



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x + 3)^2 + (y + 3)^2 + (z + 3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шару. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leq 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = z(z+3) \\ yz = x(x+3) \\ zx = y(y+3) \end{cases}$$

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 6(x+y+z) + 27$$

Перемножим все:

$$x^2 y^2 z^2 = xyz(x+3)(y+3)(z+3)$$

$$xyz = (x+3)(y+3)(z+3) \quad (x, y, z \neq 0)$$

$$xyz = xyz + 3(xy + yz + xz) + 9(x+y+z) + 27$$

$$\begin{cases} 3xy + yz + xz + 9(x+y+z) + 9 = 0 \\ xy + yz + zx = 3(xy + z) + x^2 + y^2 + z^2 \end{cases}$$

Сложим все:

$$6(x+y+z) + 27 = 0$$

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz)$$

Пусть $a = x+y+z$, $b = x^2 + y^2 + z^2$, $c = xy + yz + xz$

$$\begin{cases} a^2 = b + 2c \\ c + 3a + 9 = 0 \\ c = 3a + b \Rightarrow b = c - 3a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = 3c - 3a \\ c + 3a + 9 = 0 \Rightarrow c = -9 - 3a \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a^2 + 3(-9 - 3a) - 3a &= 0 \\ a^2 - 12a - 27 &= 0 \\ (a-3)(a+9) &= 0 \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ a=-9 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1) a=3 \\ c &= -9 - 3a = -18 \\ b &= c - 3a = -18 - 9 = -27 \\ \text{но } b = x^2 + y^2 + z^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2 &= 3(-9 - 3a) - 3a \\ a^2 + 12a + 27 &= 0 \\ (a+3)(a+9) &= 0 \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ a=-9 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1) a=-3 \\ c &= -9 - 3a = 0 \\ b &= c - 3a = 9 \end{aligned}$$

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = b + 6a + 27$$

$$b + 6a + 27 = 9 - 6 \cdot 3 + 27 = 18$$

$$\begin{aligned} 2) a=-9 \\ c &= -9 - 3a = 18 \\ b &= c - 3a = 18 + 27 = 45 \end{aligned}$$

$$b + 6a + 27 = 45 - 6 \cdot 9 + 27 = 18$$

Значит всегда если есть реш., то $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = 18$
Ответ: 18



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = \overbrace{99 \dots 9}^x = 10^{40000} - 1$$
$$n^3 = (10^{40000} - 1)^3$$

Пусть в числе n x девяток ($x = 40000$)

$$n = \overbrace{99 \dots 9}^x = 10^x - 1$$

$$n^3 = (10^x - 1)^3 = 10^{3x} - 1 - 3 \cdot 10^{2x} + 3 \cdot 10^x = \overbrace{9 \dots 9}^{3x} - \underbrace{30 \dots 0}_{2x} + \underbrace{30 \dots 0}_x$$

$$= \underbrace{9 \dots 9}_{x-1} \underbrace{69 \dots 9}_{2x} + \underbrace{30 \dots 0}_x = \underbrace{9 \dots 9}_{x-1} \underbrace{70 \dots 0}_{x-1} \underbrace{29 \dots 9}_x$$

$$+ \begin{array}{r} 11 \quad 11 \\ 9 \dots 9 \quad 69 \dots 9 \quad 99 \dots 9 \\ \hline 9 \dots 9 \quad 70 \dots 00 \quad 29 \dots 9 \end{array}$$

↑ $2x-1$ девяток

$$2x-1 = 2 \cdot 40000 - 1 = 79999$$

Ответ: 79999



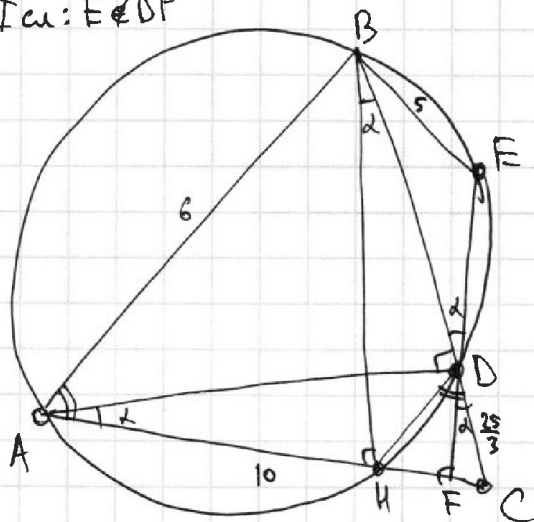
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

I сл: $E \notin DF$



AB - диаметр $\Rightarrow \angle ADB = 90^\circ$

$H = AC \cap w$. Аналогично $\angle AHB = 90^\circ$

$\angle = \angle BDE = \angle FDC$ (вертикальные)

$\angle FCD$
 $\triangle FDC: \angle FDC = 180 - 90 - \alpha = 90 - \alpha$

$\triangle ADC: \angle DAC = (180 - 90 - (90 - \alpha)) = \alpha$

$\angle DAC = \alpha = \angle BDE$

$\overset{\frown}{DH} = \overset{\frown}{BE}$ (меньшие)

$DH = BE = 5$

$ABDH$ - впис. $\Rightarrow \angle BAH = \angle HDC \Rightarrow \triangle HDC \sim \triangle BAC$ (по углам) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{DH}{AB} = \frac{HC}{BC} \Rightarrow \frac{5}{10} = \sin \alpha$
" " $\sin \angle HBC$

