



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.
4. [4 балла] В теленуре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарик. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leq 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x, y, z \neq 0$$

$$\begin{cases} (1) & z^2 + 3z = xy \\ (2) & x^2 + 3x = yz \\ (3) & y^2 + 3y = zx \end{cases}$$

Из нер-ва о средних: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$
Сложим все 3 равенства:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3(x + y + z) = xy + xz + yz. \text{ Это возможно только при } 3(x + y + z) \leq 0 \Rightarrow x + y + z \leq 0$$

Пусть $x^2 + y^2 + z^2 = a$; $x + y + z = b$ $xy + xz + yz = c$, тогда:
 $a + 3b = c$
 $b \leq 0, a \geq 0$ (т.к. сумма кв.)

Заметим, что: $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz \Rightarrow$
 $\Rightarrow b^2 = a + 2c$, откуда:

$$\begin{cases} a + 3b = c \\ b^2 = a + 2c \\ a \geq 0; b \leq 0 \end{cases}$$

Подставим первое во второе:

$$b^2 = 3a + 6b \Rightarrow b^2 - 6b - 3a = 0, \text{ решим кв. ур. относительно}$$

$$b: D = 36 - 4(-3a) = 36 + 12a$$

$$b = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 12a}}{2} = 3 \pm \sqrt{9 + 3a}, \text{ т.к. } b \leq 0, \text{ то}$$

$$b = 3 - \sqrt{9 + 3a} \quad \leftarrow \text{запишем } (3)$$

Теперь рассмотрим (2) - (3): на след. стр.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{2} - \textcircled{1}^{\leftarrow \textcircled{3}}: \begin{aligned} x^2 - y^2 + 3(x - y) &= z(y - x) \\ (x - y)(x + y) + 3(x - y) &= -z(x - y) \end{aligned}$$

Рассмотрим 2 случая:

1) $x - y = 0 \Rightarrow x = y$. Рассмотрим $\textcircled{2} + \textcircled{3}$:

$$x^2 + 3x + y^2 + 3y = yz + zx \Rightarrow 2x^2 + 6x = 2zx, \text{ т.к. } x \neq 0:$$

$$2x + 6 = 2z \Rightarrow z = x + 3 \leftarrow \text{подставим в } \textcircled{1}:$$

$$\begin{aligned} x^2 + 3z &= x^2 \Rightarrow (x + 3)^2 + 3(x + 3) = x^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 + 6x + 9 + 3x + 9 &= x^2 \Rightarrow 9x = -18 \Rightarrow x = -2; \quad x = y = -2, z = 1 \end{aligned}$$

Заметим, что при замене $x \rightarrow y, y \rightarrow z, z \rightarrow x$ (ответ) не меняется, симметрично. (из $x, y, z = -2$, оставшийся $= 1$)

$$\text{Тогда } (x + 3)^2 + (y + 3)^2 + (z + 3)^2 = 1^2 + 1^2 + 4^2 = 18$$

$$2) x \neq y: x + y + 3 = -z \Rightarrow x + y + z = -3 \Rightarrow b = -3$$

Исполним, что $b = 3 - \sqrt{9 + 3a}$, тогда:

$$-3 = 3 - \sqrt{9 + 3a} \Rightarrow 6 = \sqrt{9 + 3a} \Rightarrow 36 = 9 + 3a \Rightarrow a = 9, \text{ заметим,}$$

$$\text{что: } (x + 3)^2 + (y + 3)^2 + (z + 3)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 6(x + y + z) + 27 =$$

$$= a + 6b + 27$$

$$\text{Тогда ответ: } 9 - 3 \cdot 6 + 27 = 18$$

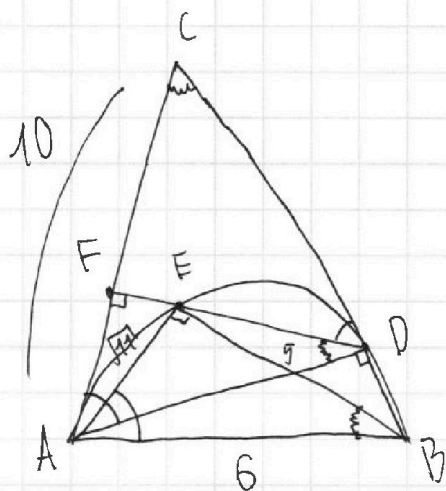
Ответ: 18



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☒4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$BE = 5; AF = ?$$

1) Проведём AE и AD , тогда $\angle AED = \angle ADB = 90^\circ$ (рис. уны опис. на унм.)

