



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = -6y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x - 6)^2 + (y - 6)^2 + (z - 6)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 20 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 10$, $BE = 9$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарик. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть девять коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$ являются пятым и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| + \left|y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| \leq 8$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle CBA = 46^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(1) \quad xyz - 6z + z^2$$

$$(2) \quad yz - 6x + x^2$$

$$(3) \quad zx - 6y + y^2$$

Проделаем некоторые операции с данной системой ур-ий:

$$(1) - (2): \quad xy - yz = y(x - z) -$$

$$= 6x - 6z + z^2 - x^2 = 6(x - z) - (x - z)(x + z) =$$

$$= (x - z)(6 - x - z), \text{ тогда } (x - z)(x + y + z - 6) = 0$$

Аналогично при вычете из (2) ур-ие (3)

получим $(x - y)(x + y + z - 6) = 0$ и при вычете

из (1) (3): $(y - z)(x + y + z - 6) = 0$. Получим:

$$\begin{cases} (x - z)(x + y + z - 6) = 0 \\ (x - y)(x + y + z - 6) = 0 \\ (y - z)(x + y + z - 6) = 0 \end{cases} \quad \text{Если правая скобка}$$

$x + y + z - 6 \neq 0$, то тогда

$x - z = 0, x - y = 0, y - z = 0 \Rightarrow$

$x = y = z$, если подставим y и z в (1), то

$$x^2 - 6x + x^2 = 6x \Rightarrow x = 0, \text{ но по условию}$$

$x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$, противоречие. Значит, рассмотрим

третий случай невозможен и $x + y + z - 6 = 0$,

тогда $x + y + z = 6$, можно заменить на $x + y + z$:

$$xyz - (x + y + z)z + z^2 = -xz - yz - z^2 + z^2 =$$

$$= -xz - yz \Rightarrow xy + xz + yz = 0, \text{ но это}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

если сложить (1) + (2) + (3), то след будет 0, тогда: $xy + yz + xz = 0 = -6(x + y + z) + (x^2 + y^2 + z^2) = -36 + (x^2 + y^2 + z^2) \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 36$ (с учетом $x + y + z = 6$). Рассмотрим выражение $(x - 6)^2 + (y - 6)^2 + (z - 6)^2 = x^2 - 12x + 36 + y^2 - 12y + 36 + z^2 - 12z + 36 = (x^2 + y^2 + z^2) - 12(x + y + z) + 108 = 36 - 12 \cdot 6 + 108 = 42$. Покажем, что система имеет в этом случае решение в целых числах: пусть $x = y = 4$, $z = -2$, тогда $x + y + z = 6$, $x^2 + y^2 + z^2 = 36$, $xy = 16$, $-6z + z^2 = 12 + 4 = 16$, т.е. $xy = -6z + z^2$; $yz = -8$, $-6x + x^2 = -6 \cdot 4 + 16 = -8$, т.е. $yz = -6x + x^2$; $zx = -8$, $-6y + y^2 = -8 \Rightarrow zx = -6y + y^2 = -8$; $(4 - 6)^2 + (4 - 6)^2 + (-2 - 6)^2 = 8 + 8 + 64 = 80 \neq 42$, всё выполняется, значит, $(x - 6)^2 + (y - 6)^2 + (z - 6)^2 = 42$, достигается при $x = 4$, $y = 4$, $z = -2$.
Ответ: $(x - 6)^2 + (y - 6)^2 + (z - 6)^2 = 42$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

По условию $n = \underbrace{99 \dots 9}_{20001 \text{ девяток}}$. Рассмотрим чи-

сло $n+1 = \underbrace{1000 \dots 0}_{20001 \text{ нулей}}$. Далее $(n+1)^3 =$

$$= \underbrace{1000 \dots 0}_{20001.3 = 60003 \text{ нулей}}, \quad (n+1)^3 = n^3 + 3n(n+1) + 1 \Rightarrow$$

$20001.3 = 60003 \text{ нулей}$

$$(n+1)^3 - 1 = n^3 + 3n(n+1) = \underbrace{999 \dots 9}_{1000 \dots 0 \text{ нулей}} + \underbrace{60003 \text{ девяток}}_{20001 \text{ нулей}}.$$

число $(n+1)^3 - 1$ содержит 60003 девяток.