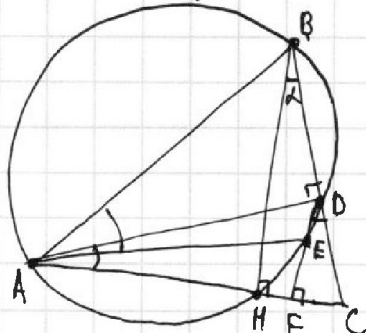
($\angle BHC = 90^\circ = \angle DFC \Rightarrow BH \parallel DF \Rightarrow \angle HBC = \angle FDC = \alpha$)

$\sin \alpha = \frac{DC}{AC} \Rightarrow DC = \frac{5}{6} \cdot 10 = \frac{25}{3}$ ($\triangle ADC$)

$\sin \alpha = \frac{FC}{DC} \Rightarrow FC = \frac{5}{6} \cdot \frac{25}{3} = \frac{125}{18}$ ($\triangle FDC$)

$AF = AC - FC = 10 - \frac{125}{18} = \frac{180 - 125}{18} = \frac{55}{18}$

Ответ: $\frac{55}{18}$ II сл: $E \in DF$



$\angle HBC = \angle FDC = \alpha$

$ABDE$ впис. $\Rightarrow \angle EDC = \angle BAE$

Аналогично I сл. $\angle DAC = \alpha$

Значит $\angle BAE = \angle DAH \Rightarrow \overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{DH} \Rightarrow BE = DH = 5$

Все остальные как в I сл.

Е не может быть за точкой F, т.к. $\angle AEF > 90^\circ$

Ответ: $\frac{55}{18}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$P_{\text{выигрыша}} = \frac{\text{кол-во выигрышных вар.}}{\text{кол-во всех вар.}}$; n - кол-во коробок

1) $P_1 = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}$
 $\leftarrow$ выбрать 2 из $n-3$ оставшихся пустых коробок
 $\leftarrow$ выбрать 5 коробок

$$P_1 = \frac{\frac{(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}} = \frac{60}{n(n-1)(n-2)}$$

2) $P_2 = \frac{C_{n-3}^3}{C_n^6}$
 $\leftarrow$ выбрать 3 пустые коробки из ост. $n-3$
 $\leftarrow$ выбрать 6 коробок

$$P_2 = \frac{\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{6}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}} = \frac{120}{n(n-1)(n-2)}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{120}{n(n-1)(n-2)}}{\frac{60}{n(n-1)(n-2)}} = 2$$

Ответ: 2



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1-я прогрессия $6-9\sqrt{37}, 6-7\sqrt{37}$

$$\underbrace{6-5\sqrt{37}}_{x_3}, \underbrace{6-3\sqrt{37}}_{x_1}, \underbrace{6-\sqrt{37}}_{x_2}, \underbrace{6+\sqrt{37}}_{x_2}, \underbrace{6+3\sqrt{37}}_{x_2}, \underbrace{6+5\sqrt{37}}_{x_4}$$

Значит $a=4$ подходит, другие нет.

Ответ: $a=4$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☒6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0 \leftarrow \text{корни } x_1 \text{ и } x_2$$

По м. Виета $x_1 + x_2 = a^2 - a$ ~~$x_1 x_2 = a - 5$~~ (по усл. оба корня есть)

$$4x^2 - (a^2 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0 \leftarrow \text{корни } x_3 \text{ и } x_4$$

По м. Виета $x_3 + x_4 = \frac{a^2 - a^2}{4}$

Пусть $b, b+d, \dots, b+kd$ — арифм. прогрессия

значит $x_1 = b+4d, x_2 = b+5d, x_3 = b+2d, x_4 = b+7d$

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 2b + 9d$$

$$a^2 - a = \frac{a^2 - a^2}{4}$$

$$a^3 - 5a^2 + a = 0$$

$$a(a-1)(a-4) = 0$$

значит единственно возм. варианты a — это 0, 1, 4

1) $a = 0$

$$x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x_1 = \sqrt{5}, x_2 = -\sqrt{5}$$

$$4x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_3 = 1, x_4 = -1$$

$$2b + 9d = 0$$

$$b = -\frac{9}{2}d$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b+4d = \pm\sqrt{5} \\ b+5d = \pm\sqrt{5} \\ b+2d = \pm 1 \\ b+7d = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d(4-\frac{9}{2}) = \pm\sqrt{5} \Rightarrow d \notin \mathbb{Q} \\ d(2-\frac{9}{2}) = \pm 1 \Rightarrow d \in \mathbb{Q} \end{cases} !!$$

2) $a = 1$

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2$$

$$4x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{2}, x_4 = -\frac{1}{2}$$

$$2b + 9d = 0$$

$$b = -\frac{9}{2}d$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b+4d = \pm 2 \\ b+5d = \pm 2 \\ b+2d = \pm \frac{1}{2} \\ b+7d = \pm \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow d = \pm 4$$

Если $d = 4$, то $b+7d = \pm 2 + 8 \neq \pm \frac{1}{2} !!$

Если $d = -4$, то $b+7d = \pm 2 - 8 \neq \pm \frac{1}{2} ..$

3) $a = 4$

$$x^2 - 12x - 1 = 0$$

$$4x^2 - 48x + 4(2 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4 - 4^5 - 1) \geq 0$$

$$x^2 - 12x + 889 = 0$$

$$D = 144 + 4 \cdot 889 = 4 \cdot 25 \cdot 37$$

$$x_{3,4} = \frac{12 \pm 10\sqrt{37}}{2} = 6 \pm 5\sqrt{37}$$

$$x^2 - 12x - 1 = 0$$

$$D = 144 + 4 = 148 = 4 \cdot 37$$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm 2\sqrt{37}}{2} = 6 \pm \sqrt{37}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Поток внутри $XOEBA$ не может быть в заметной фигуре, т.к. иначе:

~~Y~~ $\exists Y \in$ замет. фигура

$A'D_i$ — отрезок прямой, когда Y была на его стороне AD (может момент был, т.к. AD заметает все между $ар$)

$Y \in A'D_i \Rightarrow A_i \in B'XA$, но A всегда на дуге ABB' !!

