МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8

1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = -6y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 20 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3?

3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D. Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω, отличная от D. Найдите AF, если $AC = 20$, $AB = 10$, $BE = 9$.

4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарику. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть девять коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$ являются пятым и восьмым членами этой прогрессии.

6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ, состоящая из всех точек, координаты $(x;y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| + \left|y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| \leqslant 8$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь множества M, которое замела фигура Φ при этом повороте.

7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D, для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle CBA = 46^\circ$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

(1) $xy = -6z + z^2$ Проделаем некоторые операции с
(2) $yz = -6x + x^2$ данной системой ур-ий:
(3) $zx = -6y + y^2$ (1)-(2): $xy - yz = y(x-z) =$
$= 6x - 6z + z^2 - x^2 = 6(x-z) - (x-z)(x+z) =$
$= (x-z)(6-x-z)$, тогда $(x-z)(x+y+z-6) = 0$
Аналогично при вычете из (2) ур-ие (3) получим $(x-y)(x+y+z-6) = 0$ и при вычете из (1) (3): $(y-z)(x+y+z-6) = 0$. Получили:

$$\begin{cases}(x-z)(x+y+z-6)=0\\(x-y)(x+y+z-6)=0\\(y-z)(x+y+z-6)=0\end{cases}$$

Если правая скобка $x+y+z-6 \neq 0$, то тогда $x-z=0$, $x-y=0$, $y-z=0 \Rightarrow$
$x=y=z$, если подставить y и z в (1), то
$x^2 = -6x + x^2 \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0$, $y=0, z=0$, но по условию
$x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$, противоречие. Значит, вышерассмотренный случай невозможен и $x+y+z-6=0$, тогда $x+y+z=6$, можно 6 заменить на $x+y+z$:
$xy = -(x+y+z)z + z^2 = -xz - yz - z^2 + z^2 =$
$= -xz - yz \Rightarrow xy + xz + yz = 0$, то есть

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

если сложить (1) + (2) + (3), то слева будет 0, тогда: $xy+yz+xz=0=-6(x+y+z)+(x^2+y^2+z^2)=-36+(x^2+y^2+z^2) \Rightarrow x^2+y^2+z^2=36$ (с учётом $x+y+z=6$). Рассмотрим выражение $(x-6)^2+(y-6)^2+(z-6)^2=x^2-12x+36+y^2-12y+36+z^2-12z+36=(x^2+y^2+z^2)-12(x+y+z)+108=36-12\cdot 6+108=72$. Покажем, что система имеет в этом случае решение в ненулевых числах: пусть $x=y=4$, $z=-2$, тогда $x+y+z=6$, $x^2+y^2+z^2=36$, $xy=16$, $-6z+z^2=12+4=16$, т.е. $xy=-6z+z^2$; $yz=-8$, $-6x+x^2=-6\cdot 4+16=-8$, т.е. $yz=-6x+x^2$; $zx=-8$, $-6y+y^2=-8 \Rightarrow zx=-6y+y^2=-8$; $(4-6)^2+(4-6)^2+(-2-6)^2=8+64=72$, всё выполняется, значит, $(x-6)^2+(y-6)^2+(z-6)^2=72$, достигается при $x=4$, $y=4$, $z=-2$.

Ответ: $(x-6)^2+(y-6)^2+(z-6)^2=72$.

По условию $n = \underbrace{99\ldots9}_{20001 \text{ девяток}}$. Рассмотрим число $n+1 = 1\underbrace{000\ldots0}_{20001 \text{ нулей}}$. Далее $(n+1)^3 =$

$= 1\underbrace{000\ldots0}_{20001\cdot3=60003 \text{ нулей}}$, $(n+1)^3 = n^3 + 3n(n+1) + 1 \Rightarrow$

$(n+1)^3 - 1 = n^3 + 3n(\underbrace{n+1}_{1\underbrace{000\ldots0}_{20001 \text{ нулей}}}) = \underbrace{999\ldots9}_{60003 \text{ девяток}}$. То есть

число $(n+1)^3-1$ содержит 60003 девяток.

