



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [4 балла] Ненулевые числа  $x, y, z$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2, \\ yz = -2x + x^2, \\ zx = -2y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения  $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2$ , если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Деситичная запись натурального числа  $n$  состоит из 30 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа  $n^3$ ?
3. [5 баллов] Окружность  $\omega$  с диаметром  $AB$  пересекает сторону  $BC$  остроугольного треугольника  $ABC$  в точке  $D$ . Точка  $F$  выбрана на отрезке  $AC$  так, что  $DF \perp AC$ , а  $E$  — точка пересечения отрезка  $DF$  с окружностью  $\omega$ , отличная от  $D$ . Найдите  $AF$ , если  $AC = 10$ ,  $AB = 8$ ,  $BE = 6$ .
4. [4 балла] В теленгра ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарику. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть семь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых корни уравнения  $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$  являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения  $3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$  являются четвертым и девятым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура  $\Phi$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют неравенству  $\left| x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} \right| + \left| x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} \right| \leq 4$ . Фигуру  $\Phi$  непрерывно повернули вокруг начала координат на угол  $\pi$  по часовой стрелке. Найдите площадь множества  $M$ , которое замела фигура  $\Phi$  при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе  $BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  выбраны точки  $P$  и  $Q$  так, что  $AB = BP$ ,  $AC = CQ$ . Внутри треугольника  $ABC$  выбрана точка  $D$ , для которой  $DP = DQ$ , а  $\angle PDQ = 90^\circ$ . Найдите  $\angle DBC$ , если известно, что  $\angle BCA = 50^\circ$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Перемножим три рав. ба:

$$x^2y^2z^2 = (-z(z-z)) \cdot (-y(z-y)) \cdot (-x(z-x)) = -xyz(z-x)(z-y)(z-z)$$
$$xyz = -8 + 4x + 4y + 4z - 2xy - 2xz - 2yz + xyz \quad (\text{сократили на } xyz)$$

и раскроем скобки, так смонто, ведь  $x, y, z \neq 0$ )

$$2(xy + xz + yz) = 4(x+y+z) - 8$$

теперь сокр. на 2 и подставим вместо  $xy + xz + yz$  сумму уравнений

$$-2z - 2x - 2y + z^2 + x^2 + y^2 = 2x + 2y + 2z - 4 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z = -4$$

нам надо найти  $(x-z)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z + 12 =$   
 $= -4 + 12 = 8$  (подставили  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z$  из уравн. выше)

Отв: 8



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$n = 10^{30001} - 1$$

$$n^3 = (10^{30001} - 1)^3 = 10^{90003} - 3 \cdot 10^{60002} + 3 \cdot 10^{30001} - 1$$

Заметим, что  $10^{90003} - 1$  — это 90003 девятерки.

Всем вычесть оттуда  $3 \cdot 10^{60002}$ , на 60003-й позиции справа будет не 9, а 6. а если прибавить к этому  $3 \cdot 10^{30001}$ , т.е. тройку к 30002-ому разряду справа (умножаем с 1), то ~~всех разрядах~~ ~~до 60003-го~~ будет в этом разряде будет 2 ( $9+3 \bmod 10$ ), а во всех начиная с этого ~~до 60002-0~~ ( $9+1 \bmod 10$ , первое единица далее), в 60003-ем будет 7 ( $6+1 \bmod 10$ )

Тогда выходит, что у этого числа с 10й ~~до 30001ой~~ позиции только девятерки, а также с 60004ой ~~до 90003ей~~.

$$\text{Ит. всего } (90003 - 60004 + 1) + (30001 - 1 + 1) = 60001$$

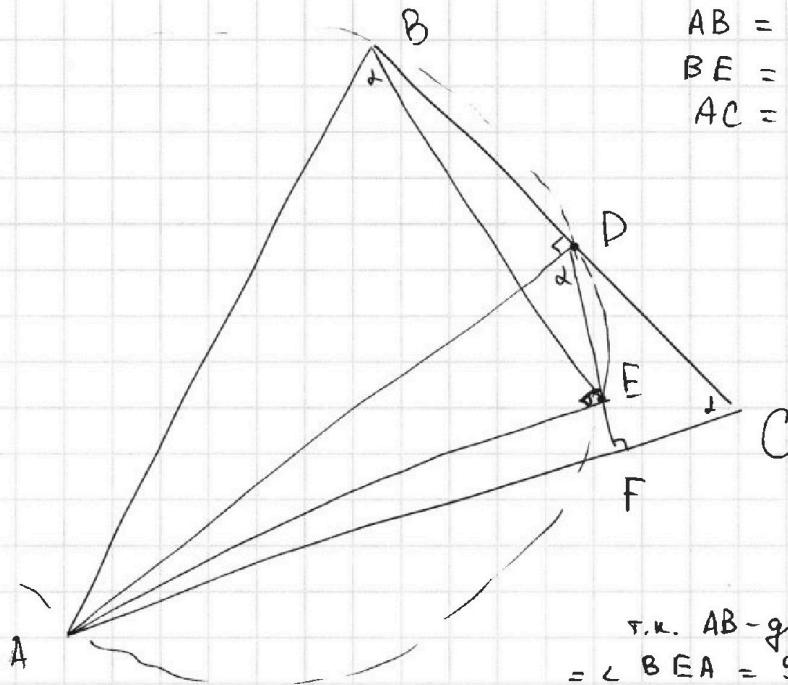
Отв: 60001

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AB = 10 \sqrt{8}$$

$$BE = 6$$

$$AC = 10$$

$$\begin{aligned} \text{т.к. } AB - \text{діагн.}, \text{ т.о. } \angle BDA = \\ = \angle BEA = 90^\circ \end{aligned}$$

$$\text{по т. Пифагора } AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{64 - 36} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