Аналогично по $XOE'E'B'$

$$S_{\text{замет. фигуры}} = \frac{\pi \cdot 18^2}{2} - \frac{\pi \cdot 6^2}{2} + S_{\triangle OAB'} + S_{\triangle OAB'} - S_{\triangle A'B'E'O} - S_{\triangle OBA} + S_{\triangle B'E'C'} + S_{\triangle DEA} = \pi \cdot 144 + 2 \cdot \frac{\pi \cdot 18^2}{2} - \frac{20A}{360} - \frac{6 \cdot 9\sqrt{3}}{2} - \frac{6 \cdot 9\sqrt{3}}{2} + \frac{9\sqrt{3} \cdot 9}{2} + \frac{9\sqrt{3} \cdot 9}{2} \equiv$$

$$\sin \angle BOA = \frac{9}{18} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle BOA = 30^\circ (\angle BOA < 90^\circ)$$

$$\equiv 144\pi + \frac{\pi \cdot 18^2}{6} - 54\sqrt{3} + 27\sqrt{3} = 198\pi - 27\sqrt{3}$$

Ответ: $198\pi - 27\sqrt{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

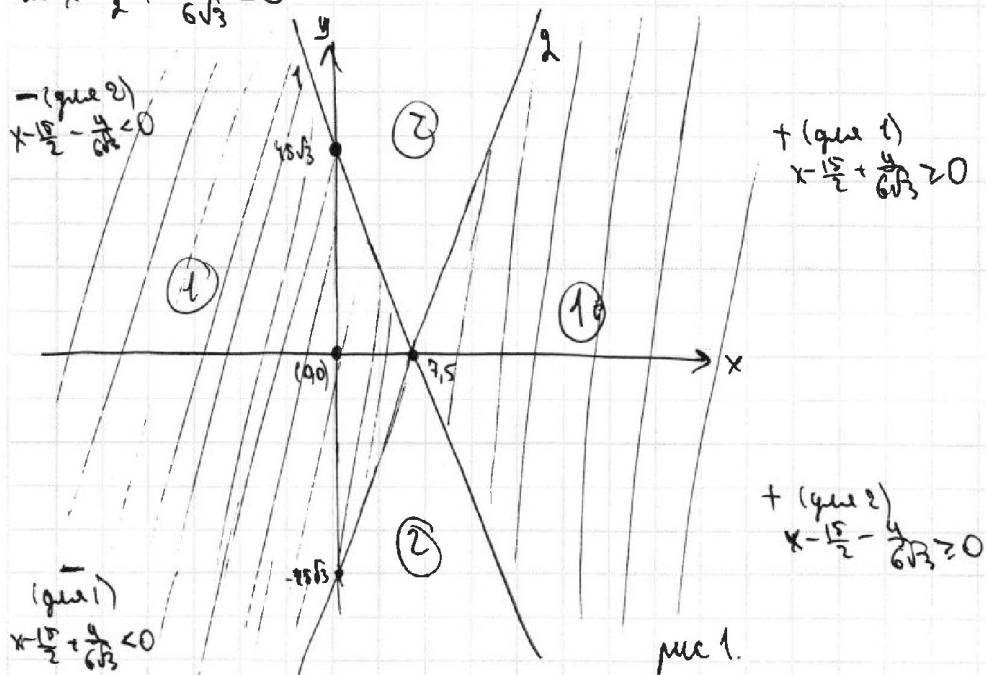
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. $x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} = 0 \leftarrow \text{прямая}$
 2. $x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} = 0 \leftarrow \text{прямая}$



$$\left| x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| + \left| x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| \leq 3$$

$$\left(x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \right)^2 + \left(x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \right)^2 + 2 \left| \left(x - \frac{15}{2} \right)^2 - \left(\frac{y}{6\sqrt{3}} \right)^2 \right| \leq 9$$

можем возвести в кв., т.к. обе части ≥ 0

$$\frac{2}{3} \left(x - \frac{15}{2} \right)^2 + \frac{2}{3} \frac{y^2}{36 \cdot 3} + 2 \left| \left(x - \frac{15}{2} \right)^2 - \left(\frac{y}{6\sqrt{3}} \right)^2 \right| \leq \frac{9}{2}$$

① $\left(x - \frac{15}{2} \right)^2 - \left(\frac{y}{6\sqrt{3}} \right)^2 \geq 0$

$$\left(x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \right) \left(x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \right) \geq 0$$

