



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 5

1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.
4. [4 балла] В телевизионной игре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарику. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leqslant 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипotenузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Умножим } n \times n : \underbrace{9 \dots 9}_{40000} \times \underbrace{9 \dots 9}_{40000} = \underbrace{9 \dots 9}_{40000} \underbrace{0 \dots 0}_{16000}$$

- $\underbrace{9 \dots 9}_{40000}$. Но при этом вычитания, в первом

разряде останется 1, далее 39999 раз 0 и из первой "девятки" заменена 1. Итак:

$$\begin{array}{r} \underbrace{9 \dots 9}_{39999} \\ - \quad \quad \quad \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \underbrace{0 \dots 0}_1 \\ 39999 \end{array}$$

Умножим еще на n !

$$\begin{array}{r} \underbrace{9 \dots 9}_{39999} \\ - \quad \quad \quad \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \underbrace{0 \dots 0}_1 \\ 39999 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \underbrace{0 \dots 0}_4 \\ 40000 \end{array} - \underbrace{9 \dots 9}_{40000} \quad \text{Снова идет}$$

6 нулей после 1, 39999 "щелк" и из

1 останется 1. Остается $\begin{array}{r} \underbrace{9 \dots 9}_{39999} \\ - \quad \quad \quad \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \underbrace{0 \dots 0}_1 \\ 80000 \end{array}$

Итого 39999 девяток

Ответ: 39999

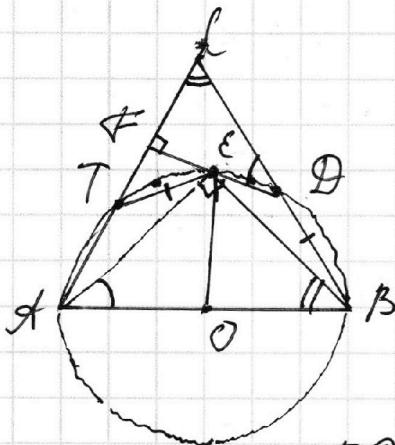


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



O - центр ω .

$$\angle AFD = \frac{\sqrt{AD} + \sqrt{CE}}{2}$$

$$\sqrt{CE} = \sqrt{DB} \Rightarrow DB = CE$$

Многа $\rightarrow TD = ECB \Rightarrow$

$$TD = BE = 5.$$

Так как AB - диаметр, $\angle ADB = 90^\circ$

$\triangle ADC$ - прямоугольный. Так как $AC = 10$, $TD = 5$, то $AT = TD = TC = 5$.

Так как $AECB$ - вписанный, $\angle EAB = \angle FDC \Rightarrow \triangle FDC \sim \triangle ECB \Rightarrow \angle FCD = \angle EBF \Rightarrow \triangle AEB \sim \triangle ACD$.

Изъем: $B \triangle AEB \sim \triangle ACD: \frac{AB}{BC} = \frac{AC}{CD} \Rightarrow$
 $(D = \frac{25}{3})$.

$B \triangle FDC \sim \triangle ECB: \frac{CD}{FC} = \frac{CB}{BC} \Rightarrow$
 $FCD = \frac{125}{18}.$ Многа $AF = 10 - \frac{125}{18} = \frac{180 - 125}{18} = \frac{55}{18} = 3\frac{1}{18}$

Ответ: $3\frac{1}{18}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Постановка вероятности изучаемого предмета.

Учусь в игре n корабль. Успехом выбрано это 3 корабли с шансами p и q для победы.

Всего есть ученых $C_{n-3}^2 = \frac{(n-3)!}{2 \cdot (n-5)!}$.

Количество способов всего: $C_n^5 = \frac{n!}{5!(n-5)!}$.

