



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 7

- ×** [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} xy &= 4z + z^2 \\ &\text{или } xy = z(x+y+2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xy &= -x^2 - y^2 \\ &\text{или } xy = -x^2 - y^2 \end{aligned}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

- ×** [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?

- ×** [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 15$, $BE = 10$.

4. [4 балла] В теленгриде ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарику. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$ являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$ являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.

6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}| + |y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}| \leq 6$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.

- ×** [6 баллов] На гипotenузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle DBC = 35^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2 \quad (1) \\ y^2 = 4x + x^2 \quad (2) \\ 2x = 4y + y^2 \end{cases}$$

Уравнения: $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$

$$(1) \ xy = 4z + z^2 \mid :x \neq 0, \text{ т.к. } x \neq 0 \text{ по условию}$$

$$y = \frac{4z + z^2}{x}$$

$$\text{Подставим } y = \frac{4z + z^2}{x} \text{ в (2), получим } \left(\frac{4z + z^2}{x} \right) \cdot 2 = 4x + x^2$$

$$\frac{z^2(z+4)}{x} = x(x+4) \mid x \neq 0$$

$$z^2(z+4) = x^2 x^2(x+4)$$

$$z^3 + 4z^2 = x^3 + 4x^2$$

$$z^3 - x^3 = 4x^2 - 4z^2$$

$$(2-x)(z^2 + 2x + x^2) = 4(x-2)(x+2)$$

~~Рассмотрим случай, если
x = y, y ≠ 2, z ≠ x~~

~~тогда, можно получить,
что $(y-x)(y^2 + yx + x^2) = 4(y-2)(y+2)$ и
 $(y-2)(y^2 + yz + z^2)$~~

~~Рассмотрим случай, если $x \neq y, y \neq 2, z \neq x$, тогда~~

~~имеем, $(2-x)(z^2 + 2x + x^2) = 4(x-2)(x+2) \mid : (2-x) \neq 0, \text{ т.к. } z \neq x$~~

$$z^2 + 2x + x^2 = -4(x+2) \quad (3)$$

~~т.к. $x \neq y$, то $x-y \neq 0$. т.к. $x-y \neq 0$, то аналогично, можно~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

получим, что $y^2 + xy + x^2 = -4(y+x)(y)$.

Имеем систему: $\begin{cases} z^2 + 2x + x^2 = -4(z+x) \quad (1) \\ y^2 + xy + x^2 = -4(y+x) \quad (2) \end{cases}$

$$\begin{cases} z^2 + 2x + x^2 = -4(z+x) \quad (1) \\ y^2 + xy + x^2 = -4(y+x) \quad (2) \end{cases}$$

$$(3)-(4): (z^2 + 2x + x^2) - (y^2 + xy + x^2) = -4(z+x) - (-4(y+x))$$

$$z^2 - y^2 + 2x - xy = -4(z+x - y - x)$$

$$(z-y)(z+y) + (z-y)x = -4(z-y) \quad | : (z-y) \neq 0, \text{ т. к. } z \neq y$$

$$z+y+x = -4 \quad | -y-x$$

$$z = -4 - y - x$$

Подставим $z = -4 - y - x$ в (1), получим $xy = 4(-4 - y - x) + (-4 - y - x)^2$

$$xy = -16 - 4y - 4x + 16 + y^2 + x^2 + 2yx + 8y + 8x$$

$$xy = 4y + 4x + y^2 + x^2 + 2xy \quad | -xy$$

$$0 = 4y + 4x + (y^2 + x^2 + xy)/5$$

Из (4) имеем, что $y^2 + xy + x^2 = -4(y+x)$. Подставим

~~$y^2 + xy + x^2 = -4(x+y)$ в (5), получим $0 = 4y + 4x - 4(y+x)$,~~

~~что противоречит тому, что уравнение имеет только один корень.~~

$$\text{Тогда } (x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = (x+4)^2 + (y+4)^2 + (-4 - y - x + 4)^2 =$$

$$= (x+4)^2 + (y+4)^2 + (-y - x)^2 = x^2 + 8x + 16 + y^2 + 8y + 16 + z^2 + 8z + x^2 + 2xy =$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$= 2(x^2 + y^2 + xy) + 8(x+y) + 32 = 2 \cdot (-4(y+x)) + 8(x+y) = 32$$

9.2. Если решением данной системы является тройка чисел

(x, y, z) , где $x \neq y, y \neq z, z \neq x$, то $(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 = 32$.
Были не выполнено условие $x \neq y$ и $y \neq z$ и $z \neq x$, тогда

Если решением среди чисел x, y, z какие-то 2 равны, не учитывая обобщенности, $x=y$, то представим

$$y=x \text{ в (1) и (2), получим соответственно } \begin{cases} x^2 = 42 + 2^2(6) \\ x^2 = 4x^2 + x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = 4x^2 + x^2 \end{cases}$$

$$(7): x^2 = 4x^2 + x^2 \therefore x \neq 0$$

$$z = y+x$$

Подставляем $z = y+x$ в (6), получаем $x^2 = 4(y+x) + (y+x)^2$

$$x^2 = 16 + 4x + 16 + x^2 + 8x \therefore x^2$$

$$0 = 32 + 12x \therefore$$

$$0 = 8 + 3x \therefore -8$$

$$3x = -8$$

$x = -\frac{8}{3}$ является решением данной системы! Запомни, что $x=y=\frac{3}{3}, z=\frac{4}{3}$