$\geq 0 \quad \geq 0$
 $\leq 0 \quad \leq 0$

Этому соотв. точки в закрашенной области + сами прямые на рис. 1

$$2 \left(x - \frac{15}{2} \right)^2 \leq \frac{9}{2}$$

$$\left| x - \frac{15}{2} \right| \leq \frac{3}{2} \Rightarrow 8 \leq x \leq 9$$

рис. 2

② $\left(x - \frac{15}{2} \right)^2 - \left(\frac{y}{6\sqrt{3}} \right)^2 \leq 0$

$$\left(x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \right) \left(x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \right) \leq 0$$

$> 0 \quad < 0$
 $< 0 \quad > 0$

Этому соотв. точки в незакрашенной области на рис. 1

$$2 \left(\frac{y}{6\sqrt{3}} \right)^2 \leq \frac{9}{2}$$

$$\left| \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| \leq \frac{3}{2} \Rightarrow -9\sqrt{3} \leq y \leq 9\sqrt{3}$$

рис. 2



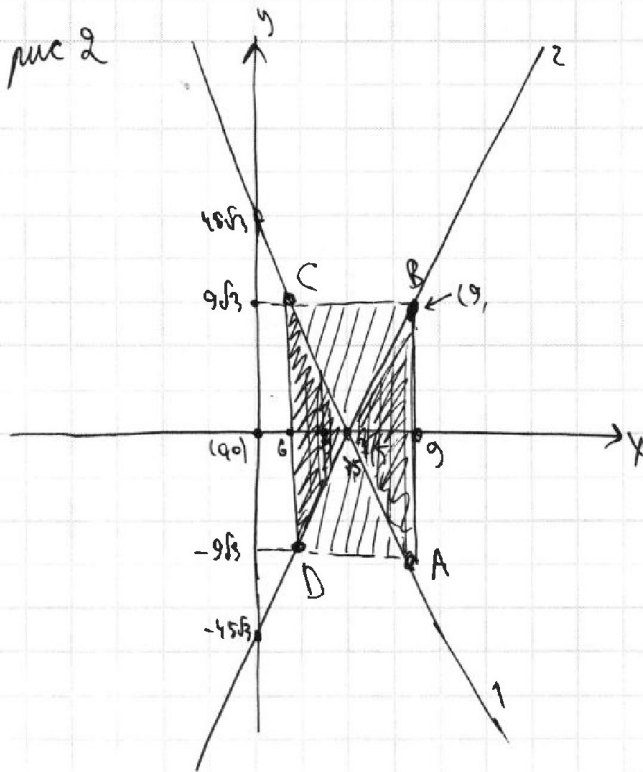
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

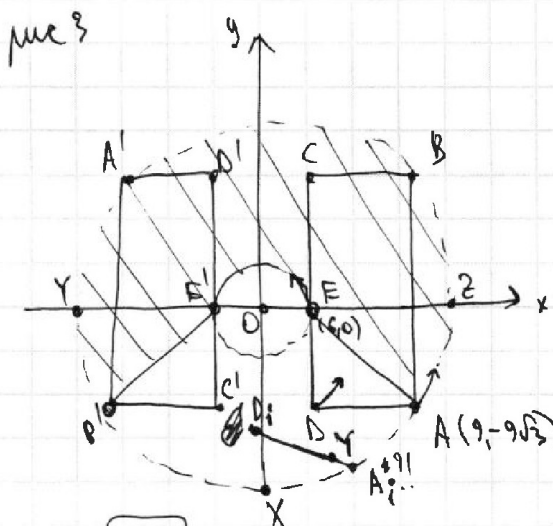
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} = 0$$

$$x = 9 \Rightarrow y = 1,5 \cdot 6\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

Значит Φ — параллелограмм как на рис 2. (ABCD)



$$R_{0^{180}}: P \rightarrow P', A \rightarrow A', C \rightarrow C', B \rightarrow B', E \rightarrow E'$$

Заметим, что точка A будет двигаться по окружности с рад. 18° , а точка E — по окружности с рад. 6 (т.к. расст. до (0,0) фикс.) с центром в (0,0)

Тогда отрезок AE заметает всю область между этими двумя окружностями
аналогично про отрезок EB

$$OA = \sqrt{81 + 81 \cdot 3} = 18$$

Заметим, что точки вне "бублика" не могут быть в заштрихованной фигуре, т.к. расстояние до (0,0) от ее точек всегда ≥ 6 и $\leq 9\sqrt{3}$

Тогда заштрихованная фигура — заштрихованная область + $\triangle B'E'C'$ + $\triangle A'E$
(Потому что внутри $\angle OEA$ не может быть, т.к. вращаясь против часовой, аналогично про $A'E$ и $B'E'$)



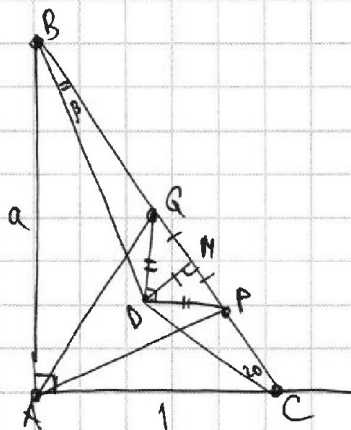
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle DBC = \beta, M - \text{середина } DP \Rightarrow MQ = MP = MD$$