если  $\angle ADE = \alpha$ , то  $\angle EDC = 90^\circ - \alpha$ ,  $\angle FCD = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$  и  
 $\angle ABE = \alpha$  т.к. это впис. четырехугл.

тогда по 3 ушам подобны:  $\triangle ABE \sim \triangle ADF \sim \triangle FDC \sim \triangle ADC$

тогда первые соотношения:

$$\text{для } \triangle ADC \text{ и } \triangle ABE \quad \frac{AD}{AE} = \frac{CD}{BE} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AD = \frac{AE \cdot AC}{AB} = \frac{2\sqrt{7} \cdot 10}{8}$$

$$\text{для } \triangle ABE \text{ и } \triangle ADF \quad \frac{AF}{AE} = \frac{DA}{AB} \Rightarrow AF = \frac{AD \cdot AE}{AB} = \frac{\frac{2\sqrt{7} \cdot 10}{8} \cdot 2\sqrt{7}}{8} =$$

$$= \frac{7 \cdot 10 \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{7}}{8 \cdot 8} = \frac{35}{8}$$

$$\text{Отв: } AF = \frac{35}{8}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

В первом случае вероятность  $P_1 = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}$ , где  $n$  - количество коробок, т.к. есть  $C_n^5$  способов выбрать 5 коробок, из них  $C_{n-3}^2$  способов выбрать именно 3, где четная маркировка и еще 2 любые из оставшихся.

во 2 случае аналогичными рассуждениями получаем вероятность

$$P_2 = \frac{C_{n-3}^4}{C_n^7}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{C_{n-3}^4 \cdot C_n^5}{C_n^7 \cdot C_{n-3}^2} = \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{4!} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!} =$$

$$= \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{4!} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!} = \frac{2 \cdot 7!}{4! \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{7}{2} = 3,5$$

Отв: 3,5



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
---	---	---	---	---	---	---

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) первый член прогрессии  $a_0$ , разность  $d$ .

Тогда если  $x_1$  и  $x_2$  — корни 1 уравн., а  $x_3$  и  $x_4$  — второго, то

но т.чснга:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a^2 - 2a & \text{и т.к. } x_1, x_2, x_3, x_4 - \\ x_1 x_2 = a^2 - a - 7 & \text{члены прогр.:} \\ x_3 + x_4 = (a^3 - 2a^2)^{\frac{1}{3}} \\ x_3 x_4 = (6 - a^5)^{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = a_0 + 5d \\ x_2 = a_0 + 6d \\ x_3 = a_0 + 3d \\ x_4 = a_0 + 8d \end{cases}$$

$$a_0 + 5d + a_0 + 6d = \cancel{a_0 + 6d} 2a_0 + 11d = a^2 - 2a$$

$$a_0 + 3d + a_0 + 8d = 2a_0 + 11d = (a^3 - 2a^2)^{\frac{1}{3}}$$

Вычитаем:  $a^2 - 2a - \frac{1}{3}a^3 + \frac{2}{3}a^2 = 0$

$$a(a^2 - 5a + 6) = 0$$

$$a(a-3)(a-2) = 0 \Rightarrow a=0 \vee a=3 \vee a=2$$

$$(a_0 + 5d)(a_0 + 6d) = a_0^2 + 11a_0 d + 30d^2 = a^2 - a - 4$$

$$(a_0 + 3d)(a_0 + 8d) = a_0^2 + 11a_0 d + 24d^2 = \frac{1}{3}(6 - a^5)$$

Вычитаем.  $6d^2 = a^2 - a - 7 - 2 + \frac{1}{3}a^5 = \frac{a^5}{3} + a^2 - a - 9$

$$d^2 = \frac{1}{6} \left( \frac{a^5}{3} + a^2 - a - 9 \right)$$

Теперь по очереди проверим варианты значений  $a$  — 0, 2, 3

1)  $d^2 = \frac{1}{6} \left( \frac{0}{3} + 0 - 0 - 9 \right) = -\frac{9}{6}$ , такое невозможно

2)  $d^2 = \frac{1}{6} \left( \frac{32}{3} + 4 - 2 - 9 \right) = \frac{11}{18} \quad d = \pm \sqrt{\frac{11}{18}}$

$$a_0 = \frac{a^2 - 2a - 11d}{2} = \cancel{a_0} \frac{4 - 4 \pm 11\sqrt{\frac{11}{18}}}{2}$$

проверим, что  $a_0^2 + 11a_0 d + 30d^2 = a^2 - a - 4$

$$\frac{11^2}{18 \cdot 4} \pm 11 \cdot \sqrt{\frac{11}{18}} \cdot \frac{11\sqrt{\frac{11}{18}}}{2} + 30 \cdot \frac{11}{18} = 4 - 2 - 4$$