2) По т. Пифагора уны $\triangle AEB$: $AE^2 = AB^2 - BE^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow AE = \sqrt{6^2 - 5^2} = \sqrt{11}$

3) Посчитаем уны (пусть $(-\alpha)$ $\leftarrow$ на рис. $\approx (90 - \alpha)$):

3.1) Пусть $\angle FDC = \alpha$, тогда $\angle FCD = 90 - \alpha$.

3.2) П.к. $\angle ADE = 180^\circ - \angle ADB = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$, то $\angle FDA = 90^\circ - \angle FDC = 90 - \alpha$

3.3) $\triangle FDA$ (прямоу.) $\angle FDA = 90 - \alpha \Rightarrow \angle FAD = \alpha$

3.4) $AEDB$ - вписан в ω , тогда $\angle EDA = \angle EBA = 90 - \alpha$ (по св. впис. четырёху.)

3.5) $\triangle AEB$ (прямоу.): $\angle EBA = 90 - \alpha \Rightarrow \angle EAB = \alpha$

4) Заметим, что $\triangle AEB \sim \triangle AFD \sim \triangle CFD$ (по 2 унм.), тогда:

$$\text{из } \triangle CFD \sim \triangle AEB: \frac{EC}{EB} = \frac{ED}{AE} \Rightarrow FD = \frac{\sqrt{11} \cdot EC}{5}$$

$$\text{из } \triangle AFD \sim \triangle AEB: \frac{AF}{AE} = \frac{ED}{EB} \Rightarrow AF = \frac{\sqrt{11} \cdot FD}{5} = \frac{11 \cdot EC}{25}$$

5) на след. стр.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} 5) \quad AC &= AF + FC = 10 \Rightarrow \frac{11FC}{25} + FC = 10 \Rightarrow \\ &\Rightarrow FC \left(\frac{11+25}{25} \right) = 10 \Rightarrow FC = \frac{250}{36} \text{ монет;} \\ AF &= AC - FC = 10 - \frac{250}{36} = \frac{360 - 250}{36} = \frac{110}{36} = \frac{55}{18} \\ \text{Ответ: } &\frac{55}{18} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пять вероят. в случае: P_1 , во втором P_2 .

$\square \quad \square \quad \square \quad \dots$
 $\square \quad \square \quad \square \quad \dots \leftarrow n \text{ штук}$

Рассмотрим 1 случай:

кол-во способов выбрать 3 правильные и 2 неprav. коробки (те в кот. нет марки): C_{n-3}^2

кол-во способов выбрать случайные 5: C_n^5

Погда: $P_1 = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}$

Аналогично для 2 случая: $P_2 = \frac{C_{n-3}^3}{C_n^6}$

Погда ответом в задаче будет: $\frac{P_2}{P_1} = \frac{C_{n-3}^3 \cdot C_n^5}{C_{n-3}^2 \cdot C_n^6} =$

$$= \frac{(n-3)! \cdot 3! \cdot n! \cdot (n-5)! \cdot 2! \cdot (n-6)! \cdot 6!}{(n-6)! \cdot 3! \cdot (n-5)! \cdot 5! \cdot (n-3)! \cdot n!} = \frac{6! \cdot 2!}{5! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 2}{3 \cdot 2} = 2$$

Ответ: в 2 раза



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть арифм. прогрессия выглядит так:

$$b_1, b_1 + d, b_1 + 2d, b_1 + 3d, b_1 + 4d, b_1 + 5d, b_1 + 6d, b_1 + 7d, \dots$$