При этом в первом случае вероятность успеха:

$$\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{(n-3)! \cdot 5!}{2 \cdot n!}$$

Второй вариант: аналогично первому, уменьшить количество событий — три шансами взятие первого корабля:

$$\frac{C_{n-3}^3}{C_n^6} = \frac{(n-3)!}{6 \cdot (n-6)!}$$

Всего событий: $C_n^6 = \frac{n!}{6!(n-6)!}$

Вероятность успеха: $\frac{C_{n-3}^3}{C_n^6} = \frac{(n-3)! \cdot 6!}{n! \cdot 6!} = \frac{(n-3)!}{n!} \cdot \frac{6!}{6!} = \frac{(n-3)!}{n!}$

Найдена вторую вероятность на первую:

очевидно, у первой знаменатель больше, значит, вероятность успеха вырастет в 2 раза.

Ответ: в 2 раза.

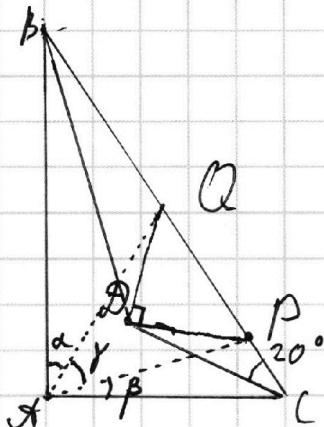


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle DCB = 20^\circ$$

$$\text{Также так } \angle PDQ = 90^\circ, \angle DQP \\ = \angle DPQ = 45^\circ$$

Также $\angle BAC = 2$; $\angle QAP = \gamma$
и $\angle PAC = \beta$. Так как $\triangle ABC$ и $\triangle AQC$ -
равнобедренные, можем написать γ : $2 + \beta + \gamma = 90^\circ$

$$\text{Из } \triangle ABC \text{ и } \triangle AQC: \angle ABC + \angle ACB = \\ = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta + 180^\circ - 2\beta - 2\gamma = 360^\circ - 2\alpha - 2\beta - 4\gamma, \\ = 90^\circ. 2\alpha + 2\beta + 4\gamma = 270^\circ; 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180^\circ \\ \gamma = 45^\circ.$$

Возьмём окружность с центром
D и радиусом DQ. $\angle QAP = 45^\circ \Rightarrow$

данная окружность описана около $\triangle APQ$.

Числ.: $AD = DQ = DP$. Тогда $\angle ADC =$
 $= \angle QDC$ по третьему признаку. Аналогично
 $\triangle ABD \simeq \triangle BDP$. Тогда $\angle ACD = 40^\circ$;

$$\angle ABC = 50^\circ \text{ и } \angle DBC = 25^\circ$$

$$\text{Ответ: } 25^\circ$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3x^2 \cdot 2(2+3) \leq xy$$

$$x(2+3) \leq y^2$$

$$y(y+3) \leq x^2$$

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 + (2+3)^2 = 3x - 3y - 3z - xy - xz - yz - 27 \leq 0$$

$$3x + 3y + 3z + xy + xz + yz + 27 = x^2 + y^2 + z^2 + (x+y+z)$$

$$= x(x+6) + y(y+6) + z(z+6) \cancel{+ 27} + 27$$

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = x(x+1) + y(y+1) + z(z+1)$$

~~+27~~ +27



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

СТРАНИЦА
— ИЗ —

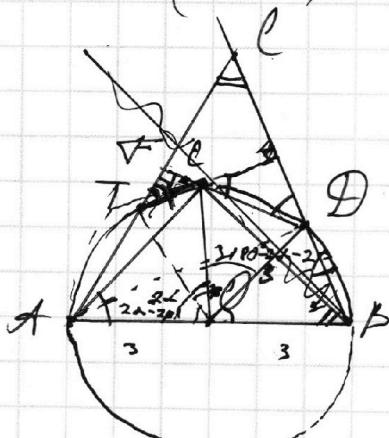
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\binom{n}{n-3} = \frac{n-3!}{8 \cdot (n-8)!} \times \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{6}$$

$$\binom{n}{6} = \frac{n!}{6! \cdot (n-6)!}$$

$$\frac{\binom{n}{n-3}}{\binom{n}{6}} = \frac{\frac{(n-3)!}{6 \cdot (n-8)!}}{\frac{n!}{6! \cdot (n-6)!}} \times \frac{\frac{n-3!}{6!}}{\frac{n!}{6!}} = \frac{5!}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

