



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2, \\ yz = -2x + x^2, \\ zx = -2y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 30 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 8$, $BE = 6$.
4. [4 балла] В теленгре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть семь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$ являются четвертым и девятым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| + \left|x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| \leq 4$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle BCA = 50^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = \underbrace{9 \dots 9}_{30001 \text{ шт.}} = 10^{30001} - 1, \text{ при упрощении обозначим } k=30001$$

$$n^3 = (10^k - 1)^3 = 10^{3k} - 3 \cdot 10^{2k} + 3 \cdot 10^k - 1$$

$$10^{3k} - 3 \cdot 10^{2k} \text{ вычитается так:}$$

$$\begin{array}{r} 10^{3k} - 3 \cdot 10^{2k} \\ \hline 9 \dots 97 \dots 0 \dots 0 \dots 0 \end{array}$$

$$3 \cdot 10^k - 1 = 2 \underbrace{9 \dots 9}_{k \text{ шт.}}$$

$$\text{Т.е. } n^3 = \underbrace{9 \dots 97}_{k-1 \text{ шт.}} \times 10^{2k} + \underbrace{2 \underbrace{9 \dots 9}_{k \text{ шт.}}}_{3k \text{ цифр.}} = \underbrace{9 \dots 97}_{k \text{ цифр.}} \underbrace{0 \dots 0}_{k \text{ цифр.}} \underbrace{02 \underbrace{9 \dots 9}_{k \text{ цифр.}}}_{k \text{ цифр.}}$$

Следовательно в n^3 $(k-1) + k = 2k-1$ девяток

$$2k-1 = 30001 \cdot 2 - 1 = 60001$$

Ответ: 60001

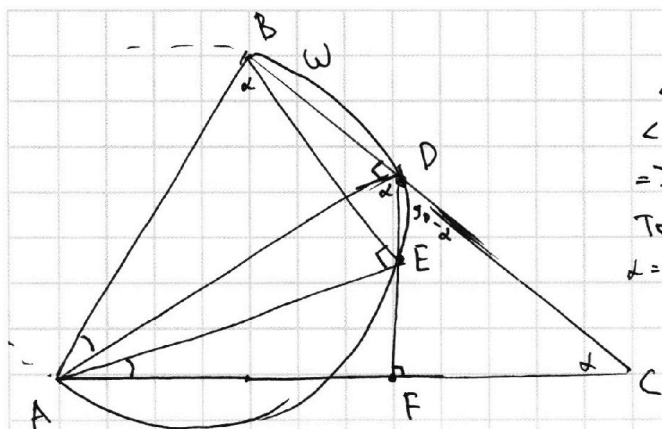


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle DCF = \alpha \Rightarrow \angle FDC = 90 - \alpha$$

$$\angle BDA = 90^\circ \text{ (т.к. } D \in \omega, AB - \text{диаметр)} \Rightarrow \angle ADC = 90^\circ$$

Тогда $\angle ADF = \alpha$

$$\alpha = \angle ADF = \angle ABE \text{ (т.к. } ABDE - \text{ впис. четырехугол.)} \Rightarrow \angle BAE = 90 - \alpha$$

(т.к. $\angle BEA = 90^\circ$ (т.к. $E \in \omega$, AB - диаметр))

Также $\angle DAF = 90 - \alpha$ (т.к. $\angle ADF = \alpha$)

Тогда $90 - \alpha = \angle DAF = \angle BAE \Rightarrow \angle BAD = \angle EAF = \alpha - \angle DAE$

$$\Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle AEF \text{ (по двум углам)} \Rightarrow AB : AD = AE : AF$$

$$AB = 8, BE = 6 \Rightarrow AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{64 - 36} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