Тогда $z = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}$, $y = x = -\frac{8}{3}$. Тогда $(x+y)^2 + (y+z)^2 +$

$$(z+x)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{16}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} + \frac{16}{9} + \frac{256}{9} = \frac{288}{9} = 32.$$

То есть, если все выполнено условие $x \neq y$ и $y \neq z$ и



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$z \neq x, \text{ то } (x+4)^2 + (z+4)^2 + (y+4)^2 = 32.$$

~~Могут~~ я рассмотрела случай, ~~тогда~~ ^{если} числа x, y, z находят на описанное выше условие, то $(x+4)^2 + (z+4)^2 + (y+4)^2 = 32$, а если не находят, то $(x+4)^2 + (z+4)^2 + (y+4)^2 = 32$. П.к. данная система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах, то $(x+4)^2 + (z+4)^2 + (y+4)^2 = 32$.

Ответ: 32

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $x = 25000$. ~~тако~~, т.к. десятичная запись x состоит из x десятков, то $n = 10^x - 1$.

$$n^3 = (10^x - 1)^3 = 10^{3x} - 3 \cdot 10^{2x} + 3 \cdot 10^x - 1 = (10^{3x} - 1) - 3 \cdot 10^{2x} + 3 \cdot 10^x$$

Десятичная запись числа $10^{3x} - 1$ состоит из $3x$ десятков. Десятичная запись числа $3 \cdot 10^{2x}$ состоит из $2x$ десятков и ~~и~~ ^{идущих подряд} x нулей, ставящих после неё. Всеми единицами из числа $10^{3x} - 1$ число $3 \cdot 10^{2x}$.

$$\begin{array}{r} 99\ldots999\ldots9 \\ \hline x \qquad \qquad \qquad 2x \\ - 300\ldots0 \\ \hline 9\ldots99,699\ldots9 \\ \hline x-1 \qquad \qquad \qquad 2x \end{array}$$

Десятичная запись числа $(10^{3x} - 1 - 3 \cdot 10^{2x})$ состоит из $x-1$ десятков, идущих подряд, ставящих после них шестёрки, ставящих после шестёрки $2x$ идущих подряд десятков.

Десятичная запись числа $3 \cdot 10^x$ состоит из $2x$ единиц и x нулей, став-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Числа после квадратов: склонение стоящих за числами

$$10^{3x} - 1 - 3 \cdot 10^{2x} \text{ и } 3 \cdot 10^x :$$

$$\begin{array}{r} 99 \dots 9 \\ + 99 \dots 9 \\ \hline x-1 \end{array}$$

~~\times~~
 x
 $300 \dots 0$
 x

$$\begin{array}{r} 99 \dots 9700 \\ x-1 \end{array}$$

$x-1$
 x
 x

В склонении запись числа $10^{3x} - 1 - 3 \cdot 10^{2x} + 3 \cdot 10^x$ склоняется как $2x - 1 = 2 \cdot 25000 - 1 = 49999$ девяток.
Он же: 49999

