

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 5

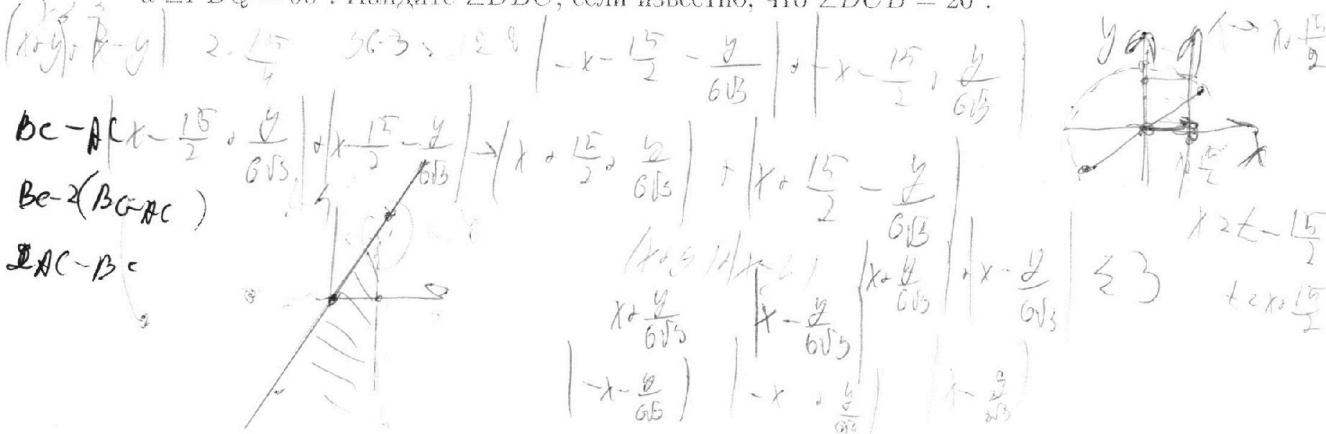
1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.
4. [4 балла] В телевизионном шоу ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарику. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leq 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура Φ при этом повороте.

7. [6 баллов] На гипotenузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases}$$

Если одно из чисел 0 (не указали обнулился нулю), то $yz = 0$, значит хотя бы одна из трех равна 0.

А все переменные должны выполнять следующее:

Первое

$$3z + z^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ z = -3 \end{cases}$$

Значит если

none из трех чисел 0, то $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$ равно либо $(0+3)^2 + (0+3)^2 + (0+3)^2 = 27$, либо $(0+3)^2 + (0+3)^2 + (-3+3)^2 = 18$.

Тогда остается рассмотреть случай, когда решения этого уравнения либо нет целых числа. Тогда перенесем все в правую:

$$xy \cdot yz \cdot zx = (3z + z^2)(3x + x^2)(3y + y^2)$$

$$(xyz)^2 = xyz(x+3)(y+3)(z+3)$$

, так как $xyz \neq 0$, можно делить

разделами.

$$xyz = (x+3)(y+3)(z+3)$$

$$(x+3)(y+3)(z+3) - xyz = xyz + 27 + 9(x+y+z) + 3(y+3z+x) - xyz = 3(9 + 3(x+y+z) + xyz + x^2y^2z^2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 + 3(x+y+z) + xyz + x^2y^2z^2 = 0.$$

Значит xy на $3z + z^2$, yz на $3x + x^2$, zx на $3y + y^2$.

$$9 + 3(x+y+z) + 3(x+y+z) + x^2y^2z^2 = 0.$$

Подставим к одному выражению 18.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$(x^2 + 6x + 9) + (y^2 + 6y + 9) + (z^2 + 6z + 9) = 18$$
$$(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = 18$$

Ответ: 27; 18



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи** отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Давайте заметим, что число n , которое состоит из

40 000 единиц можно представить в виде $10^{40000} - 1$.

$$\text{Тогда } n^3 = (10^{40000} - 1)^3 = 10^{120000} - 3 \cdot 10^{80000} + 3 \cdot 10^{40000} - 1 = \\ = 10^{120000} (10^{40000} - 3) + 3 \cdot 10^{40000} - 1$$

Тут $A = 10^{40000} - 3$. В этом это число фиг $\underbrace{99 \dots 99}_{39999}$.

То есть в нем 39999 единиц.

При $B = 3 \cdot 10^{40000} - 1$. Это же фиг $\underbrace{2999 \dots 9}_{40000}$.

То есть в нем 40000 единиц.

Тогда число $10^{80000} \cdot A + B$ будет фиг

$$\underbrace{99 \dots 99}_{39999} \underbrace{9900 \dots 02}_{39803} \underbrace{999 \dots 9}_{40000}$$

То есть в этом числе 79999 единиц

Ответ: 79999

