

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичную запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.
4. [4 балла] В теленгра ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарику. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leq 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипotenузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отмечьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x, y, z \neq 0$$

$$\begin{cases} ① \\ ② \\ ③ \end{cases} \begin{cases} z^2 + 3z = xy \\ x^2 + 3x = yz \\ y^2 + 3y = zx \end{cases}$$

Из первых 3 уравнений: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$
Суммируем все 3 равенства:

$x^2 + y^2 + z^2 + 3(x+y+z) = xy + xz + yz$. Это возможно
только при $3(x+y+z) \leq 0 \Rightarrow x+y+z \leq 0$

Пусть $x^2 + y^2 + z^2 = a$; $x+y+z = b$; $xy + xz + yz = c$, тогда:
 $a + 3b = c$
 $b \leq 0, a \geq 0$ (м.к. сумма кв.)

Заметим, что: $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz \Rightarrow$
 $\Rightarrow b^2 = a + 2c$, отсюда:

$$\begin{cases} a + 3b = c \\ b^2 = a + 2c \\ a \geq 0; b \leq 0 \end{cases}$$

Представим первое во второе:

$b^2 = 3a + 6b \Rightarrow b^2 - 6b - 3a = 0$, решим кв. ур. относительно b :

$$b: D = 36 - 4(-3a) = 36 + 12a$$

$$b = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 12a}}{2} = 3 \pm \sqrt{9 + 3a}, \text{ м.к. } b \leq 0, \text{ то}$$

$$b = 3 - \sqrt{9 + 3a}$$

запомним $\textcircled{3}$

Теперь рассмотрим $\textcircled{2} - \textcircled{3}$: мы сдел. сокр.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} : \begin{aligned} x^2 - y^2 + 3(x-y) &= z(y-x) \\ (x-y)(x+y) + 3(x-y) &= -z(x-y) \end{aligned}$$

Рассмотрим 2 случая:

1) $x-y=0 \Rightarrow x=y$: Рассмотрим $\textcircled{2} + \textcircled{1}$:

$$x^2 + 3x + y^2 + 3y = y^2 + z + zx \Rightarrow 2x^2 + 6x = 2zx, \text{ т.к. } x \neq 0:$$

$$2x + 6 = 2z \Rightarrow z = x + 3 \leftarrow \text{поставим в } \textcircled{2} \text{ и } \textcircled{1}:$$

$$\begin{aligned} x^2 + z^2 + 3z &= x^2 \Rightarrow (x+3)^2 + 3(x+3) = x^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 + 6x + 9 + 3x + 9 &= x^2 \Rightarrow 9x = -18 \Rightarrow x = -2; x = y = -2; z = 1 \end{aligned}$$

Заметим, что при замене $\begin{matrix} x \rightarrow y, x \rightarrow z \\ y \rightarrow x, z \rightarrow x \end{matrix}$ (символ) ничего не изменяется, симметрия. (из $x, y, z = -2$, осталось $= 1$)

$$\text{Проверка: } (x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = 1^2 + 1^2 + 4^2 = 18$$

$$2) x \neq y: x+y+3 = -z \Rightarrow x+y+z = -3 \Rightarrow b = -3$$

Используем, что $b = 3 - \sqrt{9+3a}$, тогда:

$$-3 = 3 - \sqrt{9+3a} \Rightarrow 6 = \sqrt{9+3a} \Rightarrow 36 = 9+3a \Rightarrow a = 9, \text{ заменим},$$

$$\text{Что: } (x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 6(x+y+z) + 24 =$$

$$= a + 6b + 24$$

$$\text{Проверка ответа: } 9 - 3 \cdot 6 + 24 = 18$$

Ответ: 18

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметили, что: $n = \underbrace{999\dots9}_{40000} = \underbrace{100\dots0}_{40001} - 1$, тогда:

Пусть $\underbrace{100\dots0}_{40001} = a$, тогда $n = a - 1$, а $n^3 = (a - 1)^3$

$$n^3 = (a - 1)^3 = a^3 - 3a^2 + 3a - 1$$

Подсчитаем в столбик:

$$\begin{array}{r} a^3 - 3a^2 + 3a - 1 \\ + 999\dots994\overline{000\dots000} \\ \hline 999\dots994\overline{000\dots003}000\dots000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a^3 - 3a^2 + 3a - 1 \\ + 999\dots994\overline{000\dots003}000\dots000 \\ \hline 999\dots994\overline{000\dots003}000\dots000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a^3 - 3a^2 + 3a - 1 \\ + 999\dots994\overline{000\dots003}000\dots000 \\ \hline 999\dots994\overline{000\dots003}000\dots000 \\ \quad \quad \quad 1 \\ \hline 999\dots994\overline{000\dots003}000\dots000 \\ \quad \quad \quad 40000 \end{array}$$

$$\text{Конл. } 99999 + 40000 = \underline{49999}$$

Ответ: 49999

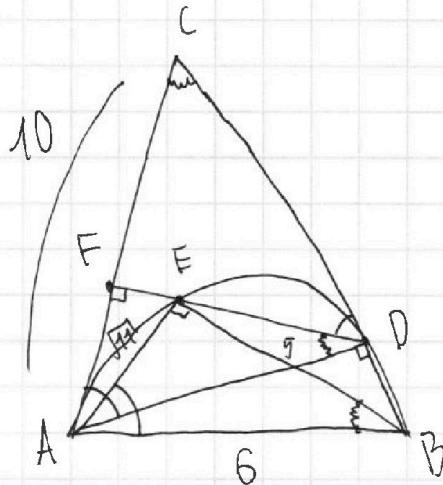


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$BE = 5 ; AF - ?$$

1) Проведём AE и AD , тогда $\angle AED = \angle ADB = 90^\circ$ (вн. углы
окр. на дугах.)

2) Из т. Тибратора для $\triangle AEB$: $AE^2 = AB^2 - EB^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow AE = \sqrt{6^2 - 5^2} = \sqrt{11}$

3) Постановка угла (пусть $(-\alpha)$ \leftarrow $- (90 - \alpha)$):

3.1) Пусть $\angle FDC = \alpha$, тогда $\angle FCD = 90 - \alpha$.

3.2) III, т.к. $\angle ADB = 180^\circ - \angle ADB = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$, то $\angle FDA = 90^\circ - \angle FDC =$
 $= 90 - \alpha$

3.3) В трап. FDA (прямоугл.) $\angle FDA = 90 - \alpha \Rightarrow \angle FAD = \alpha$

3.4) $AEDB$ - вписанные углы, тогда $\angle EDA = \angle EBA = 90 - \alpha$ (вн. углы
четвертей.)

3.5) В трап. $DAEB$: $\angle EBA = 90 - \alpha \Rightarrow \angle EAB = \alpha$

4) Заметим, что $\triangle AEB \sim \triangle AFD \sim \triangle CFD$ (вн. угл.), тогда:

из $\triangle CFD \sim \triangle AEB$: $\frac{EC}{EB} = \frac{FD}{AE} \Rightarrow FD = \frac{\sqrt{11} \cdot EC}{5}$

из $\triangle AFD \sim \triangle AEB$: $\frac{AF}{AE} = \frac{FD}{EB} \Rightarrow AF = \frac{\sqrt{11} \cdot FD}{5} = \frac{11FC}{25}$

5) На след. стр.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5) $AC = AF + FC = 10 \Rightarrow \frac{11FC}{25} + FC = 10 \Rightarrow$
 $\Rightarrow FC(\frac{11+25}{25}) = 10 \Rightarrow FC = \frac{250}{36}$, можно!
 $AF = AC - FC = 10 - \frac{250}{36} = \frac{360 - 250}{36} = \frac{110}{36} = \frac{55}{18}$
Ответ: $\frac{55}{18}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть вероят. в 1 случай: P_1 , во втором P_2 .