невозможно. Если умножить на 18·4, то левая часть уравнения

все : 11, а правая нет, но обе части целые, такого быть не может

3)  $d^2 = \frac{1}{6} \left( \frac{243}{3} - 9 - 3 - 9 \right) = 10 \quad d = \pm \sqrt{10}$

$$a_0 = \frac{a^2 - 2a - 11d}{2} = \frac{9 - 6 \pm 11\sqrt{10}}{2} = \frac{3 \pm 11\sqrt{10}}{2}$$

проверим, что  $a_0^2 + 11a_0 d + 30d^2 = a^2 - a - 7$

~~(3 + 11\sqrt{10})^2~~ + 11~~d~~ если  $d = \sqrt{10}$   $a_0 = \frac{3 - 11\sqrt{10}}{2}$

$$\frac{9 + 1210 - 66\sqrt{10}}{4} + 11 \cdot \sqrt{10} \cdot \frac{3 - 11\sqrt{10}}{2} + 30 \cdot 10 = 9 - 3 - 7$$

$$9 + 1210 - 66\sqrt{10} + 66\sqrt{10} - 2420 + 1200 = -4$$

$$13 + 1210 - 2420 + 1200 \neq 10, 0 : 10 \Rightarrow \text{такого быть не может}$$

если  $d = -\sqrt{10}$ ,  $a_0 = \frac{3 + 11\sqrt{10}}{2}$

$$\frac{9 + 1210 + 66\sqrt{10}}{4} - 11\sqrt{10} \frac{3 + 11\sqrt{10}}{2} + 30 \cdot 10 = -1 \quad \text{Получается то же самое. Значит}$$

вариантов больше не осталось, мы один не поделил **Отв: 0**

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

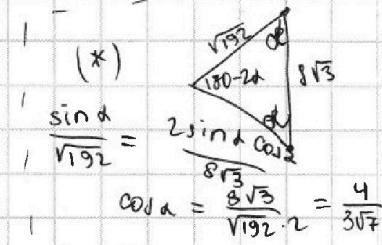
СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Разобьем плоскость на 4 части, где 1 модуль раскладывается со знаком +, а второй с - в гр. комбинации)

$$1) \begin{cases} x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} \geq 0 \\ x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} \geq 0 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} \geq 0 \\ x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} \leq 0 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} \leq 0 \\ x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} \geq 0 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} < 0 \\ x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} < 0 \end{cases}$$



Получаем, что эти части будут делиться прямыми

$$(1) y = (10-x)2\sqrt{3} \quad \text{и} \quad (2) y = (x-10)2\sqrt{3}$$

Раскроем скобки и дели каждого из 4 случаев.

1)  $x \leq 12$ , если точка выше (1) и ниже (2)

2)  $y \leq 4\sqrt{3}$ , если точка выше (1) и (2)

3)  $y \geq -4\sqrt{3}$ , если точка ниже (1) и (2)

4)  $x \geq 8$ , если точка выше (2) и ниже (1)

Построим прямые (1) и (2)  $y \uparrow$   
через точки

$$(1): (10; 0) \text{ и } (10+\sqrt{3}; -6)$$



$$(2): (10; 0) \text{ и } (10-\sqrt{3}; 6)$$



А далее построим

две каждого случая

график в соотв. областях

т.к. точки  $(12; 4\sqrt{3}), (12; -4\sqrt{3})$ ,

$(8; 4\sqrt{3})$  и  $(8; -4\sqrt{3})$  принадл.

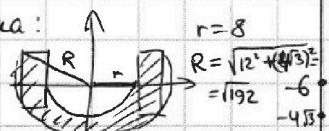
прямым, это получается

правильный четырехугольник, с вершинами

в этих точках.

Когда мы его повернем,  
получимся таким

изображением:

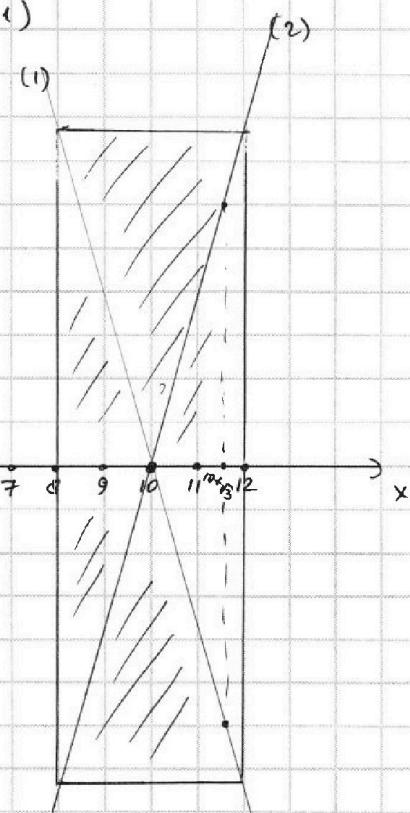


Ответ

Это площадь большего полукруга -

площадь меньшего + площадь прямогр. + площадь сектора  
 $\pi r^2 = -\pi r^2 + \pi R^2 + (4\sqrt{3} + (-4\sqrt{3})) \cdot (12 - 8) + \pi R^2 = 192\pi - 64\pi + 4 \cdot 8\sqrt{3} + 192(\pi - 2\arccos \frac{4}{12})$