Обозначим $AF = x$

$$AD = AB \cdot AF : AE = 8x / 2\sqrt{7} = 4x / \sqrt{7}$$

$$DF^2 = AD^2 - AF^2 = DC^2 - FC^2, \quad AD^2 + DC^2 = AC^2 \Leftrightarrow DC^2 = AC^2 - AD^2$$

$$AD^2 - AF^2 = AC^2 - AD^2 - FC^2, \quad \text{запишем все:}$$

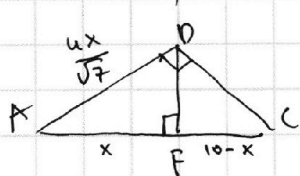
$$FC = AC - AF, \quad AC = 10$$

$$\left(\frac{4x}{\sqrt{7}}\right)^2 - x^2 = 10^2 - \left(\frac{4x}{\sqrt{7}}\right)^2 - (10 - x)^2 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{16x}{7} - x^2 - 10^2 +$$

$$10^2 + x^2 - 20x = 0 \Leftrightarrow 32x / 7 = 20x \Leftrightarrow 32x = 140x$$

$$\Leftrightarrow 108x =$$

$$AF = x, \quad AD = AB \cdot AF : AE = 8x / 2\sqrt{7} = 4x / \sqrt{7}$$



$$DC = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{10^2 - \frac{16x^2}{7}}$$

$$DF^2 = AD^2 - AF^2 = DC^2 - FC^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{16x^2}{7} - x^2 = \left(10^2 - \frac{16x^2}{7}\right) - (10^2 + x^2 - 20x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 \cdot 16x^2}{7} = 20x \Leftrightarrow 32x^2 = 140x \Leftrightarrow x(32x - 140) = 0$$

$$x \neq 0 \text{ (т.к. } AF \neq 0) \Rightarrow x = \frac{140}{32} = \frac{35}{8} = 4,375$$

Ответ: 4,375



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть всего было n коробок

Рассчитаем вероят. выпадать в первом случае:

Всего вариантов C_n^5 выбрать 5 коробок из n
блочнопр. вар. когда мы выбираем 3 коробки
с мячами и еще какие-то 2 др. т.е. их C_{n-3}^2

Тогда вероят. в первом случае: $\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}$

Во втором случае всего вар. выбора C_n^7

а блочнопр. вар. когда выбираем 3 коробки
с мячами и еще какие-то 4 другие, т.е. их C_{n-3}^4

Тогда вероят. во втором случае: $\frac{C_{n-3}^4}{C_n^7}$

Рассчитаем во сколько раз вероят. во втором случае

больше: $\frac{C_{n-3}^4}{C_n^7} : \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{(n-3)!}{4! \cdot (n-3-4)!} \times \frac{7! \cdot (n-7)!}{n!} \times$

$$\frac{n!}{5! \cdot (n-5)!} \times \frac{2! \cdot (n-5)!}{(n-3)!} = \frac{7! \cdot 2!}{4! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7}{3 \cdot 4} = \frac{7}{2} = 3,5$$

Ответ: 3,5



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0, \text{ по теор. Виета}$$

$$a^2 - 2a = x_1 + x_2 \text{ (где } x_1, x_2 - \text{ корни ур.) } x_1 + x_2 = y_6 + y_7$$

($y_1, y_2, \dots$ - арифм. прогрессия y уст.)

$$y_6 = y_1 + 5d \text{ (1 - разность прогр.)}, y_7 = y_1 + 6d$$

$$x_1 + x_2 = y_6 + y_7 = 2y_1 + 11d$$

$$3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0, \text{ по теор. Виета}$$

$$(a^3 - 2a^2)/3 = x_1 + x_2 \text{ (где } x_1, x_2 - \text{ корни этого ур.) } x_1 + x_2 = y_4 + y_9 = 2y_4 + 11d$$

$$\text{Т.е. } a^2 - 2a = (a^3 - 2a^2)/3 \Leftrightarrow a^3 - 5a^2 + 6a = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a(a^2 - 5a + 6) = 0 \Leftrightarrow a(a-2)(a-3) = 0. \text{ Т.е.}$$

возможны a и.б. 0, 2, 3. но не все сразу

Проверим эти 3 вар:

$$a=0 \mid \text{1 ур: } x^2 - 7 = 0 \Rightarrow \text{корни } \sqrt{7}, -\sqrt{7}$$

$$2 \text{ ур: } 3x^2 + 6 = 0 \Rightarrow \text{корни } \sqrt{2}, -\sqrt{2}$$

Расставим их в прогр. порядке: $-\sqrt{7}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{7}$