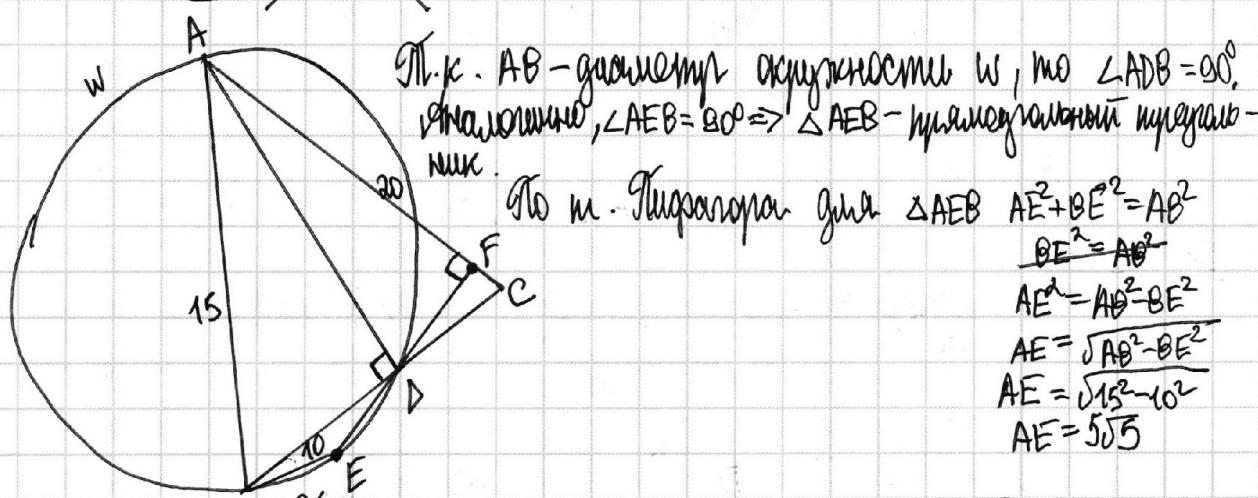
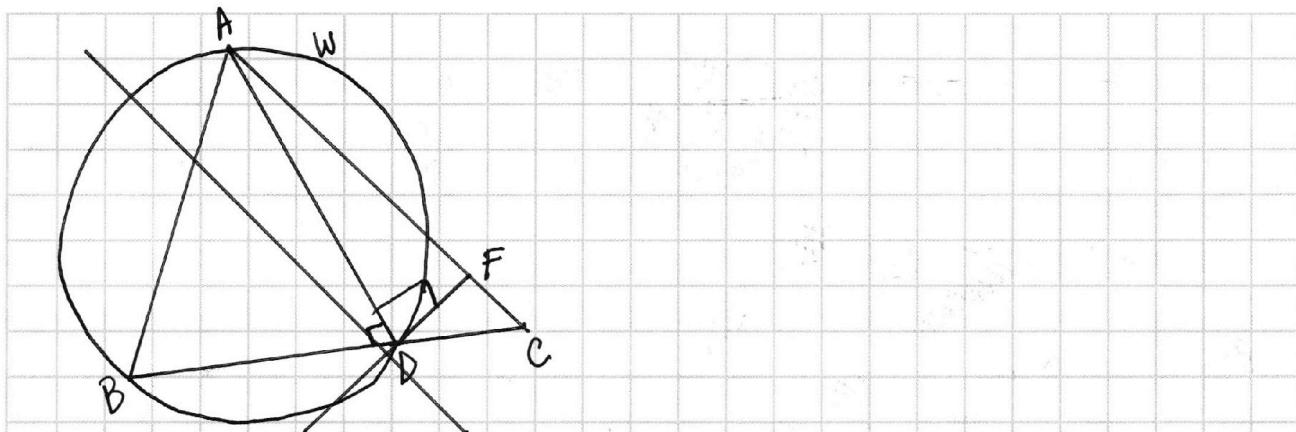


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



П.к. AB - диаметр окружности W , то $\angle ADB = 90^\circ$.
аналогично, $\angle AEB = 90^\circ \Rightarrow \triangle AEB$ - прямозаделенный треугольник

По т. Пифагора для $\triangle AEB$ $AE^2 + BE^2 = AB^2$

$$BE^2 = AB^2 - AE^2$$

$$AE^2 = AB^2 - BE^2$$

$$AE = \sqrt{AB^2 - BE^2}$$

$$AE = \sqrt{15^2 - 10^2}$$

$$AE = 5\sqrt{5}$$

Пусть R - радиус описанной окружности

м.к. окружности W .

$\triangle ABD \cong$ П.к. П.к. AB - диаметр окружности, то $AB = 2R \Rightarrow$

$\Rightarrow R = \frac{AB}{2} = \frac{15}{2} = 7,5$; Пусть $AD = x$, $\angle ADF = d$, тогда $\angle ADE =$

$= 180^\circ - d$. По теореме синусов для $\triangle ADE$ $\frac{AE}{\sin \angle ADE} = 2R \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin \angle ADE = \frac{AE}{2R} = \frac{5\sqrt{5}}{2 \cdot 7,5} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ П.к. $\Rightarrow \sin(180^\circ - d) = \sin \angle ADE = \sin \angle ADE =$

$= \sin(180^\circ - d) = \frac{\sqrt{5}}{3}$, м.к. $\sin d = \sin(180^\circ - d)$, то $\sin d = \frac{\sqrt{5}}{3}$. П.к. $\angle ADF =$

$= d$ в $\triangle ADF$ - прямозаделенный треугольнике это true, т.к. $\angle AFD =$

$= 90^\circ$, то $\sin \angle ADF = \frac{AF}{AD} \geq \frac{20}{x}$ м.к. $\angle ADF = d$, то $\sin d =$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

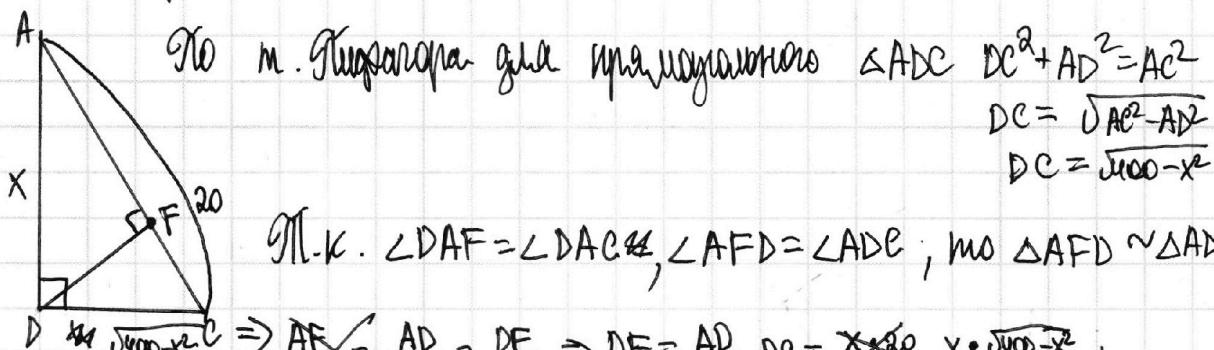
СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$= \sin \angle ADF$, т.е. $\sin d = \frac{\sin 20}{x/AF}$; Ранее я получила, что $\sin d = \frac{5\sqrt{5}}{15}$. Тогда $\sin d = \frac{\sin 20}{x/AF} \Rightarrow \frac{5\sqrt{5}}{15} = \frac{\sin 20}{x/AF} \Rightarrow x^2 = 15 \cdot 20 \Rightarrow x = 5\sqrt{10}$.

