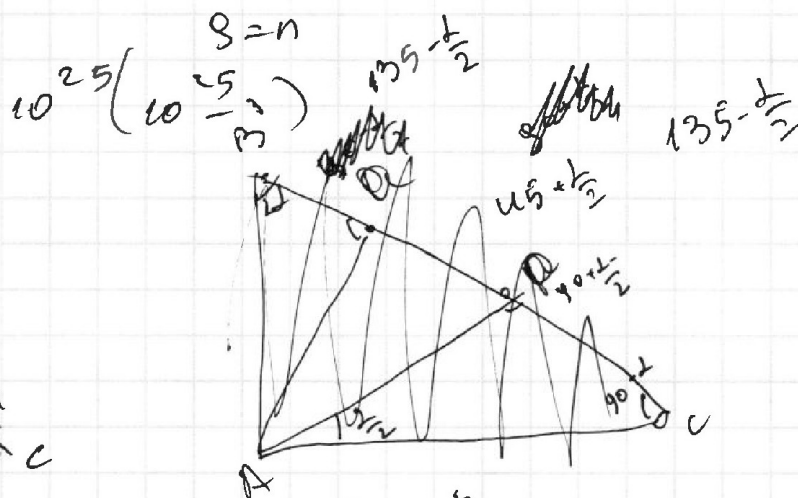
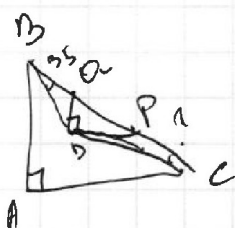
$$3 \cdot 5$$

$$C_5^5 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$3 \cdot 2$$

$$3$$

$$n=3$$



$$1) y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \geq 0$$

$$y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \geq 0$$

$$y \leq 18 \Rightarrow 3 \leq \frac{x}{6\sqrt{3}} \leq 43$$

$$2) y \leq 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}$$

$$y \geq 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}$$

$$\frac{7}{10} \cdot 18 = \frac{70 + 56}{10} = 12,6 + 5,6 = 18,2$$

$$1,7 \cdot 18 =$$

$$x \cdot y \cdot z \cdot y \cdot z$$

$$y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \leq 0 \quad y \leq$$

$$y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \leq 0$$

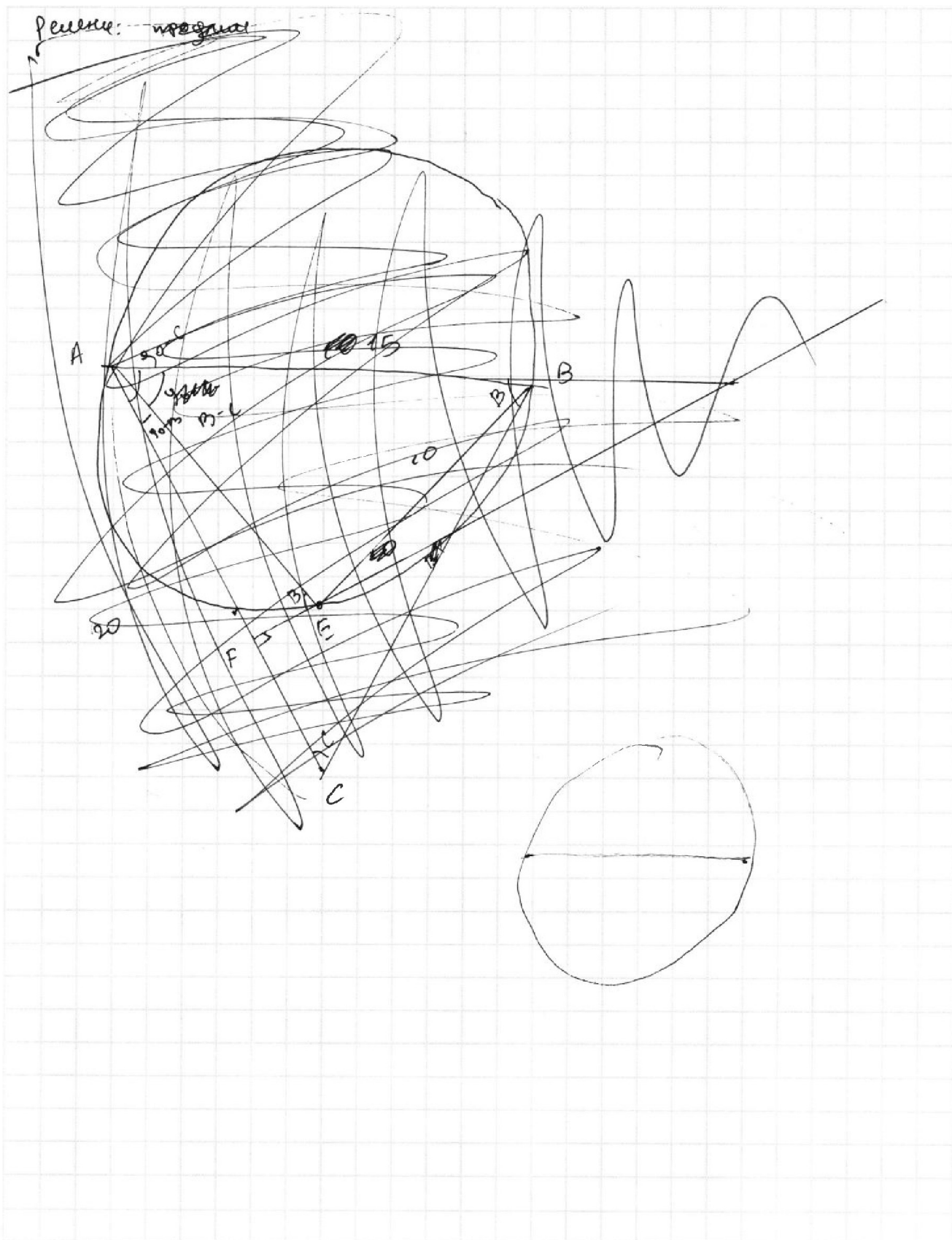


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$xy + yz + zx = 4y + 4x + 4z + z^2 + x^2 + y^2 \text{ добавим } 16 \cdot 3 + 4(y+x+z),$$

$$16 \cdot 3 + 4(-4) = (x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$$

$$16 \cdot 2 = (x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$$

Ответ: 32



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