$\square \quad \square \quad \square \dots$
 $\square \quad \bullet \quad \square \dots \leftarrow$ и так далее

Геометрический случай:

Как - во способе выбрать 3 правильные и 2 неверн. коробки (те в ком. нет марки): C_{n-3}^2

Как - Во способе выбрать 5-ку: C_n^5

Анализ 1 случая: $P_1 = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}$

Анализ 2 случая: $P_2 = \frac{C_{n-3}^3}{C_n^6}$

Понадобится ответ на задаче будем: $\frac{P_2}{P_1} = \frac{C_{n-3}^3 \cdot C_n^5}{C_{n-3}^2 \cdot C_n^6} =$
 $= \frac{(n-3)! \cdot n! \cdot (n-5)! \cdot 2! \cdot (n-6)! \cdot 6!}{(n-6)! \cdot 3! \cdot (n-5)! \cdot 5! \cdot (n-3)! \cdot n!} = \frac{6! \cdot 2!}{5! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 2}{3 \cdot 2} = 2$

Ответ: в 2 раза

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть арифм. прогрессия будет иметь так:

$$b_1, b_1+d, b_1+2d, b_1+3d, b_1+4d, b_1+5d, b_1+6d, b_1+7d \dots$$

$$\text{1) } x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0 \leftarrow \text{корни } b_5 \text{ и } b_6$$

$$\text{2) } 4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0 \leftarrow \text{корни } b_3 \text{ и } b_8$$

D_1 -дискр. 1) $D_2 - D$, $D_1, D_2 \geq 0$ - м.н. 2 корня, проверка наше получ. д

По теор. квадр.:

$$\text{1) } b_5 + b_6 = b_1 + 4d + b_1 + 5d = 2b_1 + 9d = a^2 - a$$

$$\text{2) } b_3 + b_8 = 2b_1 + 9d = \frac{a^3 - a^2}{4}$$

$$\text{Из получ.: } a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{4} \Rightarrow 4a^2 - 4a = a^3 - a^2$$

$$\text{Если } d=0: \quad x^2 - 5 = 0 \quad x = \pm \sqrt{5} \leftarrow b_5, b_6 \\ 4x^2 - 4 = 0 \quad x = \pm 1 \leftarrow b_3, b_8$$

III. к. $d \neq 0$, то арифм. прогрессия или убывает или возрастает, тогда только 2 корн.:

$$\begin{array}{r} \frac{b_3}{1}, \frac{b_5}{\sqrt{5}}, \frac{b_6}{\sqrt{5}}, \frac{b_8}{1} \\ \hline 1, \sqrt{5}, -\sqrt{5}, 1 \end{array}, \text{ тогда 1) } b_5 - b_3 = \sqrt{5} - 1 = 2d \\ \text{или 2) } b_6 - b_5 = 1 - \sqrt{5} = 2d \Rightarrow d = -2\sqrt{5}, \text{ но} \\ \sqrt{5} - 1 = -4\sqrt{5} \text{ противоречие} \end{array}$$

$\sqrt{5} - 1 = -4\sqrt{5}$ противоречие
антидиагональю (доказ.)

значит $a \neq 0$.

Провер. на ср. стр.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4d^2 - 4a = d^3 - a^2, a \neq 0$$

$$4a - 4 = d^2 - a \Rightarrow a^2 - 5a + 4 = 0$$
$$a = 1/4$$

осталось проверить, что $D_1 > 0, D_2 > 0$

$$D_1 = (a^2 - a)^2 - 4(a - 5) \quad a=1: > 0 \quad d=4: 12^2 + 4 > 0$$

$$D_2 = (a^3 - a^2)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4) \quad a=1: > 0$$

$$a=4: 48^2 - 16 \cdot (512 + 32 - 2^6 - 4) > 0 \vee$$

Ответ: 1; 4



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|a+b| + |a-b| \leq 3 \quad a = x - \frac{15}{2} \quad b = \frac{y}{6\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} 1) & a+b \geq 0 \quad a \geq -b \quad a \geq b \\ & a-b \geq 0 \quad 2a \leq 3 \quad a \leq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$2) a+b \geq 0 \quad a-b < 0 \quad a \geq -b \quad a < b \quad -2b \leq 3 \quad b \leq \frac{3}{2}$$

$$3) a+b < 0 \quad a-b \geq 0 \quad a < -b \quad a \geq b \quad -2b \leq 3 \quad b \geq -\frac{3}{2}$$

$$4) a+b < 0 \quad a-b < 0 \quad a < -b \quad a > b \quad -2a \leq 3 \quad a \geq -\frac{3}{2}$$

