



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 15$, $BE = 10$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарик. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$ являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$ являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| + \left|y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leq 6$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle DBC = 35^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

$$h = \frac{10^{25000} - 1}{10} \Rightarrow h^3 = 10^{75000} - 1 + 3 \cdot 10^{25000} (1 - 10^{25000}) =$$

$$= 10^{75000} - 3 \cdot 10^{50000} + 3 \cdot 10^{25000} - 1$$

$10^{75000} - 1$ — число из 75000 девяток

Если мы вычитаем $3 \cdot 10^{50000}$, то на 50000 месте с конца

мы заменим 9 на 6

999...9...9
75000 50000

Если в строке мы вычитаем $3 \cdot 10^{25000}$, то с количеством 25000 девяток

99...959...9
25000 50000

ничего не случится, а девятки слева и справа превратятся в 0 (без предыдущих разрядов), а 25000 с конца превратятся в 2, 6 в 7, то слева останется 4. Проведя $25000 + 25000 + 4 = 49999$ девяток

Ответ: 50000 49999



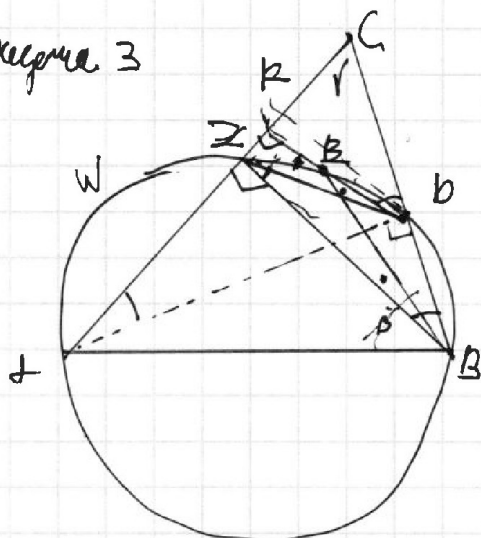
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3



нужно $\angle ACB = \gamma$, $\angle ABC = \beta$

по Th Sin $\frac{AB}{\sin \gamma} = \frac{AC}{\sin \beta}$

$$\Rightarrow \frac{15}{\sin \gamma} = \frac{10}{\sin \beta} : 3 \sin \beta = 2 \sin \gamma$$

$$9 \sin^2 \beta = 4 \sin^2 \gamma$$

$$9 - 9 \cos^2 \beta = 4 - 4 \cos^2 \gamma$$

$$5 - 9 \cos^2 \beta = -4 \cos^2 \gamma$$

$$5 - 9 (\sin(90^\circ - \gamma))^2 = -4 \sin^2(90^\circ - \gamma)$$

заменим:

$\angle ACB = 90^\circ - \gamma$ - на рисунке:

$\Rightarrow \angle C + \beta = 90^\circ - \gamma$, $\angle ACB = 90^\circ - \gamma$

$AC \perp BC \Rightarrow \angle ACB = 90^\circ \Rightarrow AC \parallel BC$

$\angle KCB = \angle KCB = 90^\circ - \gamma$ м.к. рисунке, $\angle KCB = \angle KCB = 90^\circ - \gamma$ м.к. рисунке

$\Rightarrow \angle KCB = 90^\circ - \gamma$ (не ст. рав. углы)

$$\frac{AB}{\sin(90^\circ - \gamma)} = AC = AB \Rightarrow \sin(90^\circ - \gamma) = \frac{10}{15} \Rightarrow \sin \gamma = \frac{2}{3} \Rightarrow \sin \gamma = \frac{2}{3} \Rightarrow \sin \gamma = \frac{2}{3} \Rightarrow \sin \gamma = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \sin \beta = \frac{2}{3} \sin \gamma = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \Rightarrow \beta = \arcsin \frac{4}{9} \Rightarrow \beta = \arcsin \frac{4}{9} \Rightarrow \beta = \arcsin \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow AC = 10 \sin \cos(90^\circ - \gamma) = 10 \cdot \sin \gamma = \frac{20}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{40}{9}$$

$$= \frac{16}{9} \cdot 2 \sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{40}{9}$$

Ответ: $\frac{40}{9}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

Изначально шарик возвращается в исходное положение, от 1 до $n-1$ и возвращается с вероятностью $\frac{1}{n}$. Всего возможных точек - C_n^3 .