$$\Rightarrow x = 5\sqrt{10} \quad \frac{AE}{AD} = \frac{5\sqrt{5}}{15}$$

Рассмотрим $\triangle ADC$.



М.к. $\angle DAF = \angle DAC$, $\angle AFD = \angle ADE$, то $\triangle AFD \sim \triangle ADC \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{AF}{AD} = \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{DC} \Rightarrow DF = \frac{AD}{AC} \cdot DC = \frac{x}{20} \cdot \frac{x \cdot \sqrt{400 - x^2}}{20},$$

по гипотезе предположим прямоугольника $\triangle AFD$

$$AF^2 + DF^2 = AD^2 \Rightarrow AF = \sqrt{AD^2 - DF^2} = \sqrt{x^2 - \frac{x^2(400 - x^2)}{400}}$$

План а доказательства, что $\frac{AF}{AD} = \frac{5\sqrt{5}}{15} \Rightarrow \frac{AF^2}{AD^2} = \frac{5}{9}$

$$\frac{AF^2}{AD^2} = \frac{x^2 - \frac{x^2(400 - x^2)}{400}}{x^2} = 1 - \frac{400 - x^2}{400} = \frac{x^2}{400}$$

Тогда $\frac{x^2}{400} = \frac{5}{9} \Rightarrow x^2 = \frac{400 \cdot 5}{9} \Rightarrow x = \frac{20\sqrt{5}}{3}$, м.к. $x > 0$, м.к. x — длина отрезка.

$$\text{Тогда } AF = \sqrt{x^2 - \frac{x^2(400 - x^2)}{400}} = x \sqrt{\frac{x^2}{400}} = \frac{x^2}{20} = \frac{400 \cdot 5}{9 \cdot 20} = \frac{100}{9} = 11\frac{1}{9}, \text{ м.к. } x > 0, \text{ м.к. } x \text{ — длина отрезка}$$

Ответ: $11\frac{1}{9}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отмечте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть всего x коробок.

Рассмотрим случай если шарик может укладываться 5 коробок и откроюте же ~~один~~ №.

Но рассмотрим вероятность выпадения.

Всего C_x^5 вариантов выложить 5 коробок.

Рассмотрим количество вариантов, когда шарик выпадает. А именно когда и только шарик, когда выпадет при коробке, в которой из которых лежит шарик и еще какие-то 2 коробки из оставшихся $(x-3)$ коробок, в которых не лежит шарик. Тогда м.р. будущий ровно в 3 коробки падет шарик то, чтобы выпадать в эти 3 коробки должны быть обязательно уложены коробки с шариком из оставшихся, в которых шарик выпадает ровно количество вариантов ~~выложить~~ такие-то 2 коробки из $(x-3)$ коробок, в которых не лежит шарик, м.р. C_{x-3}^2 . Тогда вероятность



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ваша вероятность равна $\frac{C_x^2}{C_x^5}$.

Рассмотрим случай, когда шарик падает в коробок.

Вы посчитали вероятность выпадения.

Количество вариантов выпадения в коробок равно C_x^8 .

Н.к. Ведущий пытается по 1 шагу ровно в 3 коробки, то чтобы выпадать шарик однажды должен угадать эти 3 коробки. Тогда количество вариантов, в которых игрок выпадает ровно 3 коробки, в которых угадывает ^{также} 5 коробок из $(x-3)$ коробок, в которых не попадает никаких, т.е. C_{x-3}^5 . Тогда вероятность выпадения равна $\frac{C_x^5}{C_{x-3}^8}$.

Ваша вероятность выпадения равна $\frac{C_x^5}{C_{x-3}^8}$.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{C_{x-3}^5 \cdot C_x^5}{C_x^8 \cdot C_{x-3}^2} = \frac{(x-3)(x-4) \dots (x-7)}{5!} \cdot \frac{x(x-1) \dots (x-4)}{5!} = \frac{\frac{C_{x-3}^5}{C_x^8} \cdot \frac{C_x^2}{C_{x-3}^5}}{\frac{1}{5!} \cdot \frac{x(x-1)(x-2)}{5!}} = \\
 &= \frac{1}{5!} \cdot \frac{x(x-1)(x-2)}{5!} = \frac{\frac{C_{x-3}^5}{C_x^8} \cdot \frac{C_x^2}{C_{x-3}^5}}{\frac{1}{5!} \cdot \frac{x(x-1)(x-2)}{5!}} = \\
 &= \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{5!} = \frac{1}{8!} \cdot \frac{1}{2!} = \frac{8! \cdot 8!}{5! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{7 \cdot 4}{5} = \frac{28}{5} = 5\frac{3}{5} \text{ раза. Ответ: } 5\frac{3}{5}
 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$$