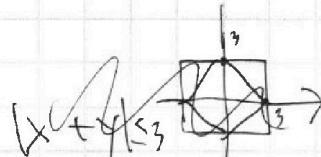
$$1) x - \frac{15}{2} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow x \leq \frac{18}{2} = 9$$

$$2) \frac{y}{6\sqrt{3}} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow y \leq \frac{18\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$$

$$3) \frac{y}{6\sqrt{3}} \geq -\frac{3}{2} \Rightarrow y \geq -9\sqrt{3}$$

$$4) x \geq 9$$

настригли график



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1

2

3

4

5

6

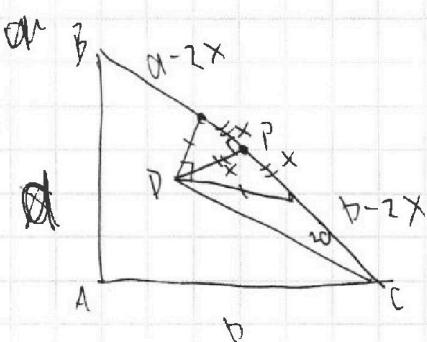
7

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$GQ = CP \Rightarrow CP = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{a^2 - 4x^2}$$



$$a^2 + b^2 = (a - 2x)^2 + (a - 2x)^2 =$$

$$a^2 + b^2 = a^2 + b^2 - 8ax + 4x^2 \Rightarrow$$

$$x^2 = 2bx \Rightarrow x = 2b$$

$$a^2 + b^2 = (a - b - 2x)^2 =$$

$$a^2 + b^2 = a^2 + b^2 + 4x^2 + 2ab - 4bx - 4ax$$

$$4bx + 4ax = 4x^2 + 2ab$$

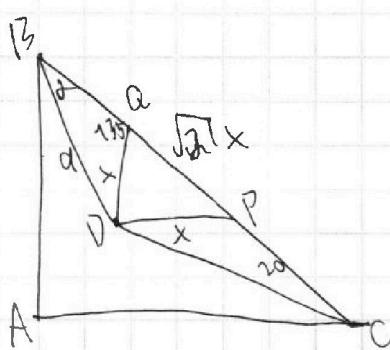
$$2bx + 2ax = 2x^2 + ab$$

$$DC \cdot \sin 20^\circ = DP = x$$

$$x^2 + (b - x)^2 = DC = \frac{x^2}{\sin^2 20^\circ} \Rightarrow x^2 + b^2 - 2bx + x^2 = \frac{x^2}{\sin^2 20^\circ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 - \frac{x^2}{\sin^2 20^\circ} - 2bx + b^2 = 0$$

$$D = 4b^2 - 4 \cdot \left(2 - \frac{1}{\sin^2 20^\circ} \right) \cdot b^2$$



$$DP \cdot \frac{1}{\sin 20^\circ} = DC = \frac{x}{\sin 20^\circ}$$

$$\frac{a}{\sin 135^\circ} = \frac{x}{\sin \alpha}$$

$$\frac{a}{\sin 20^\circ} = \frac{x}{\sin 20^\circ \cdot \sin \alpha} \Rightarrow a = \frac{x}{\sin \alpha}$$

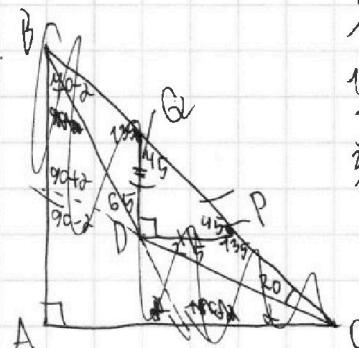
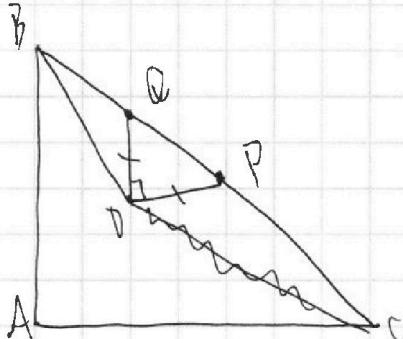
$$\frac{x}{\sin \alpha \cdot \sin 135^\circ} = \frac{x}{\sin \alpha}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