а. Шарик возвращается в исходное положение, то это значит генерация $\frac{C_n^3}{C_n^5} = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$

а. шанс - $\frac{C_n^3}{C_n^5} = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{C_n^5}{C_n^3} = \frac{(n-5)! \cdot 5!}{n!} \cdot \frac{n!}{(n-3)! \cdot 3!} = \frac{5! \cdot 8!}{(n-3)(n-4)(n-5)}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5

$$a_1 - 4 \text{ член прогрессии} \Rightarrow a_2 = a_1 + d, a_3 = a_1 + 2d = a_2 + a_3 = 2a_1 + 3d,$$

$$a_4 = 2a_1 + 3d, a_5 = a_1 + 4d \Rightarrow a_4 + a_5 = 2a_1 + 7d = a_2 + a_3.$$

Если из 2х уравнений будут независимые решения, то сумма решений 1-го равна сумме решений 2-го

$$\Rightarrow \frac{a^2 - a}{2} = \frac{a^3 - a^2}{2} \text{ по Т. Виета}$$

$$\Rightarrow a^3 - 3a^2 + a = 0 \Rightarrow a(a-1)(a-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=1 \\ a=2 \end{cases}$$

проверим:

$$a=0: x^2 + \frac{2}{3} = 0 \text{ - нет решений}$$

$$a=1 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{3} = 0 \text{ - нет решений}$$

$$a=2 \Rightarrow x^2 - 2x - \frac{6}{5} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 1.2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2.2} \text{ по Т. Виета}$$

$$\text{по } 2x^2 - 4x - 12 - 16 - 4 = x^2 - 2x - 64 - 8 - 2 = x^2 - 2x - 74 = 0,$$

$$b_{1,2} = 1 \pm \sqrt{75}, x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{75}$$

Если x_1, x_2 являются целыми чл. пр., то $a_5 - a_4 = d$

$$a_5 - a_4 = d \Rightarrow a_1 + 4d - (a_1 + 3d) = 1 - 16 = -15, a_5 = -13$$

Аналог. Если $d = -1 - 3 = -4$, Т.О. прогрессия с чл.

первых чл. - целые, а с вторых - нет.

Ответ: только а не б



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3} \quad a_5 - a_4 = d = \pm d = \pm \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \Rightarrow a_1 = a_4 - 3d = 1 - \sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 1 - 7\sqrt{3}$$

$$16 - 2x^2 - 4x - 128 - 16 - 9 = x^2 - 2x - 79 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{80} = 1 \pm 5\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow a_7 - a_2 = 5d \Rightarrow d = 2\sqrt{3} \Rightarrow a_1 = a_2 - d = 1 - 7\sqrt{3}$$

$$\text{Тогда } a_1 = 1 - 7\sqrt{3}, d = 2\sqrt{3}; a_2 = 1 - 5\sqrt{3}, a_4 = 1 - \sqrt{3}, a_5 = 1 + \sqrt{3},$$

$$a_7 = 1 + 5\sqrt{3}$$

$$\text{Ответ: } a = 2$$



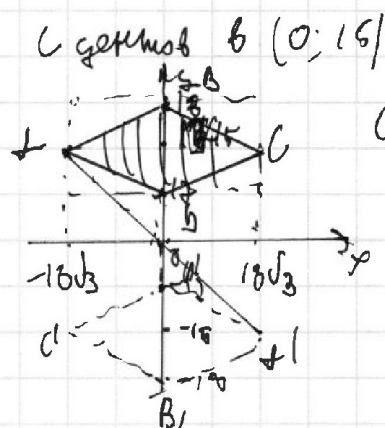
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

Найдите сумму площадей $\triangle$ по рис.