$$\begin{aligned}
 & z^2 + x^2 + y^2 + 6x + 6y + 62 + 2z = \\
 & \quad \Rightarrow 3x + 3y + 3z + xy + xz + yz + 24 \\
 & \left\{ \begin{array}{l} xy = 32 + 2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{array} \right. \quad z^2 + x^2 + y^2 + 3x + 3y + 32 = \cancel{xy + yz + zx} \\
 & \quad + xy. \quad (z + y)^2 + \dots + \\
 & x^2 + y^2 + z^2 + 3x + 3y + 3z = xy + yz + zx \\
 & x^2 + y^2 + z^2 + \cancel{2xy + 2xz + 2yz} + \cancel{6} = 0 \\
 & z(z+3) + x(x+3) + y(y+3) = xy + xz + yz \\
 & \Delta C = \sqrt{11}
 \end{aligned}$$



L-17d

$$\Rightarrow D \pm TC = 180^\circ$$

$$\overline{DB}^2 + \overline{BC}^2 = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2}$$

$$2x(2+y) + xz(x+3) + yz(y+3) = xy + yz + xz + 2x + 3y + 3xz$$

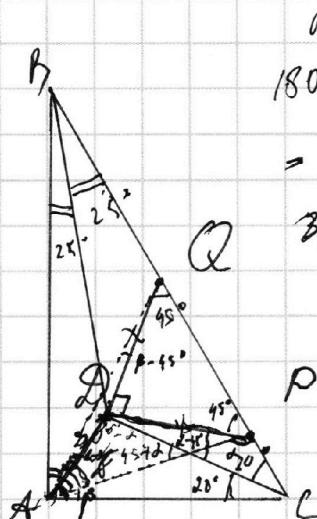
$$y(3+x) + z(3+yz) + x(3+x) + 2yz$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$180^\circ - (224^\circ - 180^\circ - (2p+2q)) = 99 + 93 \Rightarrow 99.100 -$$

$$= 90^\circ - 99 = 59.00 - 99 \Rightarrow$$

$$360^\circ - 2\alpha + 2p \approx 48^\circ \Rightarrow p = 18^\circ$$

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180^\circ \text{ (sum of angles in a triangle)}$$

$$g \sim g_x g_{\sim} g' \sim$$

40000 40000

$$= 9 \dots 3 \times 10000 = 00 = \\ 40000 \quad \text{mag} \\ 40001$$

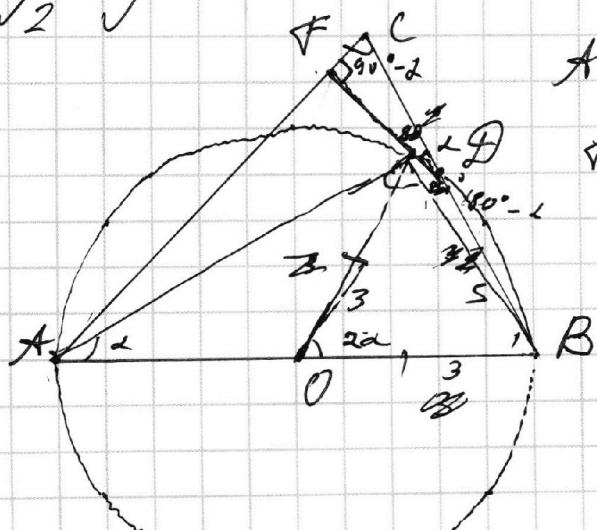
- 9...9
40000

$$AD = DQ = DP \quad \checkmark$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$$

$$\frac{9}{29999} \times 80\ldots01 \times 9999\ldots9 = 9..980..01 \underbrace{00\ldots0}_{90000} - 99..9 \quad 40000$$

$\sqrt{2}$ ✓



AlS10 AB₅ BE₅

AC = 1/2 CD

$$gE = \sqrt{H}$$

$$\delta F = \sqrt{F^2 - \Phi^2}$$

$$\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 5!}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}$$

$$C_n^5 = \frac{n!}{5!(n-5)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{5!} C_{n-4}^2 = \frac{(n-3)!}{2 \cdot (n-5)!} = \frac{(n-3)(n-4)}{2}$$