$$= 192\pi - 64\pi + 32\sqrt{3} + 192(\pi - 2\arccos \frac{4}{12})$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}}| + |x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}}| \leq 4$$

$$1. x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} > 0 \quad \text{и} \quad x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} > 0 \quad y > (10-x)2\sqrt{3} \quad y < (x-10)2\sqrt{3}$$

$$\frac{y}{2\sqrt{3}} \leq 4 \quad x \leq 12$$

$$2. x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} \geq 0 \quad \text{и} \quad x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} < 0 \quad y > (10-x)2\sqrt{3} \quad y > (x-10)2\sqrt{3}$$

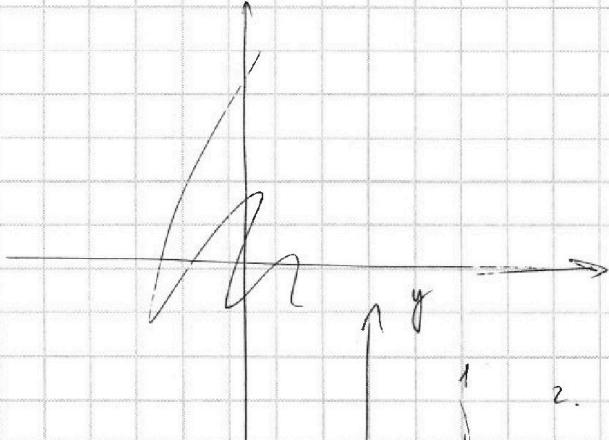
$$\frac{y}{2\sqrt{3}} \leq 4 \quad y \leq 4\sqrt{3}$$

$$3. x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} < 0 \quad \text{и} \quad x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} \geq 0 \quad < \quad <$$

$$-\frac{y}{2\sqrt{3}} \leq 4 \quad y \geq -4\sqrt{3}$$

$$4. x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} < 0 \quad \text{и} \quad x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} < 0 \quad < \quad >$$

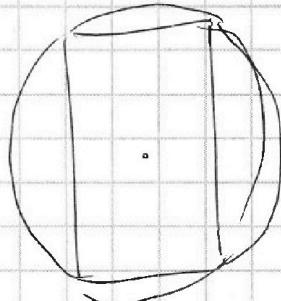
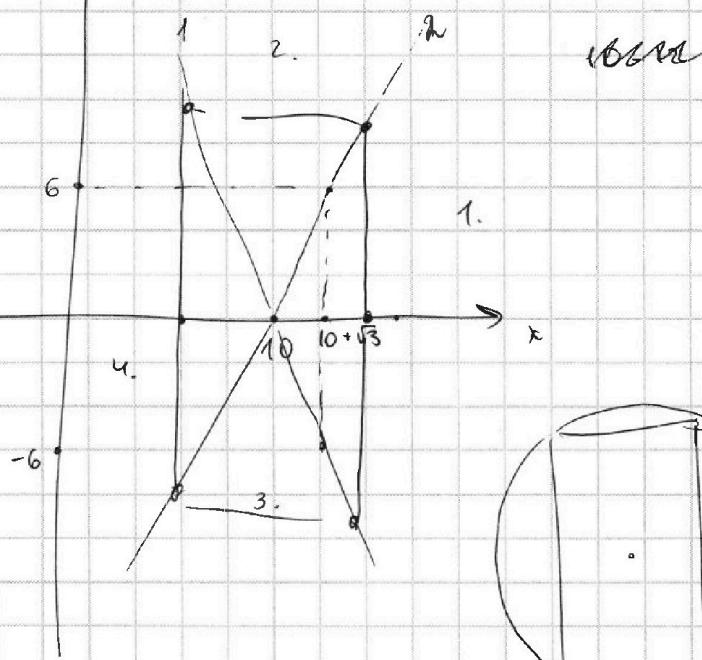
$$20 - 2x \leq 4 \quad x \geq 8$$