Она задается прямой.

$$y = 12 + \frac{x}{\sqrt{3}}, \quad x \in [0, 18\sqrt{3}]$$

$$y = 15 + \frac{x}{\sqrt{3}}, \quad x \in [-18\sqrt{3}, 0]$$

$$y = (15 - \frac{x}{\sqrt{3}}), \quad x \in [0, 18\sqrt{3}]$$

$$y = (12 - \frac{x}{\sqrt{3}}), \quad x \in [-18\sqrt{3}, 0]$$

Заметим, что $OA^2 = 18^2 \cdot 3 + 15^2 \Rightarrow OB^2 = 18^2 \Rightarrow OA \perp OB \perp OA$

Нам поворот в O, переводимый в A' - заметим, что окружность

с центром OA, A этот же поворот, переводимый в B' , заметим, что окружность с центром OB.

Прямую с площадью $\triangle$ площадь $\triangle$ площадь $\triangle$ площадь $\triangle$ + $S_{A'B'C'}$.

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}(\pi \cdot OA^2 - \pi \cdot OB^2) = \frac{\pi}{2}(OA^2 - OB^2) = \frac{\pi}{2}(18^2 \cdot 3 + 15^2 - 18^2) =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot 9(108 + 15 - 18) = 4,5\pi \cdot 17$$

$$S_{A'B'C'} = \frac{1}{2} \cdot 30\sqrt{3} \cdot 6 = 108\sqrt{3}$$

Ответ: $108\sqrt{3} + 4,5 \cdot 17\pi$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

$$M = (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2$$

$$① \quad xz = 4z + z^2$$

$$② \quad yz = 4x + x^2$$

$$③ \quad zx = 4y + y^2$$

вычитаем из ① ②

$$y(x-z) = y(z-x) + (z-x)(x^2) = (z-x)(x+z+y)$$

$$\Rightarrow (x-z)(z-x)(x+z+y) = 0$$

I Если $z=x$ то в ③: $z^2 = 4y + y^2$. Вычитаем из ② ③

$$\text{получим } (x-y)(-z+x+y+4) = 0, \text{ если } x=y=z, \text{ то } z^2 = z^2 + 4z \Rightarrow z=0$$

тогда $M = 4^2 \cdot 3 = 48$

Если $x \neq z \neq y$ тогда $2z = y - 4, z^2 = 4y + y^2$

$$\Rightarrow \left(\frac{y-4}{2}\right)^2 = 4y + y^2, \frac{y^2}{4} - 2y + 4 = 4y + y^2; \frac{y^2}{4} - 6y + 8 = 0; D = 36 - 8 = 28$$

$$2y + 6 = 15, y = \frac{-3 \pm \sqrt{15}}{3} \cdot 4 = \frac{-12 \pm 4\sqrt{15}}{3} \Rightarrow z = \frac{-12 \pm 4\sqrt{15}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{15}}{3}$$

$$= \frac{-12 \pm 4\sqrt{15}}{6} = x \Rightarrow M = \begin{cases} 2\left(\frac{4\sqrt{15}-8}{3}\right)^2 + (4\sqrt{15})^2, & y = \frac{-3+\sqrt{15}}{3} \cdot 4 \\ 2\left(\frac{-4\sqrt{15}-8}{3}\right)^2 + (4\sqrt{15})^2, & y = \frac{-3-\sqrt{15}}{3} \cdot 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M = \begin{cases} 32\left(\frac{15-2\sqrt{15}-4}{9}\right) + 15 \cdot 16 = \frac{32 \cdot 15}{9} - \frac{64 \cdot 2\sqrt{15}}{9} + 15 \cdot 16 \\ 32\left(\frac{15+2\sqrt{15}-4}{9}\right) + 15 \cdot 16 = \frac{32 \cdot 15}{9} + \frac{64 \cdot 2\sqrt{15}}{9} + 15 \cdot 16 \end{cases}$$