$$AC = 1, AB = a \Rightarrow BC = \sqrt{a^2 + 1}$$

$$QP = BP + QC - AB = AB + AC - BC = a + 1 - \sqrt{a^2 + 1}$$

$$MC = \frac{QP}{2} = \frac{a + 1 - \sqrt{a^2 + 1}}{2}$$

$$= \frac{1 - a - \sqrt{a^2 + 1}}{2}$$

$$MB = BC - MC = \sqrt{a^2 + 1} - \frac{1 - a - \sqrt{a^2 + 1}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + 1} - 1 - a}{2}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{DM}{MC} = \frac{QP}{2MC} = \frac{a + 1 - \sqrt{a^2 + 1}}{1 - a - \sqrt{a^2 + 1}}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan \beta}{\tan 2\alpha} = \frac{1 - a - \sqrt{a^2 + 1}}{\sqrt{a^2 + 1} - 1 - a}$$

$$\tan \beta = \frac{DM}{BM} = \frac{QP}{2BM} = \frac{a + 1 - \sqrt{a^2 + 1}}{\sqrt{a^2 + 1} - 1 - a}$$

$$\tan 2\alpha - \tan 2\alpha \cdot a - a - 1 = \sqrt{a^2 + 1} (\tan 2\alpha - 1)$$

$$(\tan 2\alpha - 1 - a(\tan 2\alpha + 1)) = \sqrt{a^2 + 1} (\tan 2\alpha - 1)$$

$$(\tan 2\alpha - 1)^2 + a^2 (\tan 2\alpha + 1)^2 - 2(\tan 2\alpha - 1)a(\tan 2\alpha + 1) = (a^2 + 1)(\tan 2\alpha - 1)^2$$

$$a^2 \tan^2 2\alpha + a^2 + 2a^2 \tan 2\alpha - 2a(\tan^2 2\alpha - 1) = a^2 \tan^2 2\alpha + a^2 - 2\tan 2\alpha a^2$$

$$4a^2 \tan 2\alpha - 2a(\tan^2 2\alpha - 1) = 0; a \neq 0$$

$$2a \tan 2\alpha - (\tan^2 2\alpha - 1) = 0$$

$$a = \frac{\tan^2 2\alpha - 1}{2 \tan 2\alpha}$$

$$\tan \beta = \tan 2\alpha \cdot \frac{1 - \frac{\tan^2 2\alpha - 1}{2 \tan 2\alpha} - \sqrt{\frac{\tan^2 2\alpha - 2 \tan 2\alpha + 1}{4 \tan^2 2\alpha}}}{\sqrt{-11} - 1 - \frac{\tan^2 2\alpha - 1}{2 \tan 2\alpha}} =$$

$$= 1 - \frac{\tan 2\alpha}{2} + \frac{1}{2 \tan 2\alpha} - \frac{\tan^2 2\alpha + 1}{2 \tan 2\alpha} = \frac{1 - \tan 2\alpha}{\frac{1}{\tan 2\alpha} - 1} = \tan 2\alpha$$

$$\frac{\frac{\tan^2 2\alpha + 1}{2 \tan 2\alpha} - 1 - \frac{\tan 2\alpha}{2} + \frac{1}{2 \tan 2\alpha}}{\frac{1}{\tan 2\alpha} - 1} = \tan 2\alpha$$

Ответ: $2\alpha^\circ$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{\frac{1}{2} \sqrt{3}}{\frac{1}{2}} + 1 = \frac{-2a}{\sqrt{24} - 1 - a} = \frac{2a}{\sqrt{24} + 1 + a}$$

$$\frac{1}{2} = \cos 60 = \cos(3 \cdot 20) = 4 \cos^3 20 - 3 \cos 20$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60 = \sin(3 \cdot 20) = 3 \sin 20 - 4 \sin^3 20$$

$$\begin{cases} 8 \cos^3 20 - 6 \cos 20 - 1 = 0 \\ -8 \sin^3 20 + 6 \sin 20 - \sqrt{3} = 0 \end{cases}$$