$$\Delta_1 = (a^2 - a)^2 - 4 \frac{(2-a^3)}{3}$$

$$2) x^2 - (a^2 - a)x - 2a^6 - 8a^4 - 4 = 0$$

$$\Delta_2 = (a^2 - a)^2 + 8(2a^6 + 8a^4 + 4)$$

Заметим, что корни 1го уравнения отличаются на $\sqrt{\Delta_1}$, а корни 2го на $\frac{\sqrt{\Delta_2}}{2}$

Чтобы найти с какой стороны разность арифметической прогрессии равна $\pm\sqrt{\Delta_1}$. Если с другой стороны разность равна $\frac{\sqrt{\Delta_2}}{2}$.

Тогда, чтобы найти разность нужно решить $\sqrt{\Delta_2} = \frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}$ и проверить подходит ли $\sqrt{\Delta_2} = -\sqrt{\Delta_1}$. Это реш-о из 003.

I

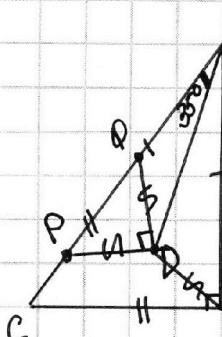


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\angle PQD = \angle PDQ = 45^\circ$, т.к. $\triangle PDQ$ - равнобедренный треугольник, где $PD = QD$ и $\angle QDP = 90^\circ$.
Пусть $\angle ABC = d \Rightarrow \angle BCA = 180^\circ - \angle ABC - \angle CAB = 180^\circ - d - 90^\circ = 90^\circ - d$.

т.к. $\triangle PBA$ - равнобедренный треугольник с основанием PA и $\angle PBA = d$, то $\angle BPA = \angle BAP = 90^\circ - \frac{d}{2}$;

т.к. $\triangle QCA$ - равнобедренный треугольник с основанием QA и $\angle QCA = 90^\circ - d$, то $\angle CQA = \angle CAQ = 45^\circ + \frac{d}{2}$;

$$\angle BPA = 180^\circ - \angle CQA = 180^\circ - (45^\circ + \frac{d}{2}) = 135^\circ - \frac{d}{2};$$

$$\angle CPA = 180^\circ - \angle BPA = 180^\circ - (90^\circ - \frac{d}{2}) = 90^\circ + \frac{d}{2};$$

$$\angle QAB = 180^\circ - \angle AQB - \angle ABQ = 180^\circ - (135^\circ - \frac{d}{2}) - \angle QBA = 180^\circ - (135^\circ - \frac{d}{2}) - d = 45^\circ + \frac{d}{2} - d = 45^\circ - \frac{d}{2};$$

$$\angle PAQ = \angle PAB - \angle QAB = 90^\circ - \frac{d}{2} - (45^\circ - \frac{d}{2}) = 45^\circ.$$

Рассмотрим $\triangle PQA$, заметим, что угол $\angle PDA = 80^\circ$ &

2 раза больше угла $\angle PAQ = 45^\circ$, а $PQ \parallel AD \Rightarrow$

$\Rightarrow D$ - центр описанной окружности $\triangle PQA \Rightarrow PD =$

$$= QD = DA \text{ и } \angle QDA = 2\angle QPA = 2\angle BPA = 2 \cdot (90^\circ - \frac{d}{2}) = 180^\circ - d.$$

Тогда $\angle QDA = 180^\circ - d$ и $\angle QBA = d \Rightarrow \angle QDA + \angle QBA = 180^\circ \Rightarrow \square$

$\Rightarrow \square QDAB$ - вписанный четырехугольник. Аналогично, доказываем

еще раз, что $\square QDAB$ - вписанный четырехугольник,

находим, что $\square PDAC$ - вписанный четырехугольник.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\angle DQA = \angle AQC - \angle CQD = (145^\circ + \frac{d}{2}) - \angle PCD = (145^\circ + \frac{d}{2}) - 45^\circ = \frac{d}{2}.$$

Гл.к. четырехугольник $PDAB$ выпуклый, то $\angle DBA = \angle DQA = \frac{d}{2}$; $\angle CBA = \angle DBA + \angle DBC = \frac{d}{2} + 35^\circ$; Гл.кже $\angle ABC = d$;
отсюда $\frac{d}{2} + 35^\circ = d \Rightarrow d = 70^\circ$.

$$\angle PAC = 180^\circ - \angle PCA - \angle CPA = 180^\circ - \angle BCA - \angle CPA = 180^\circ - d - (30^\circ + \frac{d}{2}) = 190^\circ - \frac{3d}{2}$$
$$= d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2};$$