Рассмотрим число $3n(n+1) = 3 \cdot \underbrace{999 \dots 9}_{20001} \cdot \underbrace{1000 \dots 0}_{20001} =$

$$\begin{array}{r} \begin{array}{r} 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \\ 999 \dots 99 \\ \times \quad 3 \\ \hline 2999 \dots 97 \end{array} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{20000 \text{ девяток}} \end{array} = \underbrace{2999 \dots 97}_{20000} \underbrace{000 \dots 0}_{20001}, \text{ т.е. число}$$

устроит.

$$\begin{array}{r} n^3 = (n+1)^3 - 1 - 3n(n+1), \text{ первые } 60003 - 40003 = \\ = 20000 \text{ цифр у } n^3 \text{ будут девятыми, а после-} \\ \begin{array}{r} \underbrace{999 \dots 9}_{20000} \quad \underbrace{99 \dots 99}_{29 \dots 97} \quad \underbrace{99 \dots 99}_{20001} \\ - \quad \underbrace{2999 \dots 97}_{20000} \quad \underbrace{00 \dots 00}_{20001} \\ \hline \underbrace{999 \dots 9}_{20000} \quad \underbrace{40 \dots 02}_{29 \dots 97} \end{array} \end{array}$$

дательные цифры, как несложно убедиться 29 и
ответ: $40001 = 20000 + 20001$. Сколько-то 0 (n-н' биты

из $(n+1)^3 - 1$ $3n(n+1)$ стачиве.

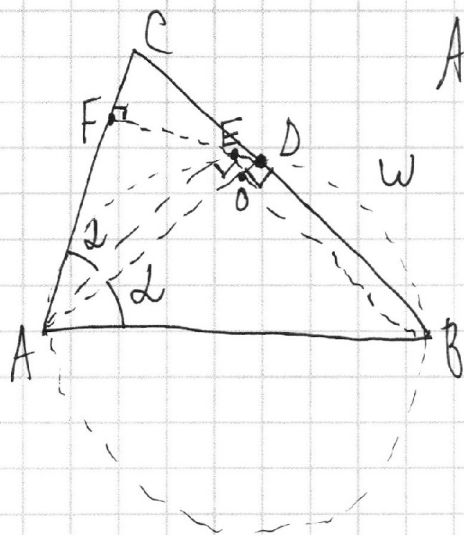


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AC=20, AB=10, BE=9$$

т.к. AB — диаметр, то $\angle ADB = 90^\circ$ (угл. опир. на диаметр), и также $\angle AEB = 90^\circ$ (также как угол, опир. на диаметр).

По теореме Пифагора для $\triangle AEB$:

$$AB^2 = AE^2 + BE^2 \Rightarrow AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{19}.$$

Обозначим т.о пересечение AD и BE . Пусть $\angle FAE = 2$, тогда $\angle FEA = 90^\circ - 2$, тогда

$$\angle DEO = 180^\circ - 90^\circ - (90^\circ - 2) = 2, \text{ а } \angle DEO = \angle DAB,$$

т.к. они вписанные и опир. на BD , не содержащей A . Рассмотрим $\triangle AFD$ и $\triangle ACD$:

$$\angle CAD - \text{общий, оба } \triangle \text{ прямоугольн.} \Rightarrow \triangle AFD \sim \triangle ADC \Rightarrow$$

$$\frac{AF}{AD} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AF \cdot AC = AD^2, \text{ также } \triangle ABD \sim$$

$$\sim \triangle AEF \text{ (оба } \triangle \text{ прямоугольные, } \angle ADB = \angle AFE = 90^\circ, \angle EAF = \angle BAD = 2 \text{ и}$$

$$2 - \text{острый}) \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AE} \Rightarrow AD = AB \cdot \frac{AF}{AE}, \text{ тогда}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$AD^2 = AB^2 \cdot \frac{AF^2}{AE^2}, \text{ подставим } AD^2 \text{ в } AD^2 = AC \cdot AF:$$

$$AB^2 \cdot \frac{AF^2}{AE^2} = AC \cdot AF \Rightarrow AF = \frac{AE^2}{AB^2} \cdot AC = \frac{19}{100} \cdot 20 = \frac{19}{5}.$$

$$\text{Ответ: } AF = \frac{19}{5}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