Рассмотрим число $3n(n+1) = 3\cdot\underbrace{999\ldots9}_{20001}\cdot 1\underbrace{000\ldots0}_{20001} =$

$$\begin{array}{r} \times\ 999\ldots99 \\ 3 \\ \hline 2\underbrace{999\ldots9}_{20000 \text{ девяток}}7 \end{array}$$

$= 2\underbrace{999\ldots9}_{20000}7\underbrace{000\ldots0}_{20001}$, т.е. число $3n(n+1)$ содержит всего 40003 цифры.

$n^3 = ((n+1)^3 - 1) - 3n(n+1)$, первые $60003 - 40003 =$ $= 20000$ цифр у n^3 будут девятки, а последние 20001 цифра 9 у n^3.

$$\begin{array}{r} -\ \underbrace{999\ldots9}_{20000}\ 99\ \ldots\ 99\ \underbrace{99\ldots99}_{20001} \\ 29\ldots97\ 00\ldots00 \\ \hline 999\ldots9\ 70\ldots02\ 99\ldots99 \end{array}$$

Остальные цифры, как несложно убедится 2 и

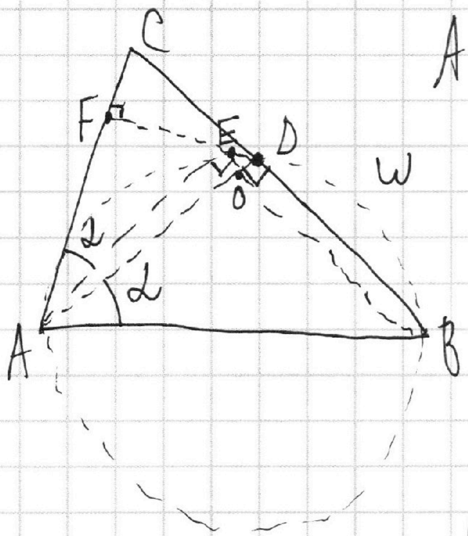
ответ: $40001 = 20000 + 20001$. Сколько-то 0 (n-n' вычит из $(n+1)^3-1$ $3n(n+1)$ столбик.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$AC=20$, $AB=10$, $BE=9$

Т.к. AB – диаметр, то $\angle ADB=90^\circ$ (угол, опир. на диаметр), и также $\angle AEB=90^\circ$ (тоже как угол, опир. на диаметр).

По теореме Пифагора для ΔAEB:

$AB^2=AE^2+BE^2 \Rightarrow AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{19}$.

Обозначим т. O пересечение AD и BE. Пусть $\angle FAE=\alpha$, тогда $\angle FEA=90^\circ-\alpha$, тогда $\angle DEO=180^\circ-90^\circ-(90^\circ-\alpha)=\alpha$, а $\angle DEO=\angle DAB$, т.к. они вписанные и опир. на BD, не содержащей A. Рассмотрим ΔAFD и ΔACD: $\angle CAD$ – общий, оба Δ прямоуг. $\Rightarrow \Delta AFD \sim \Delta ADC \Rightarrow$

$\frac{AF}{AD}=\frac{AD}{AC} \Rightarrow AF\cdot AC=AD^2$, также $\Delta ABD \sim$ $\sim \Delta AEF$ (оба Δ прямоугольные ($\angle ADB=\angle AFE=90^\circ$), $\angle EAF=\angle BAD=\alpha$ и α – острый) $\Rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{AF}{AE} \Rightarrow AD=AB\cdot\frac{AF}{AE}$, тогда

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$AD^2 = AB^2 \cdot \frac{AF^2}{AE^2}$, подставим AD^2 в $AD^2 = AC \cdot AF$:

$AB^2 \cdot \frac{AF^2}{AE^2} = AC \cdot AF \Rightarrow AF = \frac{AE^2}{AB^2} \cdot AC = \frac{19}{100} \cdot 20 =$

$= \frac{19}{5}$.

Ответ: $AF = \frac{19}{5}$.