II

Если $x \neq z$ и $y \neq z$ и $x \neq y$ (из соображений симметрии, мы

получим, тогда M) то $\begin{cases} x+z+y=0 \\ x+y+z=0 \\ z+y+x=0 \end{cases} \Rightarrow x+y+z=0$

$$y = \frac{5+y}{2} \Rightarrow z = x$$

$$\Rightarrow y = -12$$

$$x+z = z = -4$$

$M=0$ но такое быть не может, т.к. $x \neq z$ по условию II

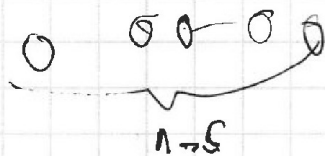


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{3}{n} \cdot 5 \Rightarrow \frac{3}{n} \cdot 9$$

16. интервал отрезков
или полусегментов

$$y \rightarrow 30 - y$$

$$x \rightarrow -x$$

$$y \in (0; n)$$

$$12 < 9 \sqrt{1 + \frac{x}{6\sqrt{3}}}$$

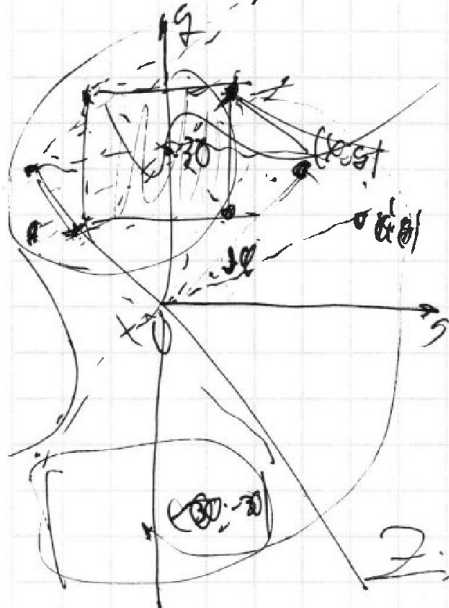


$$\left| 30 - y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \right| + \left| 30 - y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \right| =$$

$$2 \left| 15 - y - \frac{x}{6\sqrt{3}} \right| + \left| 15 - y + \frac{x}{6\sqrt{3}} \right| = 25$$

$$y \in (0; n)$$

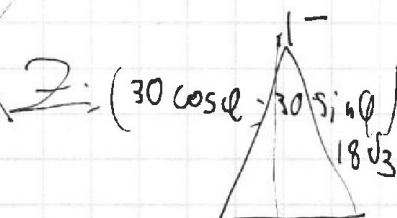
$$\frac{3}{n} \cdot C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$



$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2$$

$$-\arcsin \frac{a}{c} + \arcsin \frac{b}{c} = \varphi$$

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$$



$$9 + 18^2 \cdot 3 = 9(1 + 6)$$

$$|a + b| + |a - b| \leq 6$$

$$2|a|$$

$$|a| \leq 3$$

$$12 \leq 9 \leq 18$$

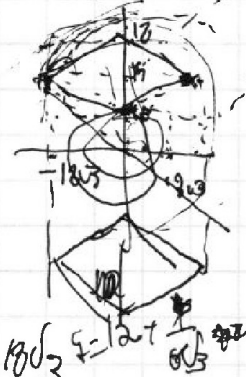
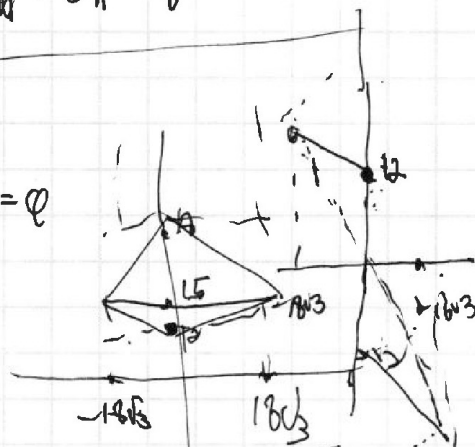
$$16^2 \checkmark$$