$$1) y = (10-x)2\sqrt{3}$$

$$2) y = (x-10)2\sqrt{3}$$

$$x = 10 + \sqrt{3}$$



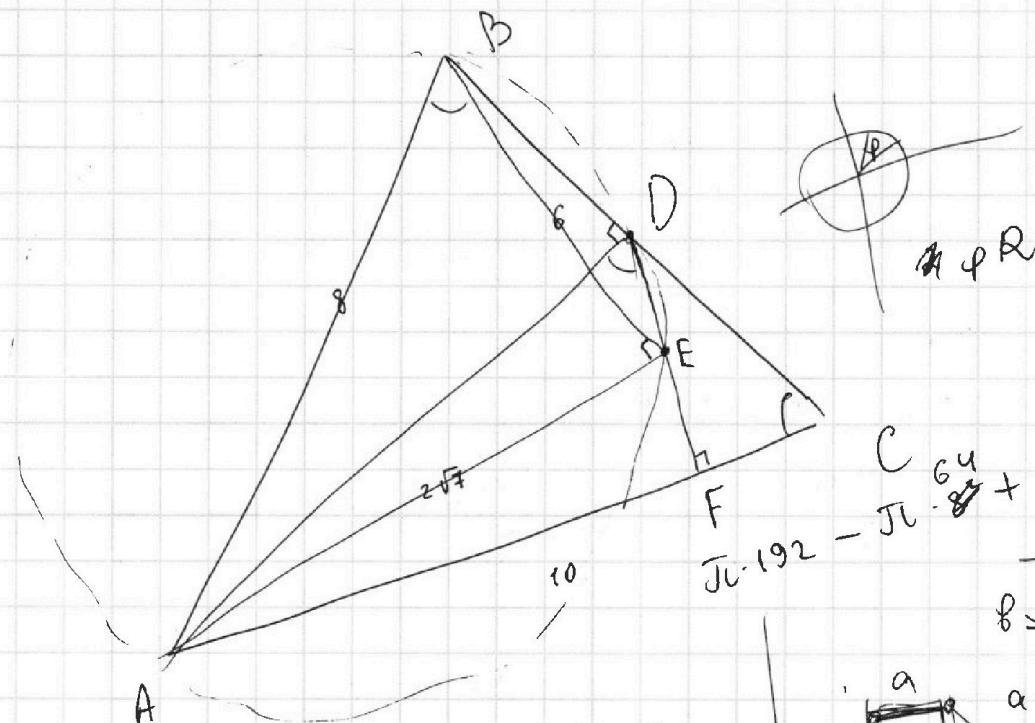


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$AB \cdot DE + BD \cdot AE = BE \cdot AD$$

$$8DE + 2\sqrt{3}BD = 6AD$$

$$AF^2 = 28 - EF^2$$

$$(DE + EF)^2 = CD^2 - FC^2$$

$$(AF + CF)^2 - CD^2 = AD^2$$

$$AB^2 - BD^2 = AD^2$$

$$AF^2 + (EF + DE)^2 = AD^2 \Rightarrow AF^2 + CD^2 - FC^2 = AD^2 = AF^2 + CF^2 + 2AF \cdot CF - CD^2$$

$$\frac{HD}{AF} = \frac{CD}{DF + EF}$$

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AE} = \frac{8}{2\sqrt{7}} = \frac{4}{\sqrt{7}}$$

$$AD = \frac{10\sqrt{7}}{4} = \frac{5\sqrt{7}}{2}$$

$$\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{BE} \Rightarrow CD = \frac{10 \cdot 83}{82} = \frac{15}{2}$$

$$\frac{AD}{AF} = \frac{AB}{AE} \Rightarrow$$

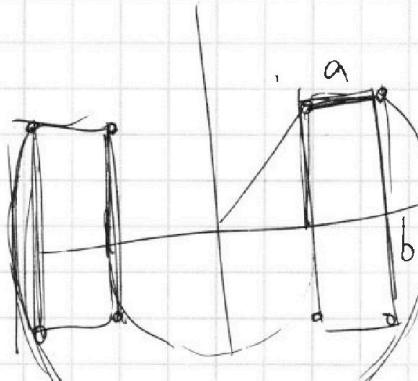
$$AF = \frac{AE \cdot AD}{AB} = \frac{\cancel{E} \cdot \cancel{D}}{\cancel{E} \cdot 8} = \frac{3}{8}$$

$$\begin{array}{c} \sqrt{192} \\ \times 2\sqrt{3} \\ \hline 192 \\ + 192 \\ \hline 8\sqrt{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 192 \\ \hline 18 \end{array} \left| \begin{array}{r} 63 \\ 12 \end{array} \right. \quad 3\sqrt{7} \cdot \boxed{3}$$

$$\frac{\sin \varphi}{\sqrt{193}} = \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{8\sqrt{3}}$$

$$\cos \phi = \frac{8\sqrt{3}}{2\sqrt{192}} = \frac{4}{3\sqrt{7}}$$



$$+ 4.8\sqrt{3} -$$

—

$$b = 8\sqrt{3}$$

$$\alpha \approx 4$$

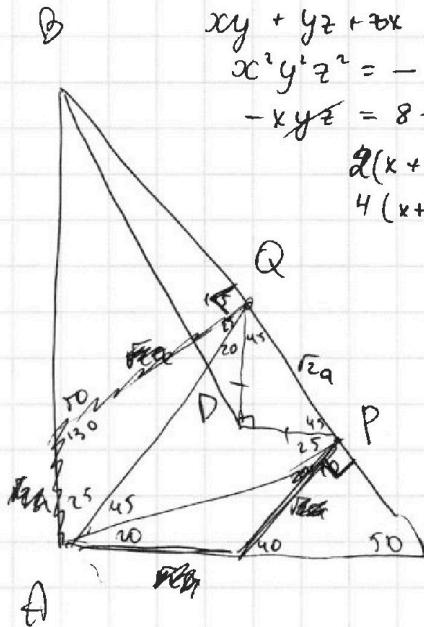
$$\begin{aligned} & \sqrt{12^2 + 4\beta^2} = \\ & = \sqrt{144 + 48} = \\ & = \sqrt{192} \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решением которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