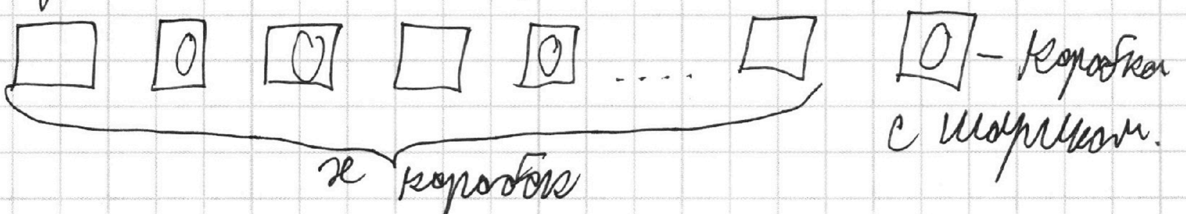
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Пусть всего x коробок в телешоу.



Сначала определим вероятность того, что игрок выберет нужные 3 коробки. Сначала посчитаем количество способов выбрать 5 коробок из x: C_x^5. Для того, чтобы посчитать число способов, в каждом из которых он выигрывает (угадывает искомые 3 коробки) пусть он сначала выберет 3 искомые коробки (это можно сделать 1 способом), а потом уже среди оставшихся $(x-3)$ коробок выберет ещё 2 (порядок взятия коробок не важен, главное - взять искомые 3 коробки): это он сделает C_{x-3}^2 способами. Тогда кол-во способов, когда игрок выберет 5 коробок и выиграет $1 \cdot C_{x-3}^2 = C_{x-3}^2$. Тогда вероятность такого выигрыша равна:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$P_1 = \frac{C^2_{x-3}}{C^5_x} = \frac{\frac{(x-3)!}{(x-5)!\cdot 2!}}{\frac{x!}{(x-5)!\cdot 5!}} = \frac{(x-3)!}{x!}\cdot\frac{5!}{2!}$ – вероятность выигрыша игрока при взятии 5 коробок.

Проделаем всё то же самое, среди тех же x коробок, но уже для 9. Всего кол-во способов выбрать 9 коробок из x равно C^9_x.

А количество способов выбрать 9 коробок так, чтобы игрок победил, C^6_{x-3} (также выбираем сначала 3 нужные коробки с шариками, а затем среди оставшихся $(x-3)$ выбираем ещё 6, опять же порядок взятия не важен), тогда здесь вероятность выигрыша $P_2 = \frac{C^6_{x-3}}{C^9_x} =$

$= \frac{\frac{(x-3)!}{(x-9)!\cdot 6!}}{\frac{x!}{(x-9)!\cdot 9!}} = \frac{(x-3)!}{x!}\cdot\frac{9!}{6!}$, тогда вероятность выигрыша игрока увеличится в $\frac{P_2}{P_1}$ раз:

$\frac{P_2}{P_1} = \frac{(x-3)!\cdot 9!}{x!\cdot 6!}\cdot\frac{x!\cdot 2!}{(x-3)!\cdot 5!} = \frac{9!\cdot 2!}{6!\cdot 5!} = \frac{7\cdot 8\cdot 9}{3\cdot 4\cdot 5} = \frac{42}{5} = 8{,}4.$

Ответ: $\frac{P_2}{P_1} = 8{,}4$ раза.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

(1) $x^2-(a^2-4a)x+a^2-6a+4=0$

(2) $5x^2-(a^3-4a^2)x-2a^3-6a-15=0$

Рассмотрим ур-ие (1): $x^2-a(a-4)+$
$+a^2-6a+4=0$

$D=a^2(a-4)^2-4(a^2-6a+4)=a^2(a^2-8a+16)-$
$-4a^2+24a-16=a^4-8a^3+16a^2-4a^2+24a-16=$
$=a^4-8a^3+12a^2+24a-16$, разложим на множители $a^4-8a^3+12a^2+24a-16$, для этого найдём корни ур-ия $a^4-8a^3+12a^2+24a-16=0$,

~~$a=2$: $8\ 16-64+48+$~~

Пусть x_1 и x_2 – корни ур-ия (1), тогда по теореме Виета $x_1+x_2=a(a-4)$ и $x_1x_2=$
$=a^2-6a+4$. Пусть x_3 и x_4 – корни ур-ия (2), тогда по теореме Виета $x_3+x_4=\frac{a^3-4a^2}{5}$,
$x_3x_4=-\frac{2a^3+6a+15}{5}$.