$d \neq 0$

① $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0 \leftarrow$ корни b_5 и b_6

② $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0 \leftarrow$ корни b_3 и b_8

D_1 -дискр. ① D_2 -②, $D_1, D_2 \geq 0$ - т.к. 2 корня, проверим после найдем a

По теор. Виета:

①: $b_5 + b_6 = b_1 + 4d + b_1 + 5d = 2b_1 + 9d = a^2 - a$

②: $b_3 + b_8 = 2b_1 + 9d = \frac{a^3 - a^2}{4}$

Получим: $a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{4} \Rightarrow 4a^2 - 4a = a^3 - a^2$

Если $d=0$: $x^2 - 5 = 0 \quad x = \pm \sqrt{5} \leftarrow b_5, b_6$
 $4x^2 - 4 = 0 \quad x = \pm 1 \leftarrow b_3, b_8$

Т.к. $d \neq 0$, то арифм. прогрессия или убывает или возрастает, тогда только 2 вар.:

1) b_3, b_5, b_6, b_8 , тогда 1) $b_5 - b_3 = \sqrt{5} - 1 = 2d$
 $b_8 - b_6 = 1 - \sqrt{5} = d = -2\sqrt{5}$, но

2) $-1 - \sqrt{5}, \sqrt{5}, 1$

$\sqrt{5} - 1 \neq -4\sqrt{5}$, противоречие
~~аналогично для 2)~~

Значит $a \neq 0$.

Продол. на след. стр.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4a^2 - 4a = a^3 - a^2, a \neq 0$$

$$4a - 4 = a^2 - a \Rightarrow a^2 - 5a + 4 = 0$$

$$a = 1/4$$

Остается проверить, что $D_1 \geq 0, D_2 \geq 0$

$$D_1 = (a^2 - a)^2 - 4(a - 5) \quad a=1: >0 \quad a=4: 12^2 + 4 > 0$$

$$D_2 = (a^3 - a^2)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (2a^4 + 2a^2 - a^6 - 1) \quad a=1: >0$$

$$a=4: 48^2 - 16 \cdot (512 + 32 - 2^{12} - 4) > 0 \quad \checkmark$$

Ответ: 1; 4



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|a+b| + |a-b| \leq 3$$

$$a = x - \frac{19}{2} \quad b = \frac{y}{6\sqrt{31}}$$

$$1) a+b \geq 0 \quad a-b \geq 0: 2a \leq 3 \quad a \leq \frac{3}{2}$$

$$2) a+b \geq 0 \quad a-b < 0: a \geq -b \quad a < b: 2b \leq 3$$

$$b \leq \frac{3}{2}$$

$$3) a+b < 0 \quad a-b \geq 0: a < -b \quad a \geq b: -2b \leq 3$$

$$b \geq -\frac{3}{2}$$

$$4) a+b < 0 \quad a-b < 0: a < -b \quad a > b: -2a \leq 3$$

$$a \geq -\frac{3}{2}$$

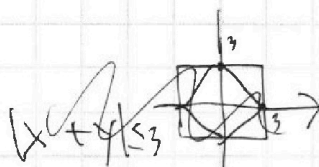
$$1) x - \frac{19}{2} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow x \leq \frac{18}{2} = 9$$

$$2) \frac{y}{6\sqrt{31}} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow y \leq \frac{18\sqrt{31}}{2} = 9\sqrt{31}$$

$$3) \frac{y}{6\sqrt{31}} \geq -\frac{3}{2} \Rightarrow y \geq -9\sqrt{31}$$

$$4) x \geq 9$$

↑
построили график





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

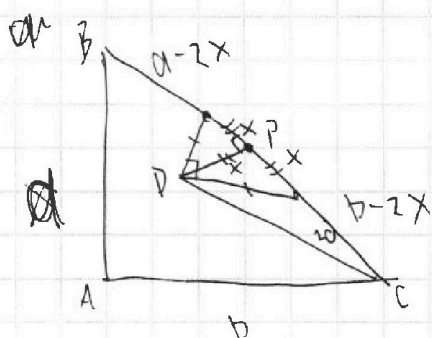
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$GQ = QP = x \quad QP = \sqrt{2}x = \sqrt{2}x$$



