



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарик. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leq 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases}$$

Вычтем из первого второе:

$$xy - yz = 3z + z^2 - 3x - x^2$$

$$y(x-z) = (x-z)(-x-z-3)$$

$$y = -x - z - 3, \text{ если } x \neq z \quad (*)$$

$$x + y + z = -3$$

Теперь перенесем все равенства:

$$(xyz)^2 = (xyz)(x+3)(y+3)(z+3)$$

$$xyz = xyz + 3(xy+yz+xz) + 27 + 3(xy+yz+xz)$$

$$xy+yz+xz = 0$$

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 6(x+y+z) + 27 =$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + 9 = xy + yz + xz + 18 = \underline{\underline{18}}$$

т.е. ← если мы сложим все равенства:

$$xy + yz + xz = 3(xy+yz+xz) + x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 9$$

(*) Если $x = z$:

Вычтем из первого третье:

$$x(y-z) = (y-z)(-y-z-3)$$

$$x = -y - z - 3$$

$$x + y + z = -3 \text{ всё равно}$$

либо $x = y = z$, тогда

$$x^2 = 3x + x^2 \Rightarrow x = 0 \quad (!?), \text{ значит } x + y + z = -3 \text{ всегда}$$

Ответ: 18



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2 \quad n = (10^{40000} - 1) \Rightarrow n^3 = 10^{3 \cdot 40000} - 3 \cdot 10^{2 \cdot 40000} + 3 \cdot 10^{40000} - 1$$
$$\cancel{n^3 = 100 \dots 0} \quad n^3 = \underbrace{10^{2 \cdot 40000} (10^{40000} - 3)}_a + \underbrace{3 \cdot 10^{40000} - 1}_b$$

$$a = \underbrace{99 \dots 9}_{40000-1} \underbrace{70 \dots 0}_{2 \cdot 40000} \quad b = \underbrace{299 \dots 9}_{40000}$$
$$\Rightarrow a+b=n^3 = \underbrace{99 \dots 9}_{40000-1} \underbrace{70 \dots 0}_{2 \cdot 40000} \underbrace{29 \dots 9}_{40000}$$

Умно n^3 79999 девяток
ответ: 79999



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

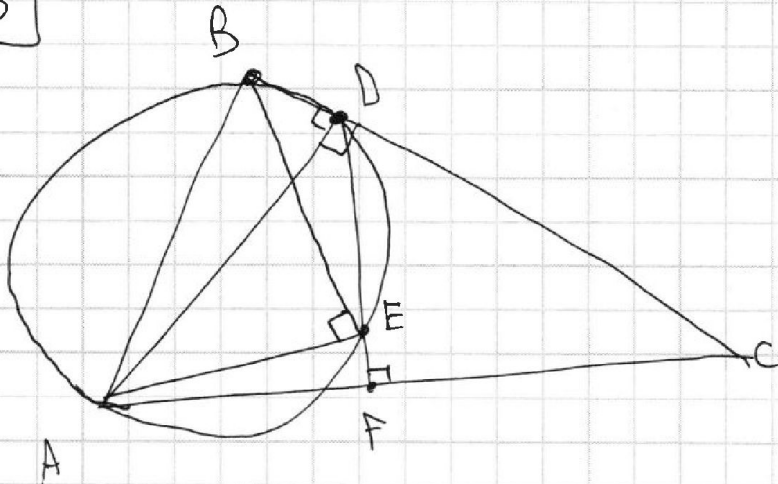
7
☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3



$\angle BDA = \angle BEA = 90^\circ$ т.к. окружность на диаметре, значит из $\triangle ABE$:

$$AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{11}$$

из теоремы Пифагора:

$$AD^2 + BD^2 = 36$$

$$AD^2 + CD^2 = 100$$

$$AD^2 = AF^2 + DF^2$$

$$FE^2 + AF^2 = 11$$

$$CD^2 = CF^2 + DF^2$$

$$AF^2 + CF^2 + 2DF^2 = 100$$

$$\Rightarrow 2AF^2 + 100 - 20 \cdot AF + 2DF^2 = 100$$

$$AF^2 + 10AF =$$

$$AD^2 = AF^2 + DF^2 = 10AF$$

аналогично $CD^2 = 10CF$

$$100 AF^2 + 100 CF^2 = (AF + CF)^2 = 100$$

$$AF^2 + CF^2 = 1$$

$$AF = 1$$

ответ: 1



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4) Пусть всего n коробок

Вероятность выбрать грабли среди коробок
есть при шарики такая же как выбрать
 $n-5$ или $n-6$ соответственно коробок где
ли в одной меш или одного, будем считать
ее