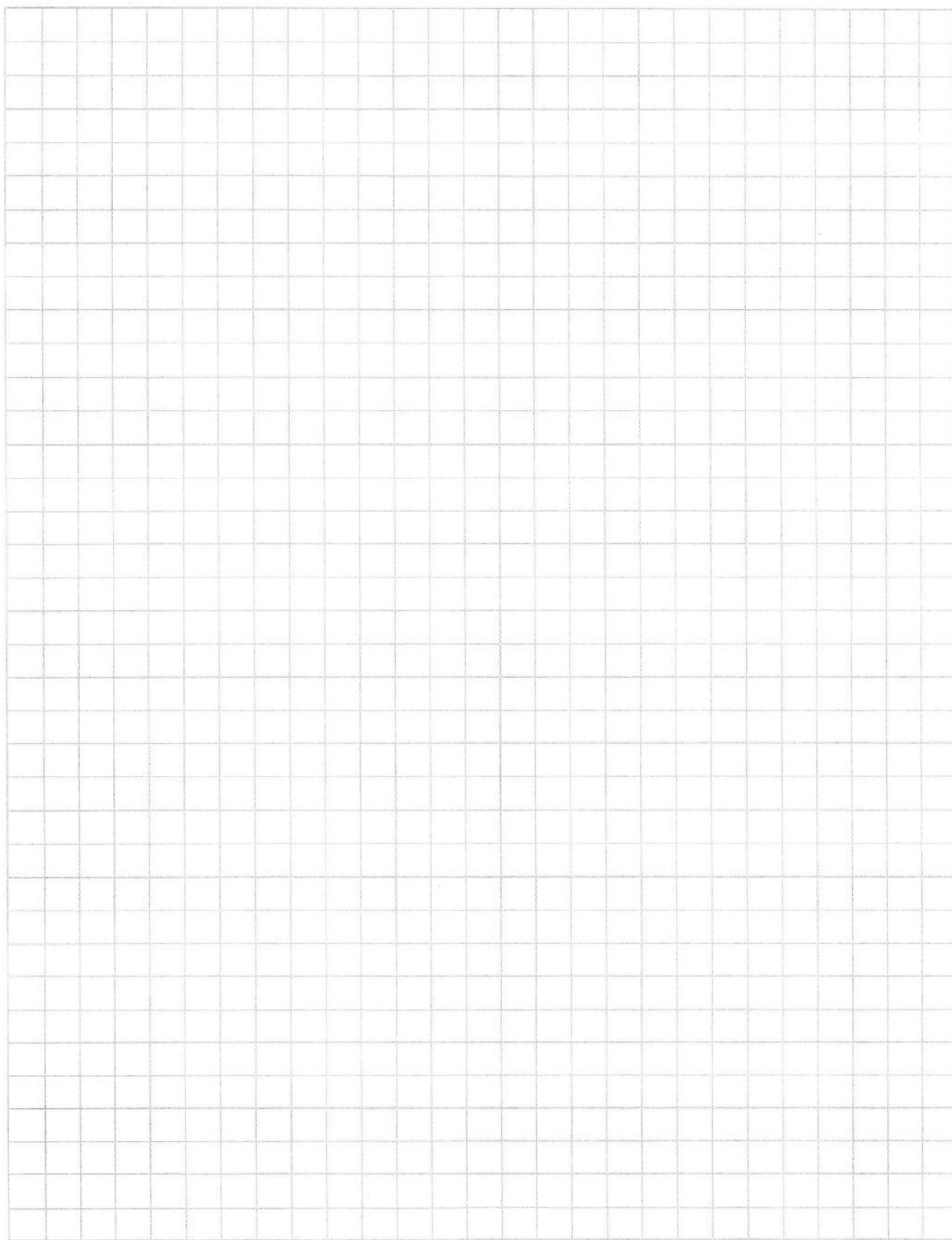


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



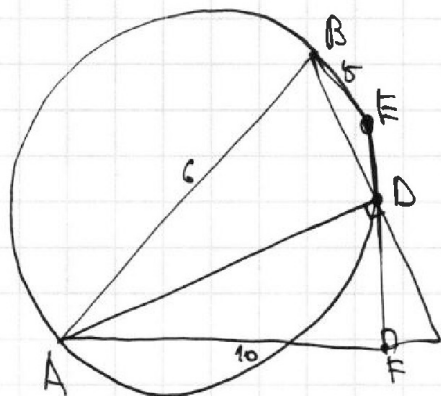


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

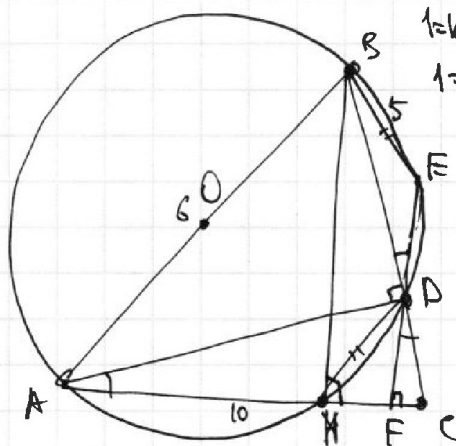
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$1 = (\sqrt{k} + \sqrt{m})^3 - 3(\sqrt{k} - \sqrt{m})$$

0 0 0 $\xrightarrow{n-3}$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = 4a^3 - 3a \\ \frac{\sqrt{3}}{2} = 3b - 4b^3 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases} \begin{cases} 8a^3 - 6a - 1 = 0 \\ -8b^3 + 6b - \sqrt{3} = 0 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$$



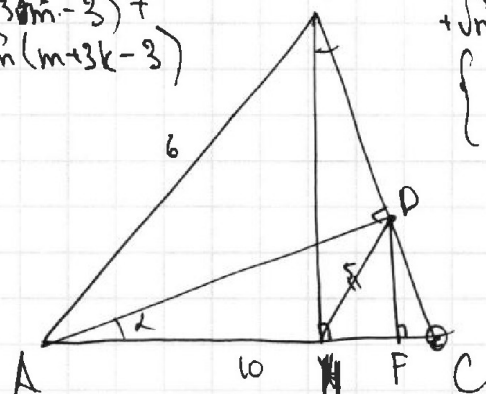
$$1 = k\sqrt{k} + m\sqrt{m} + 3k\sqrt{m} + 3m\sqrt{k} - 3\sqrt{k} - 3\sqrt{m}$$

$$1 = \sqrt{k}(k + 3m - 3) + \sqrt{m}(m + 3k - 3)$$

$$k=1$$

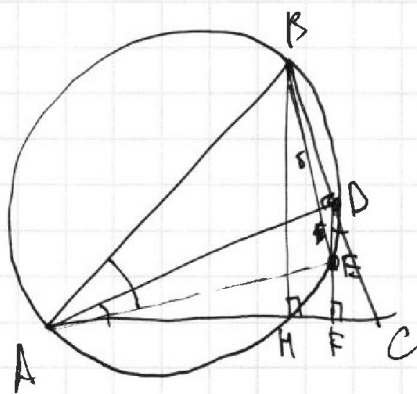
$$1 = 3m - 2 + \sqrt{m}(m + 3 - 3)$$

$$\begin{cases} m=0 \end{cases}$$



$$\frac{5}{6} = \frac{DH}{AB} = \frac{HC}{BC} = \sin \angle C = \frac{DC}{AC=10}$$

$$DC = \frac{5 \cdot 10}{6} = \frac{25}{3}$$



③ ⑥ ⑦ ⑧ ... ⑩

n карточек C_n^5 - всего вар.
 ~~$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$~~ C_{n-3}^2 - хороших вар

$$P_1 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2} = \frac{60}{n(n-1)(n-2)}$$

$$P_2 = \frac{C_{n-3}^3}{C_n^6}$$

$$= \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{6} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{120}{n(n-1)(n-2)}$$