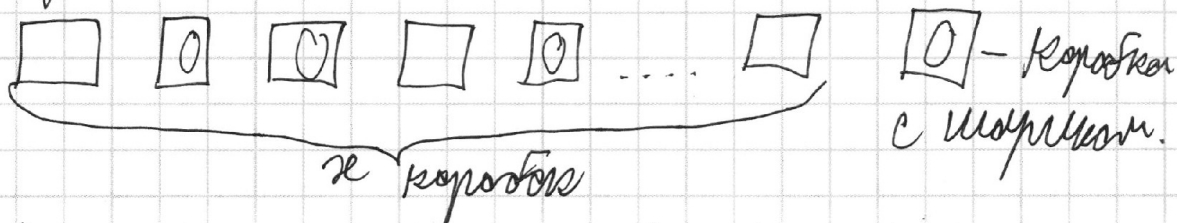
6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть всего x коробок в тележке.



Сначала определим вероятность того, что игрок выберет нужные 3 коробки. Сначала посчитаем количество способов выбрать 5 коробок из x : C_x^5 . Для того, чтобы посчитать число способов, в которых из которых он выигрывает (удовлетворяет условию 3 коробки) пусть он сначала выберет 3 нужные коробки (это можно сделать 1 способом), а потом уже среди оставшихся $(x-3)$ коробок выберет еще 2 (порядок взятия коробок не важен, так как не важно, в каком порядке брать коробки): это он сделает C_{x-3}^2 способами. Тогда количество способов, когда игрок выберет 5 коробок и выигрывает $1 \cdot C_{x-3}^2 = C_{x-3}^2$. Тогда вероятность такого выигрыша равна:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$P_1 = \frac{C_{x-3}^2}{C_x^5} = \frac{\frac{(x-3)!}{(x-5)! \cdot 2!}}{\frac{x!}{(x-5)! \cdot 5!}} = \frac{(x-3)!}{x!} \cdot \frac{5!}{2!} - \text{вероятность выигрыша при взятии 5 коробок.}$$

5 коробок.

Продолжим всё то же самое, среди тех же x коробок, но уже для 9. Всего кол-во способов выбрать 9 коробок из x равно C_x^9 .

А количество способов выбрать 9 коробок так, чтобы урок победы, C_{x-3}^6 (тоже выбираем сначала 3 числовые коробки с шариками, а затем среди оставшихся $(x-3)$ добираем ещё 6, опять же порядок взятия не важен), тогда здесь вероятность выигрыша $P_2 = \frac{C_{x-3}^6}{C_x^9}$

$$= \frac{\frac{(x-3)!}{(x-9)! \cdot 6!}}{\frac{x!}{(x-9)! \cdot 9!}} = \frac{(x-3)!}{x!} \cdot \frac{9!}{6!}, \text{ тогда вероятность}$$

выигрыша урона увеличится в $\frac{P_2}{P_1}$ раз:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{(x-3)! \cdot 9!}{x! \cdot 6!} \cdot \frac{x! \cdot 2!}{(x-3)! \cdot 5!} = \frac{9! \cdot 2!}{6! \cdot 5!} = \frac{4 \cdot 8 \cdot 9}{3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{42}{5} = 8,4.$$

Ответ: $\frac{P_2}{P_1} = 8,4$ раз.



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(1) x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$$

$$(2) 5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$$

Рассмотрим ур-ие (1): $x^2 - a(a-4) + a^2 - 6a + 4 = 0$

$$D = a^2(a-4)^2 - 4(a^2 - 6a + 4) = a^2(a^2 - 8a + 16) -$$

$$-4a^2 + 24a - 16 = a^4 - 8a^3 + 16a^2 - 4a^2 + 24a - 16 =$$

$$= a^4 - 8a^3 + 12a^2 + 24a - 16, \text{ разложим на мно-}$$

жителем $a^4 - 8a^3 + 12a^2 + 24a - 16$, для этого най-
дем корни ур-ия $a^4 - 8a^3 + 12a^2 + 24a - 16 = 0$,
 $a = 2: 16 - 64 + 48 +$