$$a^2 + b^2 = (a + \cancel{2a})^2 + (b - 2x)^2 =$$

$$a^2 + b^2 = a^2 + b^2 - 8bx + 4x^2 \Rightarrow$$

$$x^2 = 2bx \Rightarrow x = 2b$$

$$a^2 + b^2 = (a + b - 2x)^2 =$$

$$a^2 + b^2 = a^2 + b^2 + 4x^2 + 2ab - 4bx - 4ax$$

$$4bx + 4ax = 4x^2 + 2ab$$

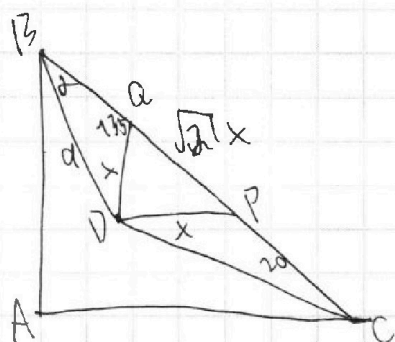
$$2bx + 2ax = 2x^2 + ab$$

$$PC \cdot \sin 20^\circ = DP = x$$

$$x^2 + (b - x)^2 = PC^2 = \frac{x^2}{\sin^2 20^\circ} \Rightarrow x^2 + b^2 - 2bx + x^2 = \frac{x^2}{\sin^2 20^\circ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 - \frac{x^2}{\sin^2 20^\circ} - 2bx + b^2 = 0$$

$$D = 4b^2 - 4 \cdot \left(2 - \frac{1}{\sin^2 20^\circ}\right) \cdot b^2$$



$$\frac{DP}{\sin 20^\circ} = DC = \frac{x}{\sin 20^\circ}$$

$$\frac{a}{\sin 135^\circ} = \frac{x}{\sin 20^\circ} \quad \frac{a}{\sin 20^\circ} = \frac{x}{\sin 20^\circ \cdot \sin 20^\circ} \Rightarrow x = \frac{x}{\sin 20^\circ}$$

$$\frac{x}{\sin 20^\circ \cdot \sin 135^\circ} = \frac{x}{\sin 20^\circ}$$

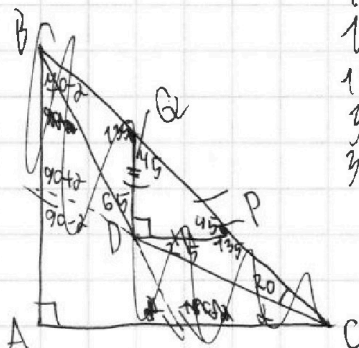
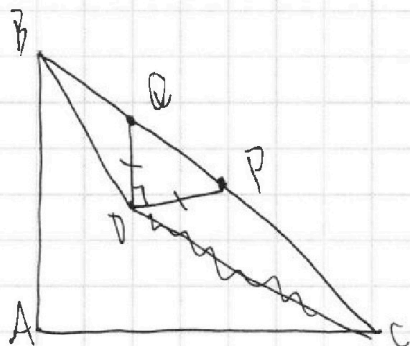


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

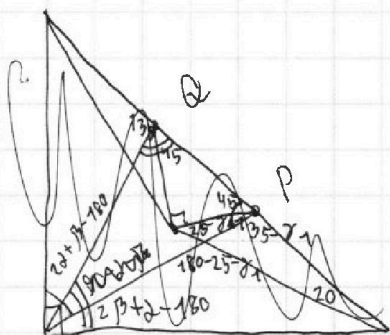
СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