Выделим ОДЗ: $x^2-(a^2-4a)x+\frac{(a^2-4a)^2}{4}+$
$+a^2-6a+4-\frac{(a^2-4a)^2}{4}=\underbrace{\left(x-\frac{a^2-4a}{2}\right)^2}_{\geq 0}+a^2-6a+4-\frac{(a^2-4a)^2}{4}=0 \Rightarrow$

$\frac{(a^2-4a)^2}{4}-a^2+6a-4\geq 0$ в (1)-ом ур-ии.

Во 2-ом ур-ии ОДЗ:

$5x^2-(a^3-4a^2)x-2a^3-6a-15=5x^2-\frac{5(a^3-4a^2)}{5}x+$
$+\frac{25(a^3-4a^2)^2}{4\cdot 25}-(2a^3+6a+15)-\frac{(a^3-4a^2)^2}{20}\geq 0=$
$=\underbrace{5\left(x-\frac{a^3-4a^2}{10}\right)^2}_{\geq 0}-\left(2a^3+6a+15+\frac{(a^3-4a^2)^2}{20}\right)\geq 0 \Rightarrow$

$\frac{(a^3-4a^2)^2}{20}+2a^3+6a+15\geq 0$, тогда общее ОДЗ:

$$\begin{cases}\frac{(a^2-4a)^2}{4}-a^2+6a-4\geq 0\\ \frac{(a^3-4a^2)^2}{20}+2a^3+6a+15\geq 0\end{cases}$$

$(a^2-4a)^2-4a^2+24a-16=a^4-8a^3+16a^2-4a^2+$
$+24a-16=a^4-8a^3+12a^2+24a-16\geq 0$
$(a^3-4a^2)^2+40a^3+120a+300=a^6-8a^5+16a^4+$
$+40a^3+120a+300\geq 0$. Итого,

$$\begin{cases}a^4-8a^3+12a^2+24a-16\geq 0\\ a^6-8a^5+16a^4+40a^3+120a+300\geq 0\end{cases}$$

Вернёмся к корням. По условию, пусть x_1 — шестой член прогрессии, x_2 — седьмой член, x_3 — пятый член, x_4 — восьмой. То есть если $x_3=k$, то $x_1=k+y$, $x_2=k+2y$, $x_3=k+3y \Rightarrow$

$x_1+x_2 = x_3+x_4$ тогда с учётом $x_1+x_2 = a(a-4)$ и $x_3+x_4 = \frac{a^3-4a^2}{5}$, тогда

$a(a-4) = \frac{a^3-4a^2}{5} = \frac{a^2(a-4)}{5} \Rightarrow 5a(a-4) = a^2(a-4) \Rightarrow$

$a^2(a-4) - 5a(a-4) = a(a-4)(a-5) = 0$, тогда (возможные случаи)

$a=0$, $a=4$, $a=5$. При подстановке $a=0$ в ОДЗ $a^4 - 8a^3 + 12a^2 + 24a - 18 = -16 < 0$ не подходит, (ур-ие (1) принимает вид $x^2+4=0$, не имеет корней).

При подстановке $a=4$ и $a=5$ в оба ОДЗ оба неравенства выполняются, то есть $a=4$ и $a=5$ подходят. Тогда ур-ие (1) принимает вид:

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$, ур-ие (2) принимает вид:

$5x^2 - 167 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{167}{5}}$. Проверим, входят ли x_1, x_2, x_3, x_4 в какую-нибудь арифметич. прогрессию: так как x_1 и x_2 – соседние числа прогрессии, то $d = x_2 - x_1 = \pm 4$, но $d = x_1 - x_2$ является иррациональным числом, т.е. d одновременно и целое, и иррациональное, противоречие ($a \neq 4$).

$a=5$:

(1) $x^2 - 5x - 1 = 0$

$D = 25 + 4 = 29$, $x = \frac{5 \pm \sqrt{29}}{2}$, тогда $d = x_2 - x_1 =$

$= \pm\sqrt{29}$; (2) $5x^2 \mp 25x - 295 = 0 : x^2 \mp 5x - 59 = 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$x^2 \mp 5x - 59 = 0$

$D = 25 + 4\cdot 59 = 25 + 236 = 261$; $\sqrt{D} = \sqrt{261}$,

тогда $x = \frac{+5 \pm \sqrt{261}}{2}$, тогда $3d = x_4 - x_3 =$

$= \sqrt{261}$, но $3\sqrt{59} = \sqrt{9\cdot 59} > \sqrt{261}$, тоже неверно. Получаем: $a \neq 0$, $a \neq 4$, $a \neq 5$, остальные не удовлетв. условию на прогрессию.