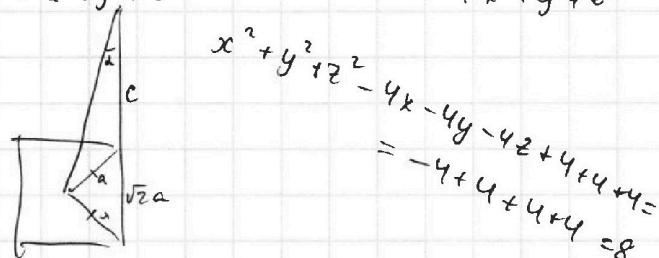
- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

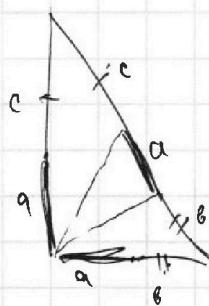
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned}
 & xy + yz + zx \\
 & x^2y^2z^2 = -xyz(z-x)(z-y)(z-z) \\
 & -xyz = 8 - \cancel{xyz} - 4x - 4y - 4z + 2xz + 2yz + 2xy - xyz \\
 & 2(x+y+z) = 4 + xz + yz + xy = 4 - 2x - 2y - 2z + \\
 & 4(x+y+z) - 4 = x^2 + y^2 + z^2 + x^2 + y^2 + z^2
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \frac{a}{\sin \alpha} &= \frac{\sqrt{2}a + c}{\sin(\alpha + 45^\circ)} = \frac{\sqrt{2}(a+c)}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{2a + \sqrt{2}c}{\sin \alpha + \cos \alpha} \\
 a &= \frac{2a + \sqrt{2}c}{1 + \operatorname{ctg} \alpha}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 a + a \operatorname{ctg} \alpha &= 2a + \sqrt{2}c \\
 \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{a + \cancel{\sqrt{2}c}}{a} = \frac{2a + \sqrt{2}c - a}{a} = \frac{a + \sqrt{2}c}{a} = \\
 &= 1 + \frac{\sqrt{2}c}{a}
 \end{aligned}$$

~~$\operatorname{ctg} \alpha$~~ 

$$\frac{c}{a} = \frac{a + \operatorname{ctg} \alpha - 1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned}
 (a+b)^2 + (a+c)^2 &= (a+b+c)^2 \\
 a^2 + b^2 + 2ab + a^2 + c^2 + 2ac &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ac + 2ab + 2bc
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a^2 &= 2bc \\
 \sin 50^\circ &= \frac{a+c}{a+b+c} = \frac{a+\frac{a}{\operatorname{ctg} 50^\circ}}{a+b+\frac{a}{\operatorname{ctg} 50^\circ}} = \frac{2ab + a^2}{2ab + 2b^2 + a^2} \\
 \operatorname{ctg} 50^\circ &= \frac{a+b}{abc} = \frac{a + \cancel{\frac{a^2}{\operatorname{ctg} 50^\circ}}}{a + c} = \frac{2ac + a^2}{2ac + 2c^2} = \frac{a}{c} \cdot \frac{2c+a}{2a+2c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{\cancel{2c+a}}{\cancel{2a+2c}} \left(1 + \frac{a}{2(a+c)}\right)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\operatorname{ctg} \alpha - 1}{\sqrt{2}} = \frac{1 - \frac{a}{2(a+c)}}{\operatorname{ctg} 50^\circ} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} 50^\circ \cdot \left(1 - \frac{a}{2(a+c)}\right) + 1$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} \times 99 \\ \times 99 \\ \hline 891 \\ 891 \\ \hline 9801 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 9801 \\ 99 \\ \hline 88209 \\ 88209 \\ \hline 970299 \end{array}$$