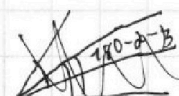
$$\begin{aligned}180 - 45 &= 135 \\180 - 155 &= 25 \\180 - 20 - 90 - 2 &= 40 - 2 \\360 - 40 + 2 - 135 - 90 - 2 &= \\360 - 205 - 90 &= 65\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}360 + 25 - 135 - 20 - 2 &= \\= 360 - 180 - 2 &= 180 - 2 \\40 - 2 - 90 + 2 &= -20\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}90 &= 45 + \alpha + \beta \\ \alpha &= 45 + \beta \\ \beta &= 45 + \alpha \\ 180 - 90 - \alpha - \beta &= 90 - \alpha - \beta \\ 180 - \alpha - \beta &= 90\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta - 180 + \alpha + \beta &= 2\beta + \alpha - 180 \\ \alpha - 180 + \alpha + \beta &= 2\alpha + \beta - 180\end{aligned}$$



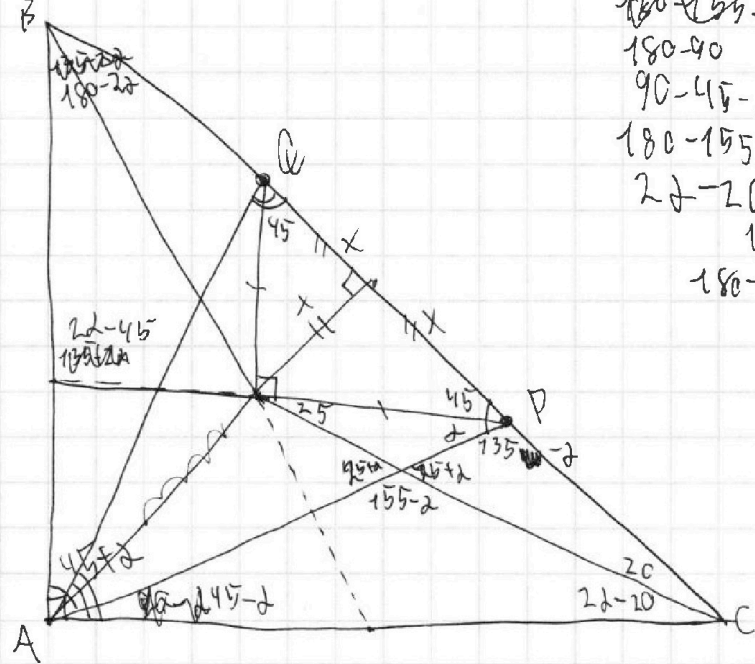
$$\begin{aligned}2\beta + \alpha &> 180 \\ 2\alpha + \beta &> 180 \\ 3\beta + 3\alpha &> 360 \\ \beta + \alpha &> 120\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}180 - 2\beta - \alpha + 180 - 180 + 25 + \alpha &= \\= 180 - 2\beta - \alpha + 25 + \alpha &= 180 - 2\beta + 25\end{aligned}$$

$$180 - 45 = 135$$

$$180 - 155 - 90 - 2 =$$

$$\begin{aligned}180 - 90 \\ 90 - 45 - 2 \\ 180 - 155 + 2 - 45 + 2 &= \\ 22 - 20 &= 2 \\ 180 - 155 + 2 &= 27 \\ 180 - 180 + 22 - 45 &= -20\end{aligned}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

и корабль
в 3 часа уйдет из
порта открываю 9 ч., если в мир
3 ч. поезда
Теперь ирок отк. 6, ~~на~~ по сколько
увелич. вероят. выиг.

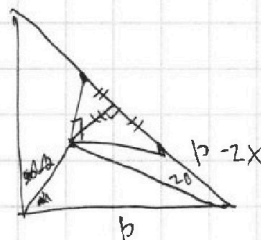
вероят. до: P_1 после: P_2

1) Кол. во выборах правильные $\square \square$ и еще 2: C_{n-3}^2
кол. случайно: C_n^5 вероят.: $\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}$

$$P_2 = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{C_{n-3}^2 \cdot C_n^5}{C_n^6 \cdot C_{n-3}^2} = \frac{(n-3)! \cdot n! \cdot (n-6)! \cdot 6! \cdot (n-5)! \cdot 2!}{(n-6)! \cdot 3! \cdot (n-5)! \cdot 5! \cdot n! \cdot (n-3)!} = \frac{6! \cdot 2!}{3! \cdot 5!} =$$

$$= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 2 \checkmark$$



$$\left| x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| + \left| x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| \leq 3$$