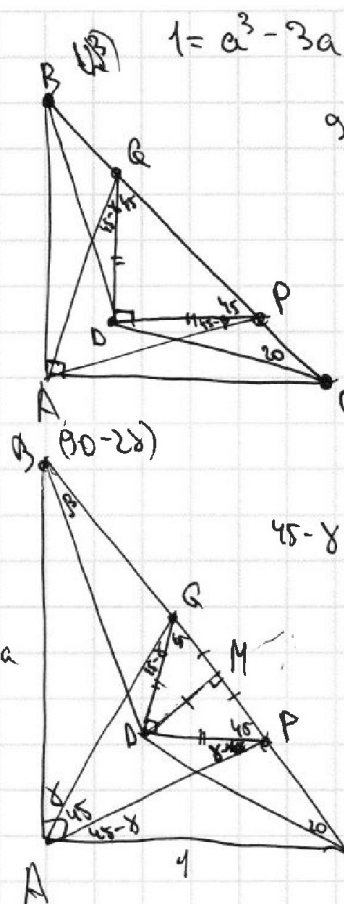


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$1 = a^3 - 3a$$

$$(a-b)(2+ab)$$

$$90 - \gamma - 45$$

$$\cos 60 =$$

$$8(a-b)(a^2+b^2+ab) + 6(a-b) = 1 + \sqrt{3}$$

$$\begin{cases} x(2+y) = 1 + \sqrt{3} \\ x^2 + 2y = 1 \\ y = x^2 + \frac{1-x^2}{2} \end{cases}$$

$$\frac{a+1}{2a^2+a+3-2\sqrt{a^2+1}} (\sqrt{6}-1) - 3(\sqrt{6}-1) =$$

$$= 6\sqrt{6} + 1 + 3 - 3 \cdot 6 =$$

$$(\sqrt{6}-\sqrt{2})^3 = 6\sqrt{6} - 2\sqrt{2} + 6\sqrt{2} -$$

$$= 18\sqrt{2} = 12\sqrt{6} - 10\sqrt{2}$$

$$BP \neq AB \rightarrow$$

$$AB + AC - BP = BC$$

$$BP = \frac{AB+AC}{BC} = \frac{a+1}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$PC = AC - \frac{AB+AC}{BC} = 1 - \frac{a+1}{\sqrt{a^2+1}} =$$

$$= \frac{\sqrt{a^2+1} - a - 1}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$\frac{\lg B}{\lg 20} = \frac{MC}{BM} = \frac{2\sqrt{a^2+1} - a - 1}{2a^2+a+3-2\sqrt{a^2+1}}$$

$$MC = \frac{\sqrt{a^2+1} - a - 1}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{a+1}{2\sqrt{a^2+1}} = \frac{2\sqrt{a^2+1} - a - 1}{2\sqrt{a^2+1}}$$

$$DM = \frac{a+1}{2\sqrt{a^2+1}}$$

$$\lg 20 = \frac{a+1}{2\sqrt{a^2+1} - a - 1}$$

$$BM =$$

$$BM = \sqrt{a^2+1} - \frac{2\sqrt{a^2+1} - a - 1}{2\sqrt{a^2+1}} = \frac{2(a^2+1) - 2\sqrt{a^2+1}(a+1) + a^2+a+3-2\sqrt{a^2+1}}{2\sqrt{a^2+1}}$$

$$\cos 3\alpha = \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha = \cos^3 \alpha - \sin^2 \alpha \cos \alpha - 2\sin^2 \alpha \cos \alpha = \cos^3 \alpha - 3(1-\cos^2 \alpha) \cos \alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$$

$$\sin 3\alpha = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha = 2\sin \alpha \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha = 3\sin \alpha (1-\sin^2 \alpha) = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0 \quad \leftarrow \begin{matrix} x_1 x_2 \\ b+4d, b+5d \end{matrix} \quad \leftarrow \begin{matrix} c+2d, c+3d \end{matrix}$$

$$4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0 \quad \leftarrow \begin{matrix} x_3 x_4 \\ b+2d, b+7d \end{matrix} \quad \leftarrow \begin{matrix} c, c+5d \end{matrix}$$

$$a \quad b, b+d, b+2d, \dots, b+7d$$

$$x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$$

$$D = a^4 + a^2 - 2a^3 - 4a + 20$$

$$x_1 + x_2 = 2b + 9d = a^2 - a$$

$$x_1 x_2 = b^2 + 9bd + 20d^2 = a - 5$$

$$\begin{cases} 2b + 9d = a^2 - a \\ 2b + 9d = \frac{a^2 - a^2}{4} \end{cases}$$

$$\frac{a^3 - a^2}{4} = a^2 - a$$

$$a^3 - 5a^2 + 4a = 0$$

$$a(a^2 - 5a + 4) = 0$$

$$a(a-1)(a-4) = 0$$

$$x_3 + x_4 = \frac{a^3 - a^2}{4} = 2b + 9d$$

$$x_3 x_4 = \frac{2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4}{4} = b^2 + 9bd + 20d^2$$