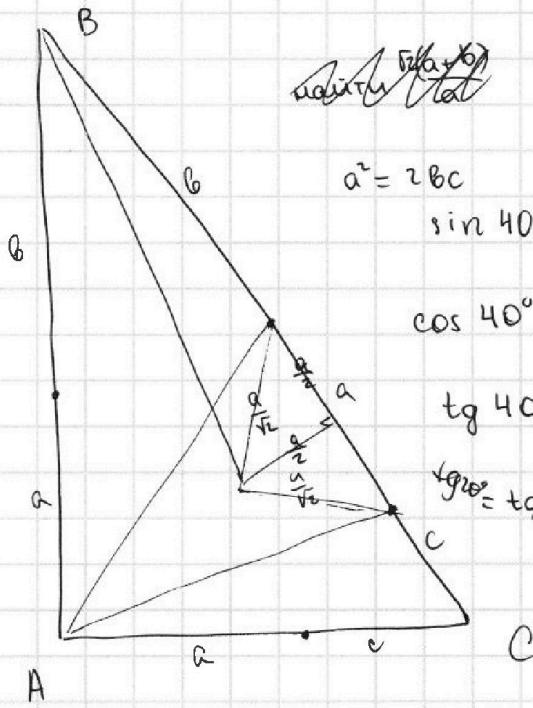
$$(10^{30001} - 1)^3$$

81  
82

$$10^{30003} - 3 \cdot 10^{60002} + 3 \cdot 10^{30001} - 1$$

$$10^{12} - 1$$

9996 92999999



$$\text{Найти } \frac{\frac{a}{2}}{b + \frac{a}{2}} = \frac{a}{2b+a} =$$

$$a^2 = 2bc \quad \sin 40^\circ = \frac{a+c}{a+b+c}$$

$$\frac{a}{\frac{a^2}{2c} + a} = \frac{a}{\frac{a^2}{2c} + 1} =$$

$$\cos 40^\circ = \frac{a+b}{a+b+c}$$

$$\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{2c}{a+2c}$$

$$\tan 40^\circ = \frac{a+c}{a+b}$$

$$\frac{\sqrt{1+\cos \alpha}}{\sqrt{1-\cos \alpha}} = \frac{\sqrt{2(1+\cos \alpha)}}{\sqrt{2(1-\cos \alpha)}} = \frac{\sqrt{2(2\cos^2 \alpha)}}{\sqrt{2(2\sin^2 \alpha)}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}\cos \alpha}{\sqrt{2}\sqrt{2}\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\frac{\frac{a+c}{a+b+c}}{\frac{a+b+c+a+b}{a+b+c}} = \frac{a+c}{2a+2b+c}$$

$$\frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{2} = \frac{1-\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{a+b+c-a-b}{a+c} = \frac{c}{a+c}$$

$$\frac{c}{a+c} = \frac{a+c}{2a+2b+c} = 1 - \frac{a+2b}{2a+2b+c}$$

$$\frac{2ac + (2b+c)(a^2+2ab)+ac+2bc}{2a^2+2ab+2ac+2ad+2bc} =$$

~~$$\sqrt{1+\cos \alpha} = \sqrt{1-\cos \alpha}$$~~

~~$$\frac{c}{a+c} + \frac{c}{a+2c}$$~~

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{2+\tan \alpha}{1-\tan^2 \alpha} = \frac{2a+2c}{1-(2a+2c)^2} = \frac{(2a+2c)(2a+2b)}{(2a-2c)(2b+2c)} =$$

$$x = \frac{2ac + 2c^2 - ac - 2c^2}{a+c+2c} = \frac{ac}{a+2c}$$

$$= \frac{(a+c)(a+b)}{(b+c)(b+c)}$$

$$a^2 + c^2 + 2ac = 2ac + 2bc + c^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 9 \ 9 \ 9 \ 9 \ 9 \\ 9 \ 9 \ 9 \ 9 \ 9 \\ \hline 89 \dots 991 \\ 899 \dots 1 \\ \hline \end{array}$$

$$a_0 + d$$

$$a_0 + 3d + a_0 + 8d = \frac{a^3 - 2a^2}{3}$$

$$(a_0 + 3d)(a_0 + 8d) = a_0^2 + 11a_0d + 24d^2 = \frac{6 - a^5}{3}$$

$$a_0 + 5d + a_0 + 6d = a^2 - 2a$$

$$(a_0 + 5d)(a_0 + 6d) = a_0^2 + 11a_0d + 30d^2 = a^2 - a - 7$$

$$6d^2 = a^2 - a - 7 - 2 + \frac{a^5}{3} = \frac{a^5}{3} + a^2 - a - 9$$

$$d^2 = 2a^5 + 6a^2 - 6a - 54$$

$$2 - 32 + 6 \cdot 4 = 62 - 54 = 64 + 12 - 54 = 76 - 54$$

$$\frac{a^3 - 2a^2}{3} - a^2 + 2a = 0$$

$$2(a^2 - a^3 - 2a^2 - 3a^2 + 6a) = 0$$

$$a(a^2 - 5a + 6) = 0$$

$$a(a-3)(a-2) = 0$$

$$a=0, a=3, a=2$$

$$d^2 = -54 \text{ неко} \quad d^2 = 2a \text{ неко} \quad d^2 = 2 \cdot 243 + 6 \cdot 9 - 6 \cdot 3 - 54 = \\ d = \sqrt{-54} : \quad d = \sqrt{2a} \quad \text{или} \quad d = \sqrt{468} = 2\sqrt{117} \quad d = \sqrt{\frac{6}{28}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{28}}$$

$$d = \sqrt{22} :$$

$$2a_0 + 11d = a^2 - 2a$$

$$a_0 = \cancel{2a_0} \frac{4 - 4 - 11 \cdot \sqrt{22}}{2} = -\frac{11\sqrt{11}}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{array}{r} -468/4 \\ \hline 1 \\ \cancel{112} \cancel{112} \cancel{112} \cancel{112} \\ \hline 6/28 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1/36 \\ \hline 1 \\ \cancel{52} \cancel{52} \cancel{52} \cancel{52} \\ \hline 522 \end{array}$$

$$-\frac{52}{52} \\ -\frac{52}{52}$$

$$\cancel{-\frac{11^3}{2}} + \frac{11 \cdot 11 \cdot \sqrt{11}}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{22} + 30 \cdot 22 = 4 - 2 - 4 = -5 \quad \cancel{d^2 = 2a}$$

$$\cancel{\frac{11^3}{2}} \quad d = -\sqrt{22} \quad a_0 = \frac{11\sqrt{22}}{2} = \frac{11\sqrt{11}}{\sqrt{2}}$$