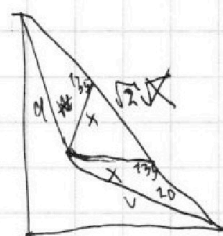
$$1) x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} < 0; y < 0; -x + \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}$$

$$\begin{matrix} -10 < -5 \\ -10 \end{matrix}$$

$$|a+b| + |a-b| \leq 3$$

$$1) a+b < 0 \Rightarrow \bar{a} < -b, \begin{matrix} -5 & 1 & -1 & 5 \\ a-b & & a-b & \\ -4 & & 4 & \end{matrix}$$

$$1) a+b > 0 \Rightarrow b > -a, a-b > 0 \Rightarrow a > b$$



$$\frac{a}{\sin 135} = \frac{x}{\sin 2} \quad \frac{a}{\sin 20} =$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0 \leftarrow \text{корни } b_5, b_6 \text{ арифм. пр. } (b_1 + 4d; b_1 + 5d) \quad d \neq 0$$

$$14x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0 \leftarrow \text{корни } b_1 + 2d; b_1 + 4d$$

$$D_1 = a^4 - 2a^3 + a^2 - 4a + 20 \geq 0 \quad D_2 \geq 0$$

$$a=0: x^2 - 5 = 0 \quad x = \pm\sqrt{5}$$

$$4x^2 - 4 = 0 \quad x = \pm 1$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} b_1 + 4d + b_1 + 5d = \frac{a^2 - a}{1} = a^2 - a \Rightarrow 2b_1 + 9d = a^2 - a \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} b_1^2 + 9b_1d + 20d^2 = a - 5 = (b_1 + 4d)(b_1 + 5d) \end{cases}$$

$$b_5 = -\sqrt{5} \quad b_6 = \sqrt{5}$$

$$b_3 = -1 \quad b_4 = +1$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} 2b_1 + 9d = \frac{a^2 - a}{1} \end{cases}$$

$$-1 \quad -\sqrt{5} \quad \sqrt{5} \quad 1$$

$$\textcircled{5} \begin{cases} b_1^2 + 9b_1d + 14d^2 = \frac{2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4}{4} \end{cases}$$

$$\begin{matrix} b_3 & b_5 & b_6 & b_8 \\ + & + & - & - \\ - & - & + & + \end{matrix}$$

$$1 \quad \sqrt{5} \quad -\sqrt{5} \quad 1$$

$$a=0$$

$$\textcircled{1} = \textcircled{3} \Rightarrow a^3 - a^2 = 4a^2 - 4a$$

$$a^2 - a = 4a - 4$$

$$a^2 - 5a + 4 = 0$$

$$a = 1/4 \leftarrow \text{проверка}$$

$$n = \underbrace{1000 \dots 0}_{4000 \text{ нулей}} - 1$$

$$n^3 = (a-1)^3 = a^3 - 3a^2 + 3a - 1$$

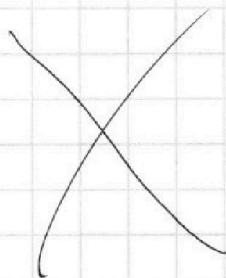
$$a = 1/4$$

$$-1000 \dots 00 \leftarrow 420000 \text{ нулей}$$

$$(a-1)^2 = (a^2 - 2a + 1)(a-1) =$$

$$= a^3 - 2a^2 + a - a^2 + 2a - 1 =$$

$$= a^3 - 3a^2 + 3a - 1$$



$$\begin{array}{r} 1:000 \dots 000:000 \dots 000:000 \dots 000 \\ 3:000 \dots 000:000 \dots 000 \\ + 1:999 \dots 999:000 \dots 000:000 \dots 000 \\ 3:000 \dots 000 \\ - 999 \dots 999:000 \dots 000:000 \dots 000 \\ 1 \\ 1:999 \dots 999:000 \dots 000:000 \dots 000 \\ 3:000 \dots 000 \\ - 999 \dots 999:000 \dots 000:000 \dots 000 \\ 1 \\ 1:999 \dots 999:000 \dots 000:000 \dots 000 \\ 3:000 \dots 000 \\ - 999 \dots 999:000 \dots 000:000 \dots 000 \\ 1 \end{array}$$