Пусть x_1 и x_2 - корни ур-ия (1), тогда по
теореме Виета $x_1 + x_2 = a(a-4)$ и $x_1 x_2 =$

$$= a^2 - 6a + 4. \text{ Пусть } x_3 \text{ и } x_4 - \text{ корни ур-ия (2),}$$

тогда по теореме Виета $x_3 + x_4 = \frac{a^3 - 4a^2}{5},$

$$x_3 x_4 = -\frac{2a^3 + 6a + 15}{5}.$$

Выделим ОДЗ: $x^2 - (a^2 - 4a)x + \frac{(a^2 - 4a)^2}{4} +$

$$+ a^2 - 6a + 4 - \frac{(a^2 - 4a)^2}{4} = \left(x - \frac{a^2 - 4a}{2}\right)^2 + a^2 - 6a + 4 - \frac{(a^2 - 4a)^2}{4} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\frac{(a^2 - 4a)^2}{4} - a^2 + 6a - 4 \geq 0 \text{ в } (1)^{\circ} \text{ - ом ур-ии.}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Во 2-ой ур-ии ОДЗ:

$$5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 5x^2 - \frac{5(a^3 - 4a^2)}{5}x + \frac{25(a^3 - 4a^2)^2}{4 \cdot 25} - (2a^3 + 6a + 15) - \frac{(a^3 - 4a^2)^2}{20} \geq 0$$

$$= 5 \left(x - \frac{a^3 - 4a^2}{10} \right)^2 - \left(2a^3 + 6a + 15 + \frac{(a^3 - 4a^2)^2}{20} \right) \geq 0$$

$$\frac{(a^3 - 4a^2)^2}{20} + 2a^3 + 6a + 15 \geq 0, \text{ тогда общее ОДЗ:}$$

$$\begin{cases} \frac{(a^2 - 4a)^2}{4} - a^2 + 6a - 4 \geq 0 \\ \frac{(a^3 - 4a^2)^2}{20} + 2a^3 + 6a + 15 \geq 0 \end{cases}$$

$$(a^2 - 4a)^2 - 4a^2 + 24a - 16 = a^4 - 8a^3 + 16a^2 - 4a^2 + 24a - 16 = a^4 - 8a^3 + 12a^2 + 24a - 16 \geq 0$$

$$(a^3 - 4a^2)^2 + 40a^3 + 120a + 300 = a^6 - 8a^5 + 16a^4 + 40a^3 + 120a + 300 \geq 0. \text{ Умно,}$$

$$\begin{cases} a^4 - 8a^3 + 12a^2 + 24a - 16 \geq 0 \\ a^6 - 8a^5 + 16a^4 + 40a^3 + 120a + 300 \geq 0 \end{cases}$$

Вернёмся к корням. По условию, пусть x_1 - шестой член прогрессии, x_2 - седьмой член, x_3 - пятый член, x_4 - восьмой. Тогда если $x_3 \geq k$, то $x_1 \geq k + y$, $x_2 \geq k + 2y$, $x_4 \geq k + 3y \geq$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x_1 + x_2 = x_3 + x_4$ тогда с учетом $x_1 + x_2 =$
 $= a/(a-4)$ и $x_3 + x_4 = \frac{a^3 - 4a^2}{5}$, тогда
 $a/(a-4) = \frac{a^3 - 4a^2}{5} = \frac{a^2(a-4)}{5} \Rightarrow 5a/(a-4) = a^2/(a-4) \Rightarrow$
 $a^2(a-4) - 5a/(a-4) = a/(a-4)(a-5) = 0$, тогда
 $a \neq 0$, $a \neq 4$, $a = 5$. При рассмотрении $a = 0$ в
 ОДЗ (1) $x^2 - 4 = 0$ не имеет корней. При рассмотрении $a = 4$ и $a = 5$ в ОДЗ
 оба неравенства выполняются, поэтому $a = 4$ и $a = 5$
 подходят. Тогда ур-ие (1) принимает вид:
 $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$, ур-ие (2) принимает вид:
 $5x^2 - 164 = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{164}{5}}$. Проверим, выполн
 и x_1, x_2, x_3, x_4 в какой-нибудь арифметич.
 прогрессии: если как x_1 и x_2 - соседние числа
 прогрессии, то $d = x_2 - x_1 = \pm 4$, но $d = x_3 - x_2$ явля-
 ется иррациональным числом, т.е. d одновременно
 и целое, и иррациональное, противоречие ($a \neq 4$).
 $a = 5$:
 (1) $x^2 - 5x + 1 = 0$
 $D = 25 - 4 = 21$; $x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$, тогда $d = x_2 - x_1 =$
 $= \pm \sqrt{21}$; (2) $5x^2 - 25x - 295 = 0$; $x^2 - 5x - 59 = 0$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 5x - 59 = 0$$