Тогда 4 и 9 члном арифм. прогр. разность $\sqrt{7}$

$$a=2 \mid \text{1 ур: } x^2 - 5 = 0 \Rightarrow \text{корни } \sqrt{5}, -\sqrt{5}$$

$$2 \text{ ур: } 3x^2 - 26 = 0 \Rightarrow \text{корни } \sqrt{\frac{26}{3}}, -\sqrt{\frac{26}{3}}$$

Расставим их в прогр. порядке: $-\sqrt{\frac{26}{3}}, -\sqrt{5}, \sqrt{5}, \sqrt{\frac{26}{3}}$

между 6 и 7 чл. разность 1, между 4 и 6 чл. 2d

$$\Rightarrow (\sqrt{5} - (-\sqrt{5})) \cdot 2 = (-\sqrt{5} - (-\sqrt{\frac{26}{3}})) \Leftrightarrow 4\sqrt{5} = -\sqrt{5} + \sqrt{\frac{26}{3}}$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{5} = \sqrt{\frac{26}{3}} \Leftrightarrow 25 \cdot 5 = 26/3 = 25 \cdot 5 \cdot 3 = 26 \quad \text{✗}$$

$$a=3 \mid \text{1 ур: } x^2 - 3x - 1 \Rightarrow \text{корни } \frac{3+\sqrt{13}}{2}, \frac{3-\sqrt{13}}{2}$$

$$2 \text{ ур: } 3x^2 - 9x + 7 \Rightarrow \text{корни } \frac{3+5\sqrt{13}}{2}, \frac{3-5\sqrt{13}}{2}$$

Расставим в прогр. порядке: $\frac{3-5\sqrt{13}}{2}, \frac{3-\sqrt{13}}{2}, \frac{3+\sqrt{13}}{2}, \frac{3+5\sqrt{13}}{2}$

Разность между 1 и 2 чл: $2\sqrt{13}$, между 2 и 3: $\sqrt{13}$, между 3 и 4: $2\sqrt{13}$

следовательно они могут быть 4, 6, 7, 9 членами арифм. прогр. с разностью $\sqrt{13} \Rightarrow a=3$ подходит

Ответ: $a=3$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$z = \frac{-2y + y^2}{x} = \frac{-2x + x^2}{y}$$

$$2 - z = \frac{xy}{z}$$

$$z(2 - z) = xy$$

$$-2y^2 + y^3 = -2x^2 + x^3 = -2z^2 + z^3$$

$$xy = -2z + z^2$$

$$z^2 = xy + 2z$$

$$x^2 = 2x + yz$$

$$y^2 = 2y + xz$$

$$12 + 2x + 2y + 2z - 3x - 3y - 3z$$

$$(a^2 - 1)(a^2 - 2a + 1) = a^3 - 2a^2 + a - a^2 + 2a - 1 = a^3 - 3a^2 + 3a - 1$$

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 4y - 4z$$

$$(10^k - 1)^3 = 10^k - 3 \cdot 10^k + 3 \cdot 10^k - 1$$

$$\frac{1000}{3} = 333 \frac{1}{3}$$

$$\frac{9 \dots 9}{30001} = 10^3 - 1$$

$$\frac{1000 \dots 000}{30001} = \frac{10^k}{30001}$$

$$99^3 = \frac{891}{9801}$$

$$(z + x)(z + y) =$$

$$z^2 + xz + yz + xy$$

$$(2 - 1)^2 = 2^2 - 2z + 1$$

$$\frac{1}{88209} = \frac{9}{882090}$$

$$-2z = xy - z^2$$

$$-2x = yz - x^2$$

$$xy = -2z + z^2$$

$$yz = x^2 - 2x$$

$$xz = y^2 - 2y$$

$$(x + y + z)(x + y + z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$$

$$12 - x^2 - y^2 - z^2 + xy + xz + yz = 10^k (10^k - 3)$$

[illegible]