$$499999 \checkmark$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Поря QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x^2 + 3z = xy \\ x^2 + 3x = yz \\ y^2 + 3y = zx \end{cases}$$

$$y^2 + 2yz + z^2 = (y+z)^2$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} + 2\textcircled{3} = z^2 + y^2 + 3z + 3y + 2yz = x^2 + 3x + xy + zx$$

$$(z+y)^2 + 3(z+y) = x(x+3+y+z)$$

$$(z+x)^2 + 3(z+x) = z(x+y+z+3)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3(x+y+z) = xy + yz + zx$$

$$x + y + z \leq 0$$

$$b \leq 0 \quad a \geq 0$$

$$a + 3b = 0$$

$$b = a + 24$$

$$b^2 = 3a + 6b$$

$$b^2 - 6b - 3a = 0$$

$$a = \frac{36 + 12a}{2}$$

$$b = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 12a}}{2} = 3 \pm \sqrt{9 + 3a} \leq 0 \Rightarrow b = 3 - \sqrt{9 + 3a}$$

$$\text{Ответ: } a + 6b + 24$$

$$\textcircled{1} x^2 + y^2 + 3(x+y) = z(x+y)$$

$$x^2 - y^2 + 3(x-y) = z(y-x) = (x-y)(x+y) + 3(x-y) = -z(x-y)$$

$$x + y + 3 = -z \Rightarrow x + y + z = -3$$

$$x = y$$

$$b = 6 = \frac{36 + 12a}{2} \Rightarrow 36 = 9 + 3a \Rightarrow 3a = 27 \Rightarrow a = 9$$

$$\text{Ответ: } 9 + 36 + 24 =$$

$$x = y; 2x^2 + 6x = z \cdot 2x \Rightarrow 2x + 6 = 2z \Rightarrow x - z = -3 \Rightarrow z = x + 3 = 1$$

$$\textcircled{2} x^2 + 3x = x(x+3) \Rightarrow x+3 = x^2 + 6x + 9 + 3x + 9 = x^2 \Rightarrow 9x = -18 \Rightarrow x = -2$$

$$2) 1^2 + 1^2 + 4^2 = 18 \quad \text{Ответ: } 18/72$$

$$\begin{aligned} &= 18 \\ &9 - 6 \cdot 3 + 24 \\ &- 9 + 24 = 18 \end{aligned}$$

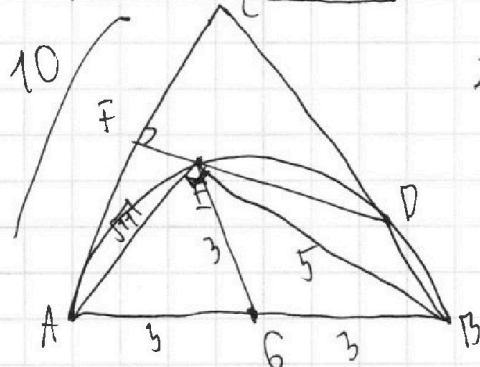
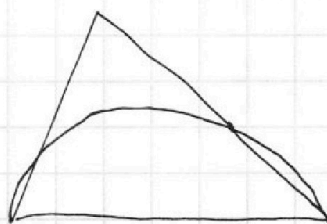
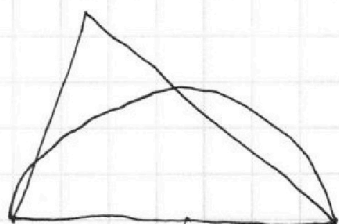
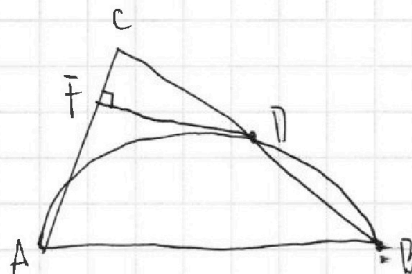
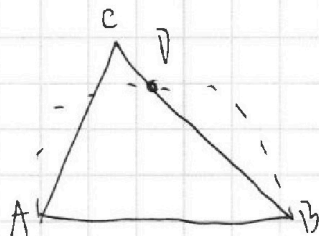