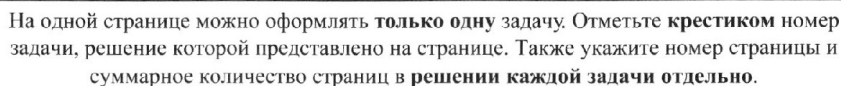
$$D = 25 + 4 \cdot 59 = 25 + 236 = 261; \sqrt{D} = \sqrt{261},$$

$$\text{тогда } x = \frac{-5 \pm \sqrt{261}}{2}, \text{ тогда } 3d = x_4 - x_3 =$$

$$= \sqrt{261}, \text{ Но } 3\sqrt{59} = \sqrt{9 \cdot 59} > \sqrt{261}, \text{ тогда}$$

неверно. Попробуем: $a \neq 0, a \neq 4, a \neq 5$, остальные не удовлетворяют условию по прогрессии.

Ответ: $a = 0$.

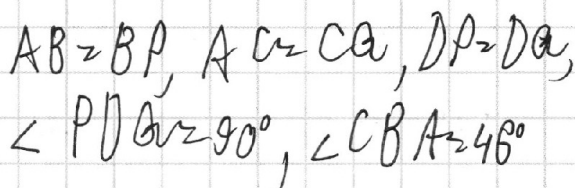


7



1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Из прикладного

$\angle 46^\circ$ $\angle 112^\circ$ $\angle 48^\circ$ $\angle 45^\circ$ $\angle 113^\circ$ $\angle 44^\circ$
 $\triangle BAC \angle BCA = 90^\circ - \angle CBA = 90^\circ - 44^\circ = 46^\circ$. По условию $\triangle ACB$ - равнобедр. ($AC = CB$) $\Rightarrow \angle CAB = \angle CBA = \frac{180^\circ - \angle BCA}{2} = \frac{180^\circ - 46^\circ}{2} = 90^\circ - 22^\circ = 68^\circ$. Тогда

В $\triangle ABP$ - равнобедр. ($AB = BP$) $\Rightarrow \angle BPA = \angle BAP =$
 $= \frac{180^\circ - \angle ABP}{2} = \frac{90^\circ - 23^\circ}{2} = 64^\circ$. По теореме Пифагора

$\triangle PQR \sim \triangle BAC$ $PC^2 \leq AB^2 + AC^2$, $AB^2 \leq BP^2$, $AC^2 \leq CP^2$

Определим, в какой именно точке проведем перпендикуляр к BC : пусть AN — высота, тогда понятно, что A будет лежать на отрезке BN .

(удары $CA < AC$), а Р-разомещение СН (удары

$AB > BP$), но тогда P не лежит на AC (так как $BP \geq BC > AB$), и аналогично B не лежит на AP .

Мо ема популарно за БС мајков: В, а, Р, С.

поэтому $BC^2 = (BP + AC)^2 - AP^2$
 $= BP^2 + AC^2 + 2BP \cdot AC - 2(BP + AC) \cdot AP = BP^2 + AC^2$
 откуда с учетом $BC^2 = BP^2 + AC^2$;



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$AP^2 + 2BPAC - 2AP(BP + AC) = 0$$

$\triangle ADP$ - равнобедр., прям. уг. $\Rightarrow \angle DPA = \angle DAP = 45^\circ$.
 Пусть $\angle DAP = \angle PAA = \angle PAD = 23^\circ$,
 $\angle DPA = \angle CPA - \angle APD = 22^\circ$.