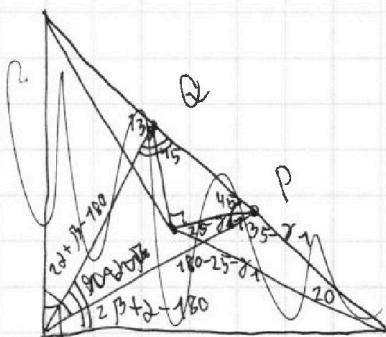
 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Нарча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} 180 - 45 &= 135 \\ 180 - 155 &= 25 \\ 180 - 20 - \alpha - \beta &= 40 - \gamma \\ 360 - 40 + \alpha + 135 + \gamma - 90 - \beta &= \\ 360 - 20 \gamma - 90 &= 65 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 135 + 25 - 135 - 20 - \beta &= \\ = 180 - \beta &= 180 - \beta \\ 40 + \alpha - 90 + \gamma &= -20 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 90 &= 45 + \alpha + \beta \\ \alpha &= 45 + \beta, \quad \beta = 45 + \alpha \\ 180 - \alpha - \beta - \gamma &= 90 - \alpha - \beta \\ 180 + \alpha + \beta - \gamma &= \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 180 - \alpha - \beta - \gamma &= 180 - \alpha - \beta - \gamma \\ = 180 - \alpha - \beta - \gamma &= 180 - \alpha - \beta - \gamma \end{aligned}$$

$$180 - 45 = 135$$

$$\begin{aligned} 2\beta + \gamma &> 180 \\ 2\alpha + \gamma &> 180 \\ 3\beta + \gamma &> 360 \\ \beta + \gamma &> 120 \end{aligned}$$

$$160 - 155 - \alpha - \beta =$$

$$180 - 90$$

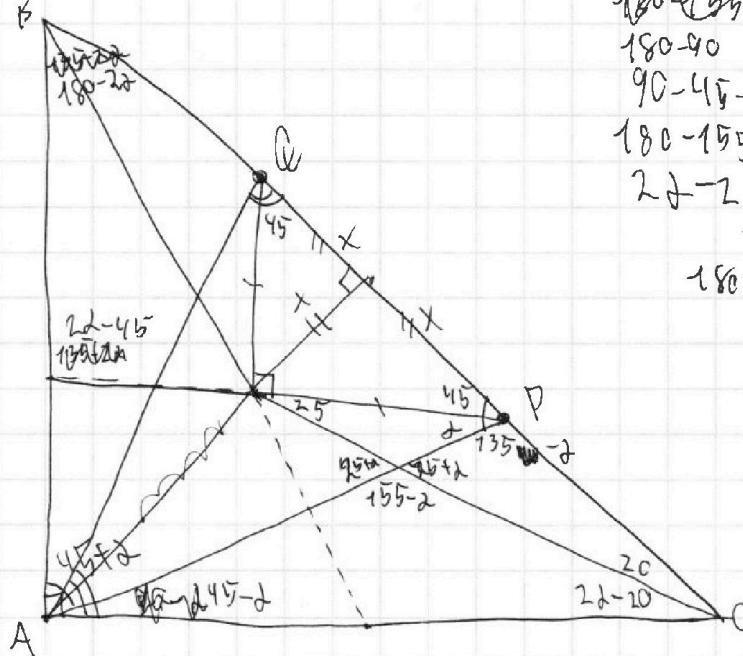
$$90 - 45 - \alpha$$

$$180 - 155 + \alpha - 45 + \beta =$$

$$2\beta - 20$$

$$180 - 135 - \beta = 45 + \alpha$$

$$180 - 180 + 2\beta - 45$$



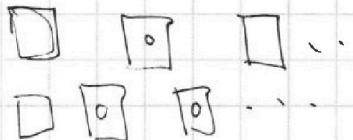


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



И коротко
в 3 мы дёём и.
игрок откладывает жк., если в жк
зан. победа
Потом игрок отж. б., то сколько
увелич. вероят. выигр.