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

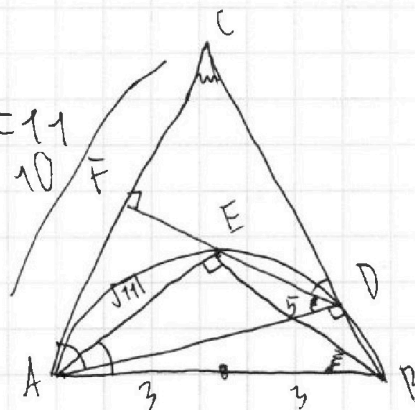
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



AF-?

$$36 - 25 = 11$$



$$AF = \frac{FD \cdot \sqrt{11}}{5} = \frac{11 \cdot FC}{25}$$

$$AF + FC = 10$$
$$FC \left(\frac{25+11}{25} \right) = 10 \Rightarrow FC = \frac{250}{36}$$

$$AF = \frac{360 - 250}{360} = \frac{110}{360}$$

$$\frac{55}{18}$$

$$\triangle AFD \sim \triangle AEB: \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{FD}{EB}$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{FD}{EB}$$

$$\triangle CFD \sim \triangle AEB:$$

$$\frac{FC}{EB} = \frac{FD}{AE} \Rightarrow FD = \frac{\sqrt{11} \cdot FC}{5}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases}$$

$$x, y, z \neq 0$$

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = ?$$

$$xy + yz + zx \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{y^2 + z^2 + x^2} = x^2 + y^2 + z^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3(x + y + z) = xy + yz + zx$$

$$x + y + z \leq 0$$

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

$$(x + y + z)^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2) + 6(x + y + z)$$

$$3z + z^2 + 3x + x^2 = xy + yz \quad z^2 + x^2 = (x + z)(y - 3)$$

$$\text{максимум: } x^2 + y^2 + z^2 + 6(x + y + z) + 27 = ?$$

$$a + 3b = c$$

$$b^2 = a + 3c \Rightarrow b^2 = 3a + 6b$$

$$b^2 - 6b - 3a = 0$$

$$\Delta = 36 + 12a$$

$$b = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 12a}}{2} = 3 \pm \sqrt{3a + 3}$$

$$a + 3a \geq 0 \Rightarrow \sqrt{3a + 3} \geq 3 \Rightarrow \sqrt{3a + 3} \geq 3$$

$$3a \geq 0$$

$$3a \geq 0 \quad a \geq 0$$

$$n = \underbrace{999 \dots 99}_{40000}$$

n^3 -значная

$$\begin{array}{r} 899 \\ \times 899 \\ \hline 8091 \\ 8091 \\ 8091 \\ \hline 89991 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 888 \\ 89991 \\ \times 899 \\ \hline 809919 \\ 809919 \\ 809919 \\ \hline 8990109 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 9 \\ 81 \\ \hline 729 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8,88 \\ \times 9,999 \dots 999 \\ \hline 88,888 \dots 888 \\ 888,888 \dots 888 \\ \hline 888,888 \dots 888,888 \end{array}$$

$$1 \quad 2 \quad 40000$$

$$a + 10a + \dots + 10^{40000} \cdot a$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ + 899999991 \\ 899999999 \\ \hline 899999999 \end{array}$$

$$001$$