$$-\frac{b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad -\frac{b \pm \sqrt{D}}{2a}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} = 0$$

$$6\sqrt{3}x - 45\sqrt{3} + y = 0$$

$$y = -6\sqrt{3}x + 45\sqrt{3}$$

$$\frac{45}{6} = \frac{15}{2}$$

$$y = 6\sqrt{3}x - 45\sqrt{3}$$

$$\frac{18\sqrt{3}}{54} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{\sqrt{1 + \frac{1}{36 \cdot 3}}} = \frac{3}{\sqrt{\frac{37}{12}}} = \frac{3}{\sqrt{3 \cdot \frac{37}{4}}} = \frac{3}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{37}{4}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{37} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{37}}$$

$$|c-d| + |c+d| \leq 3$$

$$2c^2 + 2d^2 + 2|c^2 - d^2| \leq 3$$

$$1) |c| \geq |d|$$

$$4c^2 \leq 3$$

$$|d| \leq c \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2) |c| < |d|$$

$$d \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(x-y) + |x+y|$$

$$x - \frac{15}{2} \leq \frac{y}{6\sqrt{3}}$$

$$x \leq \frac{15 + \sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{y}{6\sqrt{3}} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y \leq 9$$

$$x = \frac{15 + \sqrt{3}}{2}$$

$$y = -6\sqrt{3} \left(\frac{15 + \sqrt{3}}{2} \right) + 45\sqrt{3} = 9$$



$$2x^2 + \frac{225}{4} \cdot 2 + \frac{y}{36\sqrt{3}} \cdot 2 - 15x \cdot 2 + 2 \left| \left(x - \frac{15}{2} \right)^2 - \frac{y^2}{36} \right| \leq 9$$

$$2x^2 + 22$$

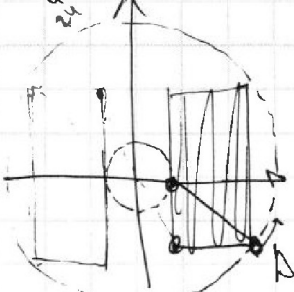
$$x - \frac{15}{2} \geq \frac{y}{6\sqrt{3}} \geq 0$$

$$x - \frac{15}{2} \leq -\frac{y}{6\sqrt{3}}$$

$$|c| \geq |d|$$

$$(c-d)(c+d) \geq 0$$

$$\left(x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \right) \left(x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \right) \geq 0$$



$$\frac{1242}{1465}$$

$$\frac{2076}{1242}$$

$$\frac{360}{60} \cdot \frac{15}{24} = \frac{15}{4}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐

СТРАНИЦА

8 ИЗ 8

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Полук внутри XOEDA не может быть в заштрихованной фигуре, т.к. иначе:

Y не заштрихован фигуре.

$A'D'$ — сторона ~~прямоугольника~~ отрезок ~~прямоугольника~~ паралл. стороне AB $\Rightarrow$ по стороне AB . $\Rightarrow$ когда-то $Y \in A'D' \Rightarrow A' \in B'XA$, но A была на дуге ABB' ! Аналогично по $XOED'$

$$S_{\text{зашт. фигур}} = \frac{\pi \cdot 18^2}{2} - \frac{\pi \cdot 6^2}{2} + S_{\triangle OAB'} + S_{\triangle OBA} - S_{\triangle B'EO} - S_{\triangle OEA} =$$

$$= \frac{\pi \cdot 18^2}{2} - \frac{\pi \cdot 36}{2} + \frac{\pi \cdot 18^2}{2} \cdot \frac{\angle BOA}{360} \cdot 2 - \frac{8 \cdot 9\sqrt{3}}{2} - \frac{8 \cdot 9\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{\pi \cdot 18^2}{2} - \frac{\pi \cdot 36}{2} + \frac{\pi \cdot 18^2}{2} \cdot \frac{30}{360} \cdot 2 - 81\sqrt{3} \quad \textcircled{1}$$

$$(\sin \angle BOA = \frac{9}{18} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle BOA = 30 \quad (\angle BOA < 90))$$

$$\textcircled{1} \quad \frac{\pi \cdot 18^2}{2} - \frac{\pi \cdot 36}{2} + \frac{\pi \cdot 243}{24} \cdot 2 - 81\sqrt{3} = \pi \cdot \frac{207 \cdot 6}{12} + \frac{\pi \cdot 243}{12} - 81\sqrt{3} =$$

$$= \pi \cdot \frac{1485}{12} - 81\sqrt{3} = \pi \cdot \frac{495}{4} - 81\sqrt{3}$$

Ответ: $\pi \cdot \frac{495}{4} - 81\sqrt{3}$

$$\textcircled{2} \quad \pi \cdot 144 + \pi \cdot 18^2 \cdot \frac{1}{360} - 81\sqrt{3} = \pi \cdot 144 + \pi \cdot \frac{54}{2} - 81\sqrt{3} =$$

$$= 198\pi - 81\sqrt{3}$$

Ответ: $198\pi - 81\sqrt{3}$