перем. до: P_1 тогда P_2

1) Кол. во способов правильные $\frac{P_1}{P_1 + P_2}$ ищё 2: C_{n-3}^2

кол. способами: C_n^5 вероятн: $\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}$

$$P_2 = \frac{C_{n-3}^3}{C_n^6}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{C_{n-3}^3 \cdot C_n^5}{C_n^6 \cdot C_{n-3}^2} = \frac{(n-3)! \cdot n! \cdot (n-6)! \cdot 6! \cdot (n-5)! \cdot 2!}{(n-6)! \cdot 3! \cdot (n-5)! \cdot 5! \cdot n! \cdot (n-3)!} = \frac{6! \cdot 2!}{3! \cdot 5!} =$$

$$= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2}{3 \cdot 2} = 120 \quad \checkmark$$

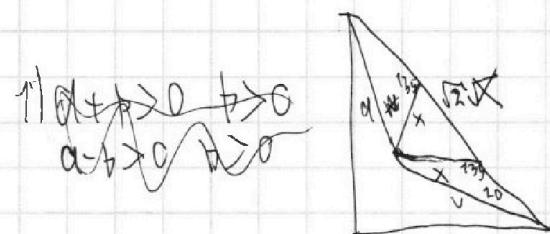
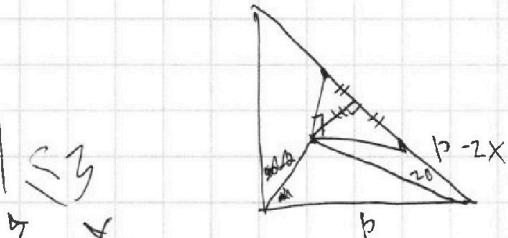
$$\left| x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| + \left| x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| \leq 3$$

$$1) x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} < 0; y < 0; -x + \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}$$

$$-10 < -5$$

$$-10 \quad |a+b| + |a-b| \leq 3$$

$$1) a+b < 0 \Rightarrow a < -b, \frac{-5}{4} < a < \frac{-1}{4}, \frac{5}{4} < b < 0$$



$$\frac{a}{\sin 10^\circ} = \frac{x}{\sin 50^\circ} \quad \frac{a}{\sin 20^\circ} =$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0 \leftarrow \text{корни } b_4, b_6 \text{ арифм.мр. } (b_4 + 4d; b_1 + 5d) \quad d \neq 0$$

$$2) 4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0 \leftarrow \text{корни } b_1 + 2d; b_4 + 7d$$

$$Q_1 = a^4 - 2a^3 + a^2 - 4a + 20 \geq 0 \quad Q_2 \geq 0$$

$$3) \begin{cases} b_1 + 4d + b_4 + 5d = \frac{a^3 - a}{d - a} = a^2 - a \\ b_1^2 + 9b_1d + 20d^2 = a - 5 = (b_1 + 4d)(b_1 + 5d) \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 2b_1 + 9d = \frac{a^3 - a}{4} \\ b_1^2 + 9b_1d + 20d^2 = \frac{2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4}{4} \end{cases} \quad b_9 = -\sqrt{5}, b_6 = \sqrt{5} \\ b_3 = -1, b_4 = +1$$

$$5) \begin{cases} 2b_1 + 9d = \frac{a^3 - a}{4} \\ b_1^2 + 9b_1d + 20d^2 = \frac{2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4}{4} \end{cases} \quad -1 - \sqrt{5}, \sqrt{5}, 1$$

$$\begin{matrix} b_3 & b_5 & b_6 & b_8 \\ + & + & - & - \\ - & - & + & + \end{matrix} \quad 1 \sqrt{5} - \sqrt{5} \} \\ a = 0?$$

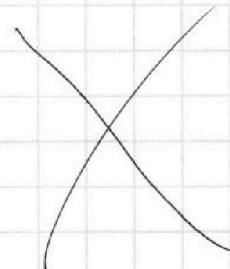
$$6) 1 = 3 \Rightarrow a^3 - a^2 = 4a^2 - 4a \quad a \neq 0 \\ a^2 - 5a + 4 = 0$$

$$a = 1/4 \leftarrow \text{проверка}$$

$$n = \underbrace{1000 \dots 0}_{40001} - 1 \quad n^3 = (a - 1)^3 = a^3 - 3a^2 + 3a - 1$$

$$a \neq 5/4$$

$$\begin{aligned} (a-1)^3 &= (a^2 - 2a + 1)(a-1) = \\ &= a^3 - 2a^2 + a - a^2 + 2a - 1 = \\ &= a^3 - 3a^2 + 3a - 1 \end{aligned}$$



$$\begin{array}{r} 1:000\dots000:000\dots000:000\dots000 \\ 3:000\dots000:000\dots000 \\ \hline 999\dots994:000\dots000:000\dots000 \\ 3:000\dots000 \\ \hline 999\dots994:000\dots002:999\dots999 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 999\dots994:000\dots002:999\dots999 \\ 40000 \\ \hline 499999 \end{array} V$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
из