Первую коробку взять вероятность $\frac{n-3}{n}$
вторую $\frac{n-4}{n-1}$ и т.д. первую мы уже взяли
и так далее до $\frac{n-(n-3)}{n-(n-3)+3} = \frac{3}{6}$

Остаточные 5 коробок, среди которых все
шарики

Заметим что с изменением условия до 6 ко-
робок вероятность будет такая же, но без
последней грабли, потому что мы можем счи-
тать ее по такой же алгоритму

Значит независимо от общего числа коробок
вероятность победы возвращен вдвое

Ответ: в 2 раза

(*) Грабли конечно перемножаются, для получения
вероятности



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\boxed{5} \quad (x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy$$

Значит из Тл. Виета можно найти квадрат разности корней, у первых он будет d^2 , где d - разность прогрессии, а у вторых $25d^2$

$$\text{I} \quad (x_8 - x_5)^2 = (a^2 - a)^2 - 4(a-5)$$

$$\text{II} \quad (x_8 - x_3)^2 = \left(\frac{a^3 - a^2}{4}\right)^2 - 2a^4 - 2a^2 + a^6 + 4$$

$$(x_8 - x_3)^2 = 25((a^2 - a)^2 - 4(a-5)) = 25(x_8 - x_5)^2$$

$$\left(\frac{a^3 - a^2}{4}\right)^2 - 2a^4 - 2a^2 + a^6 + 4 = 25((a^2 - a)^2 - 4(a-5))$$

$$a^6 - 2a^5 + a^4 - 32a^4 - 32a^2 + 16a^6 + 4 = 400(a^4 - 2a^3 + a^2 - 4a + 20)$$

$$17a^6 - 2a^5 - 431a^4 + 800a^3 - 432a^2 - 1600a - 7996 = 0$$

$a=4$ подходит, запишем в другом виде, чтобы проверить это:

$$\frac{a^4(a-1)^2}{16} - (a^2-2)(2-a^4) = 25(a^4 - 2a^3 + a^2 - 4a + 20)$$

$$16 \cdot 9 + 14 \cdot 254 = 25(256 - 128 + 16 - 16 + 20)$$

$$4(36 + 7 \cdot 127) = 25 \cdot 148$$

$$36 + 7 \cdot 127 = 25 \cdot 37$$

$$325 = 325$$

подходит только один корень этого уравнения

ответ: 4



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6) 1) $x - \frac{15}{2} > \frac{y}{6\sqrt{3}}$

$$6\sqrt{3}x - 45\sqrt{3} > y$$

2) $x - \frac{15}{2} > -\frac{y}{6\sqrt{3}}$

$$6\sqrt{3}x - 45\sqrt{3} > -y$$

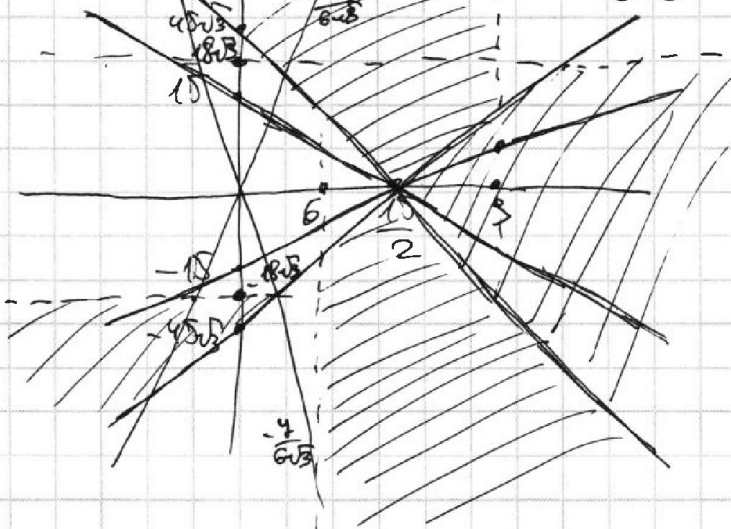
$$y > 45\sqrt{3} - 6\sqrt{3}x$$

Если оба неравенства "положительно" раскрываемся:

$$2x - 15$$

оба отрицательно: $15 - 2x$

по разности: $\pm \frac{y}{6\sqrt{3}}$



прямые из 1) и 2)
делят плоскость
на 4 части в
зависимости
по разности раскрыва-
ются неравенства

$$2x - 15 = 3$$

при $x = 9$

$$15 - 2x = 3$$

при $x = 6$

соответственно эти области будут в Φ

$$\frac{y}{6\sqrt{3}} = 3 \text{ при } y = 18\sqrt{3}$$

$$-\frac{y}{6\sqrt{3}} = 3 \text{ при } y = -18\sqrt{3}$$

Φ - бесконечная область
при повороте по часовой

ответ: ∞



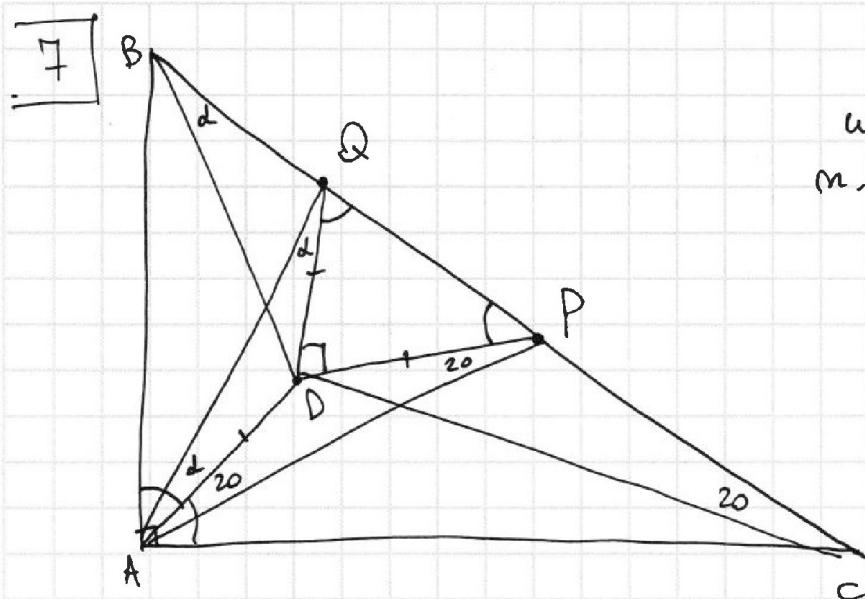
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Почти P и Q лежат
именно в таком порядке,
т.е. иначе $AB + AC > BC$
не выполняется перво
треугольника

D - центр описанной окружности треугольника AQP

$$1) \angle BAP = \angle BPA; \angle CAQ = \angle CQA \quad \text{п.ф. } \triangle CQA \text{ и } \triangle ABP$$

$$\text{Пусть } \angle BAP = \beta; \angle CAQ = \gamma, \text{ тогда } \angle ACB = 180 - 2\gamma;$$

$$\angle ABC = 180 - 2\beta, \quad \text{но } \angle ABC + \angle ACB = 80^\circ \Rightarrow \beta + \gamma = 135^\circ$$

$$\angle QAP = \beta + \gamma - 90 = 45^\circ, \quad \text{а } \angle QDP = 90^\circ, \text{ при}$$

этом D лежит на сегменте K QP, малая точка
одна и это центр описанной окружности
(внешний угол равен половине центрального)

$$\text{Тогда } DA = DQ = DP$$

$$\angle DAC = \angle DQP = 45^\circ \quad (\text{т.е. } \angle CAQ - \angle DAQ = \angle CQA - \angle DQA)$$

$$\Downarrow \quad \angle BAD = 45^\circ = \angle DPQ \Rightarrow \begin{matrix} \triangle ADP - \text{внешний} \\ \triangle ADQ - \text{внешний, т.е.} \end{matrix}$$

$$(\angle BQD = \angle DPC = 180 - 45 = 135^\circ)$$

$$\text{значит } \angle DAP = \angle DCP = 20^\circ \Rightarrow \angle DPA = 20^\circ$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

7

Аналогично если $\angle DBC = \alpha$, то $\angle QAD = \alpha = \angle AQB$
т.е. $\triangle AQB$ и $\triangle AQB$ - вписанный