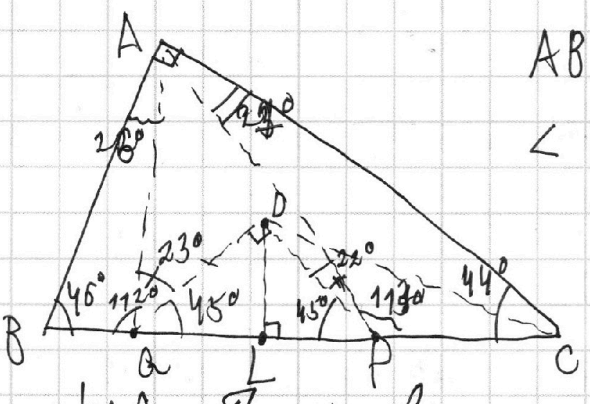
Ответ: $a = \varnothing$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$AB = BP$, $AC = CQ$, $DP = DQ$, $\angle PDQ = 90°$, $\angle CBA = 46°$

Из прямоугольного $\triangle BAC$ $\angle BCA = 90° - \angle CBA = 44°$. По условию $\triangle ACQ$ – равнобедр. $(AC = CQ) \Rightarrow \angle CAQ = \angle CQA = \frac{180° - \angle ACQ}{2} = 90° - 22° = 68°$. Также и $\triangle ABP$ – равнобедр. $(AB = BP) \Rightarrow \angle BPA = \angle BAP = \frac{180° - \angle ABP}{2} = 90° - 23° = 67°$. По теореме Пифагора для $\triangle BAC$ $BC^2 = AB^2 + AC^2$, $AB^2 = BP^2$, $AC^2 = CQ^2$. Определим, в каком именно порядке находятся точки Q и P на BC: пусть AH – высота, тогда понятно, что Q будет лежать на отрезке BH (иначе $CQ < AC$), а P – на отрезке CH (иначе $AB > BP$), но также P не лежит за C (иначе $BP \geq BC > AB$), и аналогично Q не лежит за B. То есть порядок на BC такой: B, Q, P, C. Тогда $BC = (BP + QC) - QP$, $BC^2 = ((BP + QC) - QP)^2 = (BP + QC)^2 + QP^2 - 2(BP + QC)QP = BP^2 + QC^2 + QP^2 + 2BP \cdot QC - 2(BP + QC)QP$, откуда с учётом $BC^2 = BP^2 + QC^2$:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$QP^2+2BPQC-2QP(BP+QC)=0$

$\triangle QDP$ - равнобедр. прямоуг. $\Rightarrow \angle DPQ=\angle DQP=45^\circ$.

Находим $\angle DQA=\angle PQA-\angle PQD=23^\circ$,

$\angle DPA=\angle QPA-\angle QPD=22^\circ$.

В ур-нии $QP^2+2BPQC-2QP(BP+QC)=0$

выразим QP: $D=4BP^2QC^2+4\cdot 4^2(BP+QC)=$

$=4(BP^2QC^2+2(BP+QC))\Rightarrow \sqrt{D}=2\sqrt{BP^2QC^2+2(BP+QC)}$;

$QP=\dfrac{-2BPQC\pm 2\sqrt{BP^2QC^2+2(BP+QC)}}{2}=$

$=\sqrt{BP^2QC^2+2(BP+QC)}-BPQC$ (корень ~~ЗА~~ со знаком „-" даёт $QP<0$, чего не может быть). Пусть DL - высота в $\triangle DQP$, в равнобедр. $\triangle$ DL и медиана $\Rightarrow DL=\frac{1}{2}QP=\frac{1}{2}(\sqrt{(BPQC)^2+2(BP+QC)}-$

$-BPQC)$. При этом $DL=LP$, тогда

$tg(\angle PCD)=\dfrac{DL}{CL}=\dfrac{DL}{LP+PC}=\dfrac{DL}{DL+PC}$.