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \textcircled{1} & x^2 + 3z = xy \\ \textcircled{2} & y^2 + 3x = yz \\ \textcircled{3} & z^2 + 3y = zx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} & y^2 + 2yz + z^2 = (y+z)^2 \\ \textcircled{1} + \textcircled{2} + 2\textcircled{3} & = z^2 + y^2 + 3z + 3y + 2yz = x^2 + 3x + xy + zx \\ (y+z)^2 + 3(z+y) & = x(x+3+y+z) \\ (z+x)^2 + 3(z+x) & = z(x+y+z+3) \end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3(x+y+z) = xy + yz + zx$$

$$x+y+z \leq 0$$

$$a+3b=0$$

$$b=a+2b$$

$$b^2 = 3a+6b$$

$$b^2 - 6b - 3a = 0$$

$$\Delta = 36 + 12a$$

$$b = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 12a}}{2} = 3 \pm \sqrt{9 + 3a} \leq 0 \Rightarrow b = 3 - \sqrt{9 + 3a}$$

Найти: $a+6b+24$

$$b \leq 0 \quad a \geq 0$$

$$\textcircled{4} x^2 + y^2 + 3(x+y) = z(x+y)$$

2)

$$x^2 - y^2 + 3(x-y) = z(y-x) = (x-y)(x+y) + 3(x-y) = z(x-y)$$

$$x+y+3=-z \Rightarrow x+y+z=-3$$

$x=y$ v

$$\begin{aligned} b &= 6 - \sqrt{9 + 3a} \\ 36 &= 9 + 3a \Rightarrow 3a = 27 \\ a &= 9 \end{aligned}$$

Одн: $y+3b+24 =$

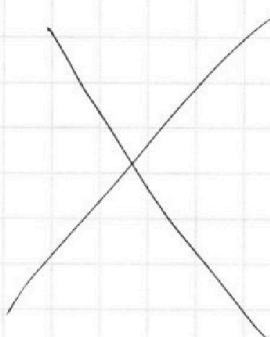
$$x=y; 2x^2 + 6x = z \cdot 2x \Rightarrow 2x+6 = 2z \Rightarrow x-z = -3 \Rightarrow z = x+3 = 1$$

$$\textcircled{5} x^2 + 3x = x(x+3) = x^2 + 3x \quad x^2 + 6x + 9 + 3x + 9 = x^2 \Rightarrow 9x = -18 \Rightarrow x = -2$$

$y = -2$

$$1^2 + 1^2 + 4^2 = 18 \quad \text{Одн: } 18/42$$

$$\begin{aligned} 9 - 6 - 3 + 24 &= -18 \\ -9 + 24 &> 18 \end{aligned}$$



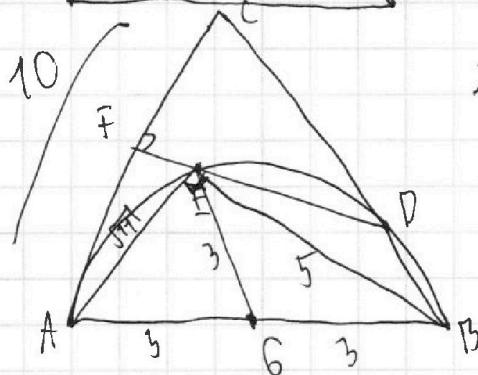
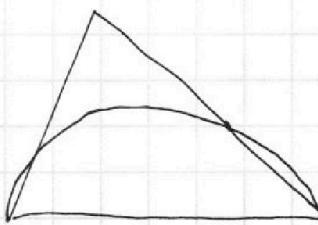
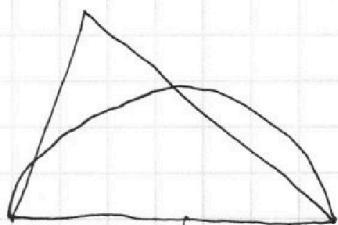
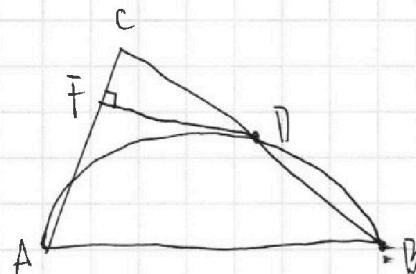
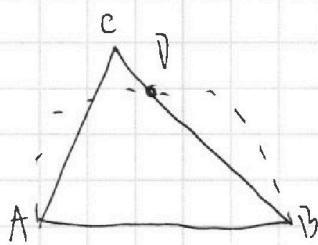