$$6$$

$$|6 - 15| \leq 3$$

$$\frac{1}{6\sqrt{3}} \leq 3$$

$$|x| \leq 18\sqrt{3} \leq 12 + \frac{1}{6\sqrt{3}}$$



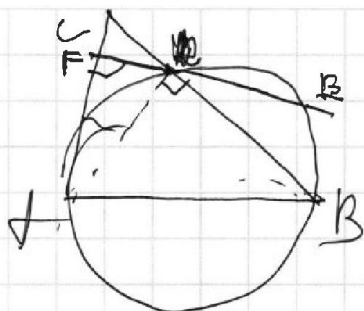


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2 - (a^2 - a|x + \frac{2-a^3}{3}) = 0$$

$$\begin{cases} xy = 4x + x^2 \\ x^2 = 4y + y^2 \end{cases}$$

$$a_1, a_2, a_3$$

$$|x-y| = |y-x| \quad |y-x| \leq 4$$

$$4 : a_1 + 3d$$

$$2 : a_1 + d$$

$$(6-4)(4+4) \geq 0$$

$$5 : a_1 + 4d$$

$$7 : a_1 + 6d$$

$$y = -4$$

$$a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{2}$$

$$2a^2 - 2a = a^3 - a^2 \quad -4x = 4x + x^2 \quad x^2 = -8$$

$$8a^2 - a^3 - 3a^2 + 2a = 0$$

$$a(a-1)(a-2) = 0$$

$$a = 0, 1, 2$$

$$\left(-5 - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right) + \left(-5 - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right) \leq 0$$

$$\left|5 + 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| + \left|5 + 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leq 8$$

$$(10^{10} - 1) \cdot 3 = 10^9 - 3 \cdot 10^6 + 3 \cdot 1000 - 1$$

$$= 999 \cdot 999 \cdot 999$$

$$999 \cdot 999 \cdot 999$$

$$999 \cdot 999 \cdot 999$$

$$999 \cdot 999 \cdot 999$$

$$999 \cdot 999 \cdot 999$$

$$999 \cdot 999 \cdot 999$$

$$999 \cdot 999 \cdot 999$$

$$999 \cdot 999 \cdot 999$$

$$999 \cdot 999 \cdot 999$$

$$999 \cdot 999 \cdot 999$$

$$999 \cdot 999 \cdot 999$$

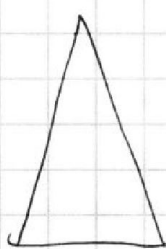
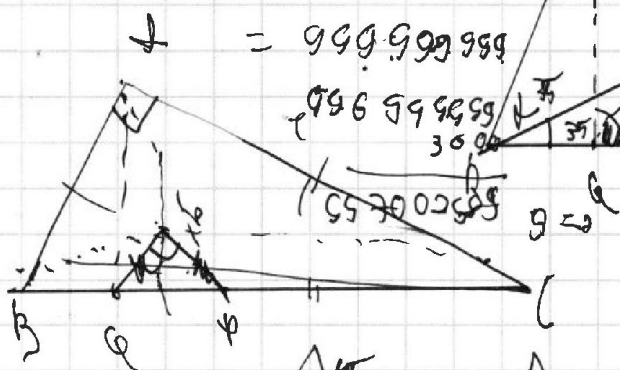
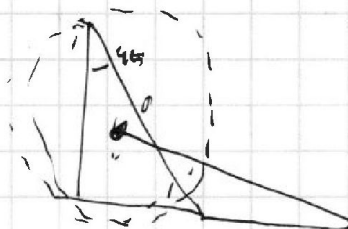
$$999 \cdot 999 \cdot 999$$

$$999 \cdot 999 \cdot 999$$

$$999 \cdot 999 \cdot 999$$

$$999 \cdot 999 \cdot 999$$

$$999 \cdot 999 \cdot 999$$



$$\begin{aligned} \angle BCF &= 90^\circ - \beta - \alpha - 3^\circ \\ &= 55^\circ 45' \\ \angle APB &= 90^\circ - \frac{2539}{2} \\ \angle AQP &= \frac{180 - (90 - 2 - 30)}{2} = \frac{90 + 2 + 35}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle APQ &= 180 - (\angle APB + \angle AQB) = 180 - 175 \\ &= 45^\circ \end{aligned}$$