$\angle APC=180^\circ-68^\circ=112^\circ$; по теореме синусов для $\triangle PCA$: $\dfrac{AC}{\sin 112^\circ}=\dfrac{AC}{\sin 68^\circ}=\dfrac{PC}{\sin 26^\circ}\Rightarrow PC=AC\dfrac{\sin 26^\circ}{\sin 68^\circ}$.

Аналогично по теореме син-ов для $\triangle BQA$: $BQ=BC\cdot\dfrac{\sin 27^\circ}{\sin 64^\circ}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

СТРАНИЦА 3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Подставим значение для PC в $tg(\angle D\cancel{L}CB)$:

$tg(\angle DCB) = \dfrac{DL}{DL + \cancel{AB}\,BC\,\dfrac{\sin 42^\circ}{\sin 64^\circ}}$, причём BC и AB тоже можно связать теоремой синусов для $\triangle ABC$: $\dfrac{AB}{\sin 44^\circ} = \dfrac{BC}{\sin 48^\circ} \Rightarrow BC = AB\dfrac{\sin 46^\circ}{\sin 44^\circ}$.

~~Зн~~ Тогда выразим BQ через $\cancel{AB}\,BC$:

$BQ = AB\dfrac{\sin 26^\circ}{\sin 68^\circ} = BC\dfrac{\sin 28^\circ \sin 46^\circ}{\sin 68^\circ \sin 44^\circ}$. Зная BQ и PC (через BC), выразим отрезки PQ и DL через BC (в выражение для

$PC = \sqrt{(BPQC)^2 + 2(BP+QC)} - BPQC$

Откуда сможем найти $tg(\angle DCB)$ (BC сократится).

909×909: 8181, 8181, 826281

826281×909: 7436529, 7436529, 751089429

99×99: 891, 891, 9801

9801×99: 87209, 87209, 969299

$n^2\ n+1 = 1\underbrace{000\ldots0}_{20001}$

$\times 99\ldots9$, 3, $299\ldots97$

$n^3 = (n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = 1\underbrace{000\ldots0}_{60003}$

$n^3 + 3n\underbrace{(n+1)}_{1\underbrace{00\ldots1}_{20001}} = \underbrace{99\ldots9}_{60003}$

$\overset{20001}{999}\ldots999\ldots99$

$-\ 2\ldots997\ldots00$

$999\,7\ldots00\underbrace{2\ldots99}_{20001}$

$3n(n+1) = \underbrace{2\underbrace{99\ldots9}_{20000}7\underbrace{000\ldots0}_{20001}}_{40003}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\left|y-20+\frac{x}{2\sqrt{3}}\right|+\left|y-20-\frac{x}{2\sqrt{3}}\right|\le 8$, рассмотрим ~~3~~ 2 пары точек: $(x_0;y_0)$, $(-x_0;y_0)$, ~~$(x_0$~~

$\left|y_0-20+\frac{x_0}{2\sqrt{3}}\right|+\left|y_0-20-\frac{x_0}{2\sqrt{3}}\right|=\left|y_0-20+\left(\frac{-x_0}{2\sqrt{3}}\right)\right|+$ $+\left|y_0-20-\left(\frac{-x_0}{2\sqrt{3}}\right)\right|$, т.е. если Φ содержит точку $(x_0;y_0)$, то она содержит и точку $(-x_0;y_0)$, т.е. Φ симметрична относительно оси Oy. Раскроем модули:

I $\quad y-20+\frac{x}{2\sqrt{3}}\ge 0$ и $y-20-\frac{x}{2\sqrt{3}}\ge 0 \Rightarrow$

$y-20+y-20=2y-40\le 8 \Leftrightarrow 2y\le 48 \Leftrightarrow y\le 24$, при этом

$$\begin{cases} y-20+\frac{x}{2\sqrt{3}}\ge 0 \\ y-20-\frac{x}{2\sqrt{3}}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2\sqrt{3}}\ge 20-y \\ \frac{x}{2\sqrt{3}}\le y-20 \end{cases}$$, тогда

$20-y\le\frac{x}{2\sqrt{3}}\le y-20$