[illegible]



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3x^2 - (a^3 - 10a^2)x + 6 - a^5 = 0$$

$$a_4 = a_1 + 3d$$
$$a_9 = a_8 + 8d$$

$$(a_1 + 5d)(a_1 + 6d) =$$
$$a_1^2 + 11a_1d + 30d^2$$

$$a^3 = (a^3)$$

$$\frac{a^3 - 2a^2}{3} = 2a_1 + 11d$$

$$9 - 6 = 3$$
$$9 - 3 - 7 = -1$$
$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$-\frac{8}{a} = x_1 + x_2$$
$$\frac{c}{a} = x_1 x_2$$

$$a^2 - 2a = 2a_1 + 11d$$
$$a^2 - a - 7 = a_1^2 + 11a_1d + 30d^2$$

Подставим

$$a = 0$$
$$1) \text{yp: } x^2 - 7 = 0$$
$$(x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7}) = 0$$

$$\frac{a^3 - 2a^2}{3} = a^2 - 2a$$
$$a^3 - 2a^2 = 3a^2 - 6a$$
$$a^3 - 5a^2 + 6a = 0$$

$$a = 2$$

$$2) \text{yp: } 3x^2 + 6 = 0$$
$$3(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$$

$$- \sqrt{2} \quad \sqrt{2}$$
$$- \sqrt{2} \quad \sqrt{2}$$

$$a^3 - 2a^2 = 3a^2 - 6a$$
$$a^3 - 5a^2 + 6a = 0$$
$$a(a^2 - 5a + 6) = 0$$
$$a(a - 3)(a - 2) = 0$$

$$1) \text{yp: } x^2 - 5 = 0$$
$$(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0$$
$$2) \text{yp: } 3x^2 - 26 = 0$$
$$x^2 - \frac{26}{3} = 0$$

$$D > 0$$
$$- \sqrt{7} - \sqrt{2} \quad \sqrt{2} \quad \sqrt{7}$$

$$D = 25 - 4 \cdot 6 = 1$$
$$(x - \sqrt{\frac{26}{3}})(x + \sqrt{\frac{26}{3}}) = 0$$

$$y_1 = \frac{5+1}{2} = 3$$
$$\frac{5-1}{2} = 2$$

$$\sqrt{\frac{26}{3}} > \sqrt{5}$$

$$a = 3$$
$$1) \text{yp: } x^2 - 3x + 4$$

$$2) \text{yp: } 3x^2 - 26 = 0$$
$$3x^2 - 26 = 0$$
$$3x^2 = 26$$
$$x^2 = \frac{26}{3}$$
$$x = \pm \sqrt{\frac{26}{3}}$$

$$26 > 15$$
$$- \sqrt{5} \quad \sqrt{5}$$
$$\sqrt{\frac{26}{3}} > \sqrt{5}$$

$$1) \text{yp: } x^2 - 3x + 4$$
$$3 + \sqrt{15}$$
$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{15}}{2}$$

$$2) \text{yp: } 3x^2 - 26 = 0$$
$$3x^2 = 26$$
$$x^2 = \frac{26}{3}$$
$$x = \pm \sqrt{\frac{26}{3}}$$

$$26 > 15$$
$$- \sqrt{5} \quad \sqrt{5}$$
$$\sqrt{\frac{26}{3}} > \sqrt{5}$$

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{15}}{2}$$
$$x_2 = \frac{3 - \sqrt{15}}{2}$$

$$3(2 - 3^4)$$
$$2 - 81 = -79$$

$$2\sqrt{5} = \sqrt{\frac{26}{3}}$$
$$4\sqrt{5} = \sqrt{\frac{26}{3}}$$

$$2) \text{yp: } 3x^2 - 3x + 6 - 3$$
$$D = 9 - 4 \cdot 3 \cdot (6 - 3) = 9(9 - 4 \cdot (2 - 3)) = 9(9 + 4) = 117$$

$$5\sqrt{5} = \sqrt{\frac{26}{3}}$$
$$25 \cdot 5 = 26 \cdot 3$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