В ур. $AP^2 + 2BPAC - 2AP(BP + AC) = 0$
 выразим AP : $D = 4BP^2AC^2 + 4 \cdot 4^2 / (BP + AC) =$
 $= 4(BP^2AC^2 + 2(BP + AC)) \Rightarrow \sqrt{D} = 2\sqrt{BP^2AC^2 + 2(BP + AC)}$
 $AP = \frac{-2BPAC \pm 2\sqrt{BP^2AC^2 + 2(BP + AC)}}{2} =$

$= \sqrt{BP^2AC^2 + 2(BP + AC)} - BPAC$ (корень $\pm$ со
 знаком "-" даёт $AP < 0$, чего не может
 быть). Пусть DL - высота в $\triangle DAP$, в равнобедр.
 $\triangle DL$ и медиана $\Rightarrow DL = \frac{1}{2} AP = \frac{1}{2} (\sqrt{BP^2AC^2 + 2(BP + AC)} - BPAC)$.
 При этом $DL = LP$, тогда

$$\tan(\angle CPD) = \frac{DL}{CL} = \frac{DL}{LP + PC} = \frac{DL}{DL + PC}.$$

$\angle APC = 180^\circ - 68^\circ = 112^\circ$; по теореме синусов

для $\triangle PCA$: $\frac{AC}{\sin 112^\circ} = \frac{AC}{\sin 68^\circ} = \frac{PC}{\sin 28^\circ} \Rightarrow PC = AC \frac{\sin 28^\circ}{\sin 68^\circ}$.

Аналогично по теореме синусов для
 $\triangle BAA$: $BA = BC \cdot \frac{\sin 28^\circ}{\sin 68^\circ}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☐☒

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Подставим значение для PC в $\angle DCB$:

$$\angle DCB = \frac{DL}{DL + \frac{AB \sin 44^\circ}{BC \sin 68^\circ}}, \text{ применим } BC \text{ и}$$

AB можно можно связать теоремой синусов для $\triangle ABC$: $\frac{AB}{\sin 44^\circ} = \frac{BC}{\sin 40^\circ} \Rightarrow BC = AB \frac{\sin 40^\circ}{\sin 44^\circ}$.

Затем можно выразить BA через AB и BC :

$$BA = AB \frac{\sin 26^\circ}{\sin 68^\circ} = BC \frac{\sin 26^\circ \sin 60^\circ}{\sin 68^\circ \sin 44^\circ}. \text{ Затем}$$

BA и PC (через BC), выразим стороны PA и DL через BC (в выражении для

$$PC = \sqrt{(PA)^2 + 2(PA \cdot AC) - BC^2}$$

Отсюда сможем найти $\angle DCB$ (BC сократится).



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} \times 909 \\ 909 \\ \hline 8181 \\ + 8181 \\ \hline 826281 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2524 \\ \times 826281 \\ 309 \\ \hline 7436529 \\ 7436529 \\ \hline 451089429 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 99 \\ 99 \\ \hline 891 \\ 891 \\ \hline 9801 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 9801 \\ 99 \\ \hline 87209 \\ 87209 \\ \hline 969299 \end{array}$$

$$n^2 \cdot (n+1) = 1,000...0$$

20001

$$\begin{array}{r} \times 99...9 \\ 99...9 \\ \hline 299...994 \end{array}$$

$$n^3 = (n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = 1,000...0$$

20001 60003

$$n^3 + 3n(n+1) = 99...9$$

1000...0 20001 60003

$$3n(n+1) = 299...94000...0$$

20000 20001 40003



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}| + |y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}| \leq 8$, рассмотрим
2 пары точек: $(x_0; y_0)$, $(-x_0; y_0)$, ~~$(x_0$~~

$|y_0 - 20 + \frac{x_0}{2\sqrt{3}}| + |y_0 - 20 - \frac{x_0}{2\sqrt{3}}| = |y_0 - 20 + \frac{(-x_0)}{2\sqrt{3}}| +$
 $+ |y_0 - 20 - \frac{(-x_0)}{2\sqrt{3}}|$, т.е. если φ содержит
точку $(x_0; y_0)$, то она содержит и точку
 $(-x_0; y_0)$, т.е. φ симметрична относительно
оси Oy . Рассмотрим модуль:

$$I \quad y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \geq 0 \quad \text{и} \quad y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \geq 0 \Rightarrow$$

$$y - 20 + y - 20 = 2y - 40 \leq 8 \Rightarrow 2y \leq 48 \Rightarrow y \leq 24,$$

при этом

$$\begin{cases} y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \geq 0 \\ y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2\sqrt{3}} \geq 20 - y \\ \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq y - 20 \end{cases}, \text{ тогда}$$

$$20 - y \leq \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq y - 20$$