Рассмотрим сумму углов вокруг точки D:

$$\angle ADP + \angle QDP + \angle QDA = 360^\circ$$

" " "

$180^\circ - 40^\circ$ 80° $180^\circ - 2\alpha$

$$360^\circ - 40^\circ + 80^\circ - 2\alpha = 360^\circ \Rightarrow \alpha = 25^\circ$$

Ответ: 25°



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases}$$

$$y(x-z) = (z-x)(z+x+3)$$

$$x+z+3 = -y$$

$$x+y+z = -3$$

$$\begin{aligned} (x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + 27 + 6(x+y+z) = \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + 9 = \sqrt{xy + yz + xz} + 18 = 18 \end{aligned}$$

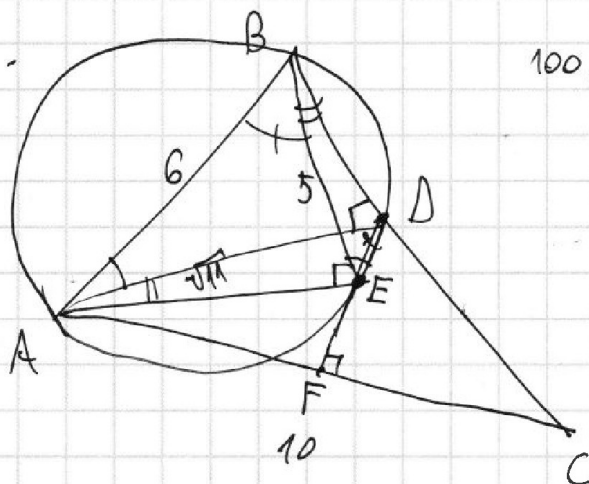
$$\frac{xy}{z} = z+3$$

$$\frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{x^2z^2}{y^2} + \frac{y^2z^2}{x^2} = \frac{x^4y^4 + x^4z^4 + y^4z^4}{x^2y^2z^2}$$

$$\begin{aligned} (10^{90000} - 1)^3 &= \\ \frac{n(n-1)(n-2)}{n(n-1)(n-2)} &= \frac{3}{6} \\ \frac{n-3}{n} \cdot \frac{n-4}{n-1} &\dots \end{aligned}$$

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 10^{34} - 3 \cdot 10^{24} + 3 \cdot 10^4 - 1$$

$$\tan \alpha = \tan \beta$$



$$100 AF^2 + 100 CD^2 = 100$$

$$\begin{aligned} 10 \cdot AF &= \\ AF^2 + AF^2 &= \\ \frac{DF}{AF} &= \frac{CF}{DF} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AD^2 + BD^2 &= 36 \\ AD^2 + CD^2 &= 100 \\ AD^2 &= AF^2 + DF^2 \\ AF^2 + AF^2 &= 11 \\ CD^2 &= CF^2 + DF^2 \end{aligned}$$

$$x^2 - (a^2 - a)x + a \cdot 5 = 0$$

$$4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$$

$$a_3, a_8 = \frac{24a^2 - a^6 - 4}{4}$$

$$x(x+5d) = x^2 + 5xd$$

$$(x+2d)(x+3d) = x^2 + 5xd + 6d^2$$

$$AF^2 + 2DF^2 + CF^2 = 100$$

$$AF^2 + 100 + AF^2 - 20 \cdot AF = 100$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 ИЗ

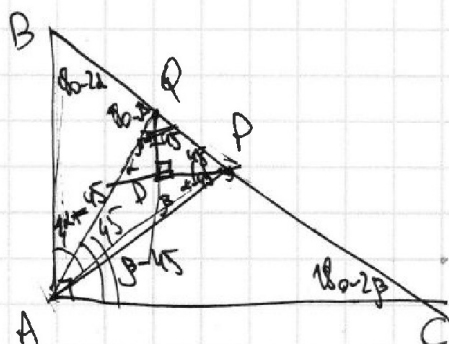
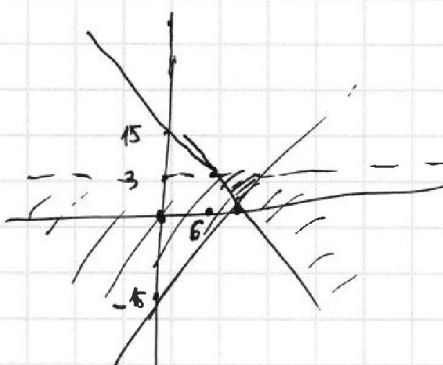
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{2y}{6\sqrt{3}} = \frac{y}{3\sqrt{3}} \leq 3$$