Гл.к. четырехугольник PDA - выпуклый, то
 $\angle PDA = \angle PDC - \angle PAC = \frac{d}{2}$. $\angle BDC = \angle PDC + \angle PDQ + \angle QDB = \frac{d}{2} + 90^\circ + \angle QDB = \frac{d}{2} + 90^\circ + \angle QAB$, гл.к. четырехугольник $QBAD$ - выпуклый. отсюда $\angle BDC = \frac{d}{2} + 90^\circ + \angle QAB = \frac{d}{2} + 90^\circ + 45^\circ - \frac{d}{2} = 135^\circ$.

$$\angle DCB = 180^\circ - \angle BDC - \angle CDB = 180^\circ - 35^\circ - 135^\circ = 10^\circ.$$

Ответ: 10°



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{(a^2-a)^2 - 4(2-a^3)}{3} = \frac{(a^3-a^2)^2 + 8(2a^6+8a+4)}{100}$$

$$a^4 + a^2 - 2a^3 - \frac{8a^3}{3} = \cancel{(a^6+a^4-2a^5+16a^6+64a+32)}$$

$$(12a^4) + (12a^2) - (8a^3) 32 + \cancel{16a^3} = \cancel{30} 51a^6 - 6a^5 + \cancel{3a^4} + 192a + 96$$

$$51a^6 - 6a^5 - 9a^4 + 8a^3 - 12a^2 + 192a + 128 = 0$$

$$51 + 6 - 9 - 8 - 12 - 182 + 128$$

$$2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$$

$$\partial_2 = (a^3 - a^2)^2 + 8(2a^6 + 8a + 4)$$

$$\partial_1 = \frac{\partial_2}{100}$$

$$\frac{(a^2-a)^2 - 4(2-a^3)}{3} = \frac{(a^3-a^2)^2 + 8(2a^6+8a+4)}{100}$$

$$300(a^2-a)^2 - 400(2-a^3) = 3(a^3-a^2)^2 + 24(2a^6+8a+4)$$

$$300a^4 - 200a^3 + 300a^2 - 800 =$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

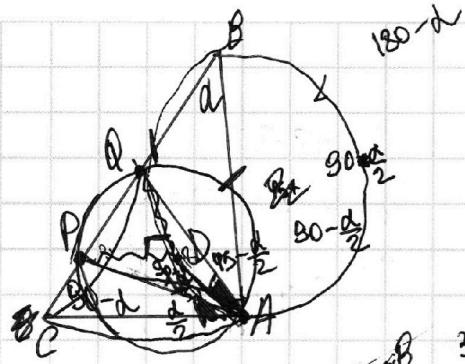


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

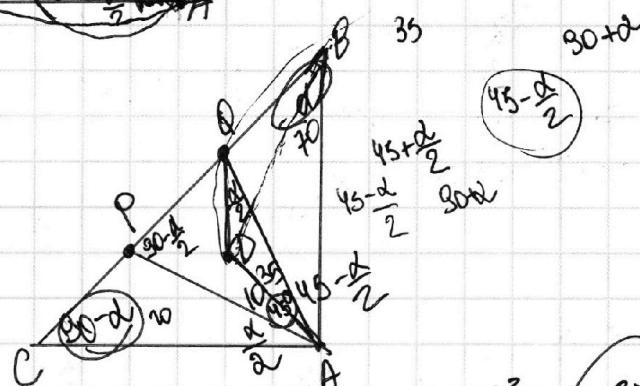
СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle QAB = 180^\circ - \frac{d}{2}$$

$$\angle PAC = 180^\circ - 90 + \frac{d}{2} - 30^\circ - \frac{d}{2} = \frac{d}{2}$$



$$Cx \quad n = \frac{99}{25x}$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56 \quad \frac{10}{a}$$

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 10 \quad X 100\%$$

$$\frac{\binom{3}{x}}{\binom{5}{x}} \cdot \frac{\binom{3}{8}}{\binom{5}{8}} \quad \left[\begin{array}{l} \binom{3}{x} \\ \binom{3}{8} \\ \hline \binom{5}{x} \\ \binom{5}{8} \end{array} \right]$$

$$(x-2)(x-1)x$$

$$x^2 - (a^2 - a)x + \frac{a^2 - a^3}{3} = 0$$

$$\textcircled{1} \quad \alpha_1 = (a^2 - a)^2 - 4 \frac{(a^2 - a^3)}{3} = a^4 - 2a^3 + a^2 - \frac{8}{3} + \frac{4a^3}{3} = \frac{1}{3}a^4 - \frac{2}{3}a^3 + a^2 - \frac{8}{3}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{a^2 - a \pm \sqrt{a^4 - 2a^3 + 3a^2 - 8}}{2} = \frac{\pm \sqrt{8a^2 - 16a^3 + 12a^4}}{2}$$

$$(a+1)(a^3 - \frac{5}{3}a^2 + \frac{8}{3}a - \frac{8}{3})$$

$$\begin{aligned} &= a^4 - \frac{2}{3}a^3 + a^2 - \frac{8}{3} \\ &= 3a^4 - 2a^3 + 3a^2 - 8 = \\ &= 3(a+1)(a^3 - \frac{5}{3}a^2 - \end{aligned}$$

$$\underbrace{1}_{x} \quad \underbrace{9}_{x} \quad \underbrace{99}_{x} \quad \underbrace{999}_{x} \quad \underbrace{9}_{x}$$

$$\underbrace{9}_{x} \quad \underbrace{99}_{x} \quad \underbrace{999}_{x} \quad \underbrace{9999}_{x}$$

$$3a^3 - 5a^2 + 8a - 8$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{16}{9} = -\frac{16}{3} + \frac{16}{9}$$

$$x^2 = 4z + z^2$$

$$x^2 \approx x^2 = 4x + x^2$$

$$z = 4 + x$$

$$x^2 = 4(4+x) + (4+x)^2$$

$$x^2 = 16 + 4x + 16 + 8x + x^2$$

$$32 + 12x = 0$$

$$x = -\frac{32}{12} = -\frac{8}{3}$$

$$x = y = -\frac{8}{3}$$

$$z = \frac{4}{3}$$

$$2 \left(\frac{-8}{3} + 4 \right)$$

$$22^2 +$$

$$32^2 + 82^2 + 16$$

$$\frac{16}{3} + \frac{64}{3} + 16$$

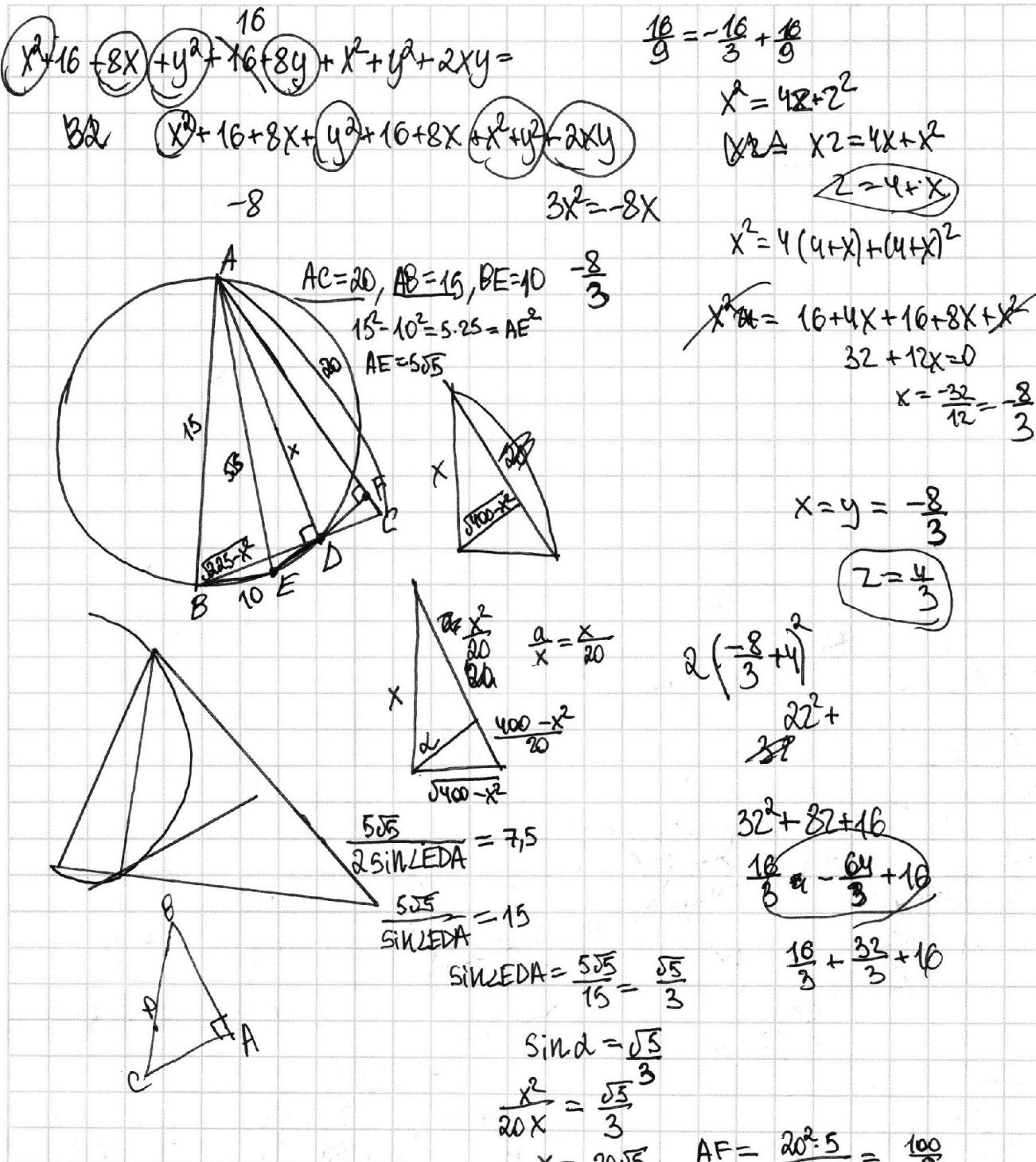
$$\frac{16}{3} + \frac{32}{3} + 16$$

$$\sin d = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\frac{x^2}{20x} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$x = \frac{20\sqrt{5}}{3}$$

$$AF = \frac{20^2 \cdot 5}{3 \cdot 20} = \frac{100}{3}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2 & (x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 \\ yz = 4x + x^2 & \text{реш. } x \\ zx = 4y + y^2 & \\ = (x+y)(y+z)(z+x) & \end{cases}$$

$$z^2 + 4z - xy = 0 \quad |x|$$

$$x^2 + 4x - yz = 0$$

$$y^2 + 4y - zx = 0$$

$$(x+y+2)^2 - 3(xy+yz+zx) + 4(x+y+z) =$$

$$4(x+2) = 4(x+2) + z^2 + x^2$$

$$y(x+2) + 8y + y^2 = 4(x+2) + z^2 + x^2 + 2zx$$

$$y(x+2 + y + 8) = (x+2)(x+2+y)$$

$$(x+y+2+y)(x+y+2+y)$$

$$(x+y+2+2)^2 = x^2 + y^2 + 2^2 + 4(x+y+2) + 4 + 2(xy + yz + zx) = 3(xy + yz + zx) + 4$$

$$x^2 + y^2 + 2^2 + 4(x+y+2) + 4 + 2(z^2 + x^2 + y^2 + 4(x+y+2))$$

$$3(x^2 + y^2 + z^2) + 12(x+y+z) + 4 = 3(xy + yz + zx) + 4$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4(x+y+z) = xy + yz + zx$$

$$(x-y)(y-z)(z-x)$$

$$(x+1)(y+1)(z+1)$$

$$(x+2)(y+2)(z+2) =$$

$$= 8 + xy + yz + zx + 2(xy + yz + zx) = (x+y+z)^2 + 4(x+y+z) = xy + yz + zx + z^2 + y^2 + x^2 + 4xy + 4yz + 4zx$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи** отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$xy = 42 + z^2$$

$$y = \frac{42 + z^2}{x}$$

$$\frac{42 + z^2}{x} \cdot z = 4x + x^2$$

$$z^2(2+z) = x^2(x+4) = 4^2(y+4)$$

$$x^3 + 4x^2 = y^3 + 4y^2$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) = 4(y-x)(y+x)$$

$$y = -4$$

$$x+y+2 = -4$$

$$z^2 + 2x + x^2 = x+2$$

$$2x = 4y + y^2$$

$$2x = 4(-4-x-2) + (-4-x-2)^2$$

$$2x = -16 - 4x - 42 + 16 + x^2 + 2^2 + 2x^2 + 8x + 82$$

$$y + x - x^2 - y^2 = 42 + z^2$$

$$x^2 = 42 + z^2$$

$$x^2 = 4x + x^2$$

$$2x = 4x + x^2$$

$$x^2 = 42 + z^2$$

$$2 = 4 + x$$

$$x^2 = 4(4+x) + (4+x)^2$$

$$x^2 = 16 + 4x + 16 + x^2 + 8x$$

$$0 = 32 + 12x$$

$$0 = 8 + 3x$$

$$x = -\frac{3}{8}$$

$$\textcircled{3} \quad xy = 4(1-x-y) + (1-x-y)^2$$

$$\textcircled{3} \quad xy = 4 - 4x - 4y + 1 + x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y$$

$$xy = 4$$

$$0 = x^2 + y^2 + xy - 6(x+y) + 5$$

$$y + x - 6(x+y) + 5$$

$$5(x+y) = 5$$

$$x+y = 1$$

$$x^2 + xy + y^2 = y + x \Rightarrow xy = y + x - x^2 - y^2$$

$$\textcircled{3} \quad (x+y) x^2 + x(y-1) + (y-1)y = 0 \quad y-1-4y$$

$$\textcircled{3} \quad (y-1)^2 - 4(y-1)y = (y-1)(-3y+1)$$

$$\textcircled{3} \quad \pm$$

$$\frac{1}{3} \quad 1 \rightarrow$$

$$x = \frac{1-y \pm \sqrt{1-4y}}{2}$$

$$x = y$$

$$x^2 + xy + y^2 = y + x$$

$$(x+y)^2 = y + x + xy$$

$$x^2 + xy + y^2 - x - y = 0$$

$$(x-1)(y-1) + x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$x^2 + xy + y^2 = x + y$$

$$x^2 + 2x + 2^2 = x + 2$$

$$xy + y^2 - 2x - 2 = y - 2$$

$$(y-2)(y+2+x) = y-2$$

$$y+2+x = 1$$

$$(y-1)(x+y) + x^2 = 0$$

$$\textcircled{3} \quad 8x^3 + 2y^3 + 2z^3 + x^2y + y^2z + 2xz = 2$$

$$(y+z)^2 + (y+x)^2 + (x+z)^2$$

$$(y+2)^2 + (y+4)^2 + (2+4)^2 =$$

$$= 2y^2 + 2z^2 + 8y + 82 + 2yz + 32$$

$$y^2 + z^2 + 4y + 4z + 4 + 4(y+x+z) + 16$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$$

$$(x+y+z)^2 - yz - zx - xy$$