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отмьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

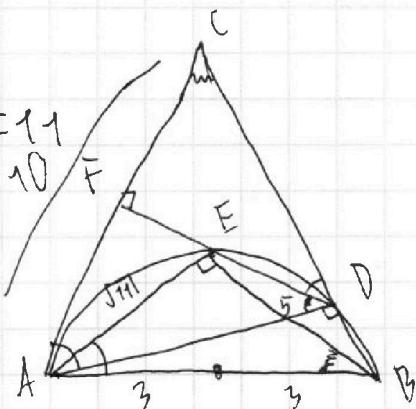
СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AF - ?$$

$$36 - 25 = 11$$



$$AF = \frac{FD \cdot \sqrt{11}}{5} = \frac{11 FC}{25}$$

$$AF + FC = 10$$

$$FC \left(\frac{25+11}{25} \right) = 10 \Rightarrow FC = \frac{250}{36}$$

$$AF = \frac{360 - 250}{360} = \frac{110}{360} = \frac{55}{18}$$

$$\triangle AFD \sim \triangle AEB$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AF} = \frac{FD}{EB}$$

$$\triangle CFD \sim \triangle AEB$$

$$\frac{FC}{EB} = \frac{FD}{AE} \Rightarrow FD = \frac{\sqrt{11} FC}{5}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} XY = 3Z + Z^2 \\ YZ = 3X + X^2 \\ ZX = 3Y + Y^2 \end{cases}$$

$$X, Y, Z \neq 0$$

$$(X+3)^2 + (Y+3)^2 + (Z+3)^2 - ?$$

$$XY + YZ + ZX \leq \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \cdot \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = X^2 + Y^2 + Z^2$$

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + 3(X+Y+Z) = XY + YZ + ZX \quad X+Y+Z \leq 0$$

$$(X+Y+Z)^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 + 2XY + 2XZ + 2YZ$$

$$(X+Y+Z)^2 = 3(X^2 + Y^2 + Z^2) + 6(X+Y+Z)$$

$$3Z^2 + 3X^2 + X^2 = XY + YZ \quad Z^2 + X^2 = 4(X+Z) - 3(X+Z) = (X+Z)(Y-Z)$$

$$\text{Излишн.: } X^2 + Y^2 + Z^2 + 6(X+Y+Z) + 2Y - ?$$

$$d+3b=c$$

$$b^2 = a+2c \Rightarrow b^2 = 3a+6b$$

$$b^2 - 6b - 3a = 0$$

$$D = 36 + 12a$$

$$b = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 12a}}{2} = 3 \pm \sqrt{9 + 3a}$$

$$9+3a \geq 0 \quad \sqrt{9+3a} \geq 3 \quad 3 - \sqrt{9+3a} \\ 9+3a > 9$$

$$3a \geq 0 \quad d \geq 0$$

$$n = \underbrace{999\dots99}_{40000}$$

n^3 -окончка 9

$$\begin{array}{r} 8 \\ \times 9 \\ \hline 89 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 89991 \\ \times 9 \\ \hline 89991 \\ + 809991 \\ \hline 8900109 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ \times 9 \\ \hline 729 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 888 \\ \times 999\dots99 \\ \hline 891999\dots9991 \\ 29 \end{array}$$

$$1 \quad 2 \\ a + 10a + \dots + 10^{40000} \cdot a$$

$$\begin{array}{r} 899999999 \\ + 899999999 \\ \hline 001 \end{array}$$