$$2x - 15 \leq 3$$

$$15 - 2x \leq 3$$

$$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

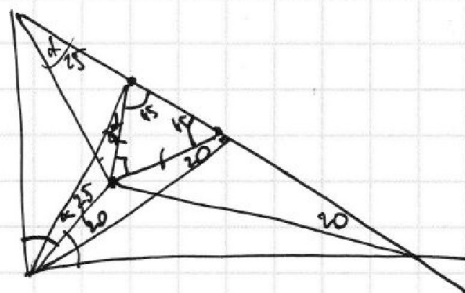
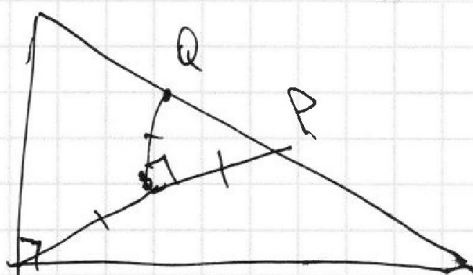
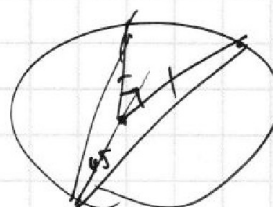


$$\angle 1 \beta = 135$$

$$140 + 30 = 270 \Rightarrow 180$$

$$360 - 270 = 90$$

$$d = 25$$



$$(a-3)(b-3) = (c-3) \cdot c$$

$$a^2 + b^2 + c^2$$

$$9z + 18 > 0$$

$$z > -2$$

$$(x^2 - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 48$$

$$a+b+c=6$$

$$(z+3)(z+6)$$

$$z^2 + 9z + 18$$

$$xyz = (x+3)(y+3)(z+3)$$

$$xyz = xyz + 3(xy+yz+xz) + 27 + 3(xy+yz+xz)$$

$$xy+yz+xz=0$$

$$\sqrt{(a-5)^2 - 4} = \sqrt{(a^2 - 10a + 25) - 4} = \sqrt{a^2 - 10a + 21} = \sqrt{a^2 - 2a^3 + a^2 - 4a + 20}$$

$$5 \quad 25$$

$$z$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$25(a^4 - 2a^3 + a^2 - 4a + 20) = \cancel{q^6 - 2a^5 + a^4 + 16a^4 - 8a^2 + 16a^6} + 16a^4$$

$$\cancel{25a^4 - 50a^3 + 25a^2 - 100a + 500 = 5a^6 - 2a^5 - 7a^4 - 8a^2 + 16a^6}$$

$$\cancel{5a^6 - 2a^5 - 32a^4 + 50a^3 - 33a^2 + 100a - 484 = 0}$$

$$\cancel{400a^4 - 800a^3 + 400a^2}$$

$$400(a^4 - 2a^3 + a^2 - 4a + 20) = a^6 - 2a^5 + a^4 - 32a^4 - 32a^2 + 16a^6 + 64$$

$$4x^2 - a^2(a-1)x + (a^2-2)(2-a^4) = 0$$

$$\frac{a^4(a-1)^2}{16} - (a^2-2)(2-a^4)$$

$$25 \cdot (64 \cdot 2 + 79) = 100 \cdot 37$$

$$25 \cdot 37 \neq 36 + 7 \cdot 127 = 883 + 36 = 925$$

$$750 + 175 = 925$$

$$431 - 264 = 167$$

$$625 + 23 \cdot 623 \neq 25 \cdot (\dots)$$

$$(a-4)(17a^5 + 466a^4 - 167a^3 + 1468a^2 + 5440a + 1393)$$

$$5872 - 332 = 5440$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x - \frac{15}{2} > \frac{y}{6\sqrt{3}}$$

$$6\sqrt{3}x - 45\sqrt{3} > y$$

$$y = 6\sqrt{3}x - 45\sqrt{3}$$

$$x - \frac{15}{2} > -\frac{y}{6\sqrt{3}}$$

$$6\sqrt{3}x - 45\sqrt{3} > -y$$

$$y > 45\sqrt{3} - 6\sqrt{3}x$$

$$2x - 15$$