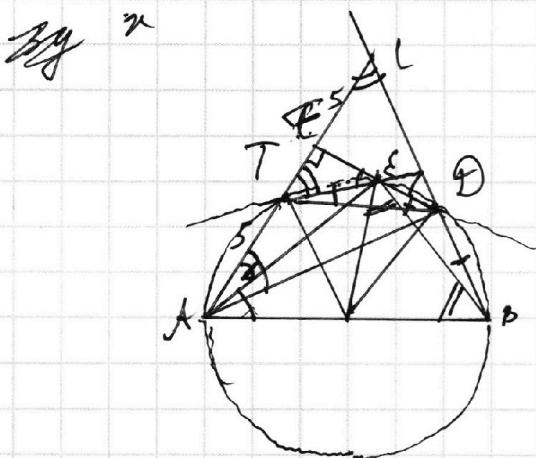
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$xy + xz + yz + 3x + 3y + 3z + 27 = (x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$$



$$BE = TD = 5 \quad \cancel{BT = AD = 5}$$

$$CD \neq AD \Rightarrow AT = TC = 5$$

~~AT = TC~~

$$\triangle ACD \sim \triangle EBD$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = \frac{3}{5}$$

$$\cancel{AD} = \frac{5}{3} \cancel{AT} \\ \cancel{DB} = \sqrt{\frac{25 \cdot 11}{9} + 36} = \sqrt{275 + 324} = \sqrt{599}$$

$$= \sqrt{\frac{599}{9}} \quad x^2 + y^2 + z^2 + 3x + 3y + 3z = xy + xz + yz$$

$$\leq \frac{BC}{CD} = \frac{3}{5}$$

~~BC~~

$$CD = \frac{25}{3}$$

$$FC =$$

$$\frac{\frac{25}{3}}{3} =$$

$$\frac{FC}{5}$$

$$FC = \frac{125}{18}$$

$$\frac{55}{18}$$

$$\frac{AB}{BC} =$$

$$\frac{AC}{CD} = \frac{6}{5} \Rightarrow CB = \frac{25}{3}$$

$$\frac{CD}{FC} = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{125}{18}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 & ab \neq 3c + c^2 & bc = 3a + a^2 \\
 & \cancel{ab} & ac \leq 3b + b^2 \\
 & a^2 - a \leq x_1 + x_2 & 2(2+3) + x(x+3) + \\
 & a - 5 \leq x_1, x_2 & 4y(y+3) \leq xy + \\
 & \cancel{a^2 - a^1 + a^2 - 2a^3} & + y^2 + x^2 \\
 & a^2 - a \leq x_1 + x_2 & x^2 + y^2 + z^2 + 3x + 3y + 3z \\
 & a - 5 \leq x_1, x_2 & - xy - xz - yz \leq 0 \\
 & \cancel{a^3 - a^2} = x_3 + x_4 & (2+3)^2 + (x+3)^2 + (y+3)^2 = \\
 & n & = 3x + 3y + 2z + xy + xz + yz \\
 & 2a^4 + 2a^3 - a^4 - 4 \leq x_3 x_4 & \\
 & (a_1 + 5d)(a_1 + 5d) = a - 5 & \\
 & 9(a_1 + 2d)(a_1 + 7d) \leq 2a^4 + 2a^3 - a^4 - 4 & \\
 & x \geq y \geq 0 & 0 \geq y \geq z \\
 & 2 \leq 0 & (x+3)^2 + (y+3)^2 + \\
 & xy = 3x + z & + (z+3)^2 \leq \\
 & \Rightarrow x \geq y \geq z & x^2 + y^2 + z^2 + \\
 & xz = 3y + y^2 & 6x + 6y + 6z + 2z \\
 & x^2 + 3x \leq yz & \times 6 \\
 & yz \leq 3x + x^2 & 6x + 6y + 6z + 2z \\
 & x \geq y \geq z > 0 & \times 6 \\
 & x^2 \cancel{+ 3x} \leq yz & 6x + 6y + 6z + 2z \\
 & 3x &
 \end{aligned}$$