$$a_0 = \frac{3 + 22\sqrt{117}}{2}$$

$$\cancel{\frac{11^3}{2}} + 11 \cdot a = 2 \text{ не подходит!}$$

$$9 + 22^2 \cdot 117 + 2 \cdot 66 \cdot \sqrt{117} \quad \cancel{+ 11 \cdot \frac{2\sqrt{117}}{2} (3 + 22\sqrt{117})} \\ \cancel{+ 30 \cdot 468} = -1$$

$$2a_0 = \frac{9 - 2 \cdot 3 - 11 \cdot \sqrt{468}}{2} = \frac{3 - 22\sqrt{117}}{2} \quad \cancel{+ 11 \cdot \frac{2\sqrt{117}}{2} (3 + 22\sqrt{117})} \\ \cancel{+ 30 \cdot 468} = -1$$

$$9 + 22^2 \cdot 117 - 6 \cdot 22\sqrt{117} + 4 \cdot 3 \cdot 11\sqrt{117} - 11 \cdot 4 \cdot 22 \cdot 117 + 30 \cdot 468 \cdot 4 = -4 \quad \frac{1}{6} (81 - 21)$$

$$9 + 22^2 \cdot 117 - 11 \cdot 4 \cdot 22 \cdot 117 + 30 \cdot 468 \cdot 4 = -4$$

$$+\quad +\quad -\quad -\quad +\quad \frac{32 \cancel{a_0} - 21}{3} = \frac{11}{3}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$xy = z(z - 2)$$

$$yz = x(x - 2)$$

$$xz = y(y - 2)$$

$$28BD^2 + 84 \left( DC^2 - FC^2 + 28 - AF^2 - 2 \cdot DF \cdot EF \right) + \\ + 32\sqrt{7} BD \cdot (DF - EF) = 36 (AF^2 + DF^2)$$

$$\frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{x^2z^2}{y^2} \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$$

1) Всего способов  $C_n^5$ , подходит  $C_{n-3}^2$

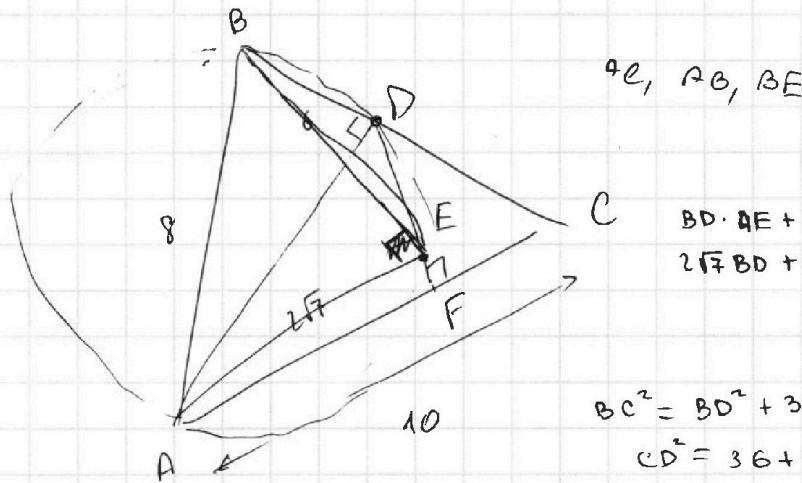
$$\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{2 \cdot 1}$$

$$\frac{n \cdot (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$\Phi = \frac{\frac{(n-5)(n-4)}{2}}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} = \frac{60}{n(n-1)(n-2)} = \frac{60}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$2) C_n^7 \cdot C_{n-3}^4 = \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7!}{n(n-1)(n-2)} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{n(n-1)(n-2)}$$

$$\text{Увелич. } B \quad \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{8 \cdot 4 \cdot 3} = 3,5$$



$$\sqrt{64 - 36} = 2\sqrt{7}$$

2\sqrt{7}

$$BD \cdot DE + AB \cdot BE = BE \cdot AD$$

$$2\sqrt{7}BD + 8DE = 6AD$$

$$= 4BD + 72BD + 36$$

$$BC^2 = BD^2 + 36 + BD^2 + 2BD \cdot (36 + BD) =$$

$$CD^2 = 36 + BD^2$$

$$84 - BD^2 = 100 - CD^2$$

$$AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2 = AD^2 = AF^2 + DF^2$$

$$AE^2 = EF^2 + AF^2 \quad 28 = EF^2 + AF^2$$

$$DC^2 = DF^2 + FC^2$$

$$DE^2 = AE^2 + DE^2 \quad \cancel{DE^2}$$

$$DE + EF = DF$$

$$AF + FC = AC$$

$$BD + CD = BC$$

$\checkmark$  AB, BD, CD, AC, AD,

$\checkmark$  AF, DF, AE, EF, FC

$\checkmark$  28 - EF<sup>2</sup>

$$36 + BD^2 = CF^2 + 64 - BD^2 - AF^2$$

$$AF^2 = CF^2 + 28 - 2BD^2 \quad \cancel{28 - 2BD^2} = \cancel{28 - 2BD^2}$$

$$10 - CF$$

$$CF^2 + 28 - 2BD^2 = 10 - CF$$

$$CF^2 + CF + 18 - 2BD^2 = 0 \quad CF = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 72 + 8BD^2}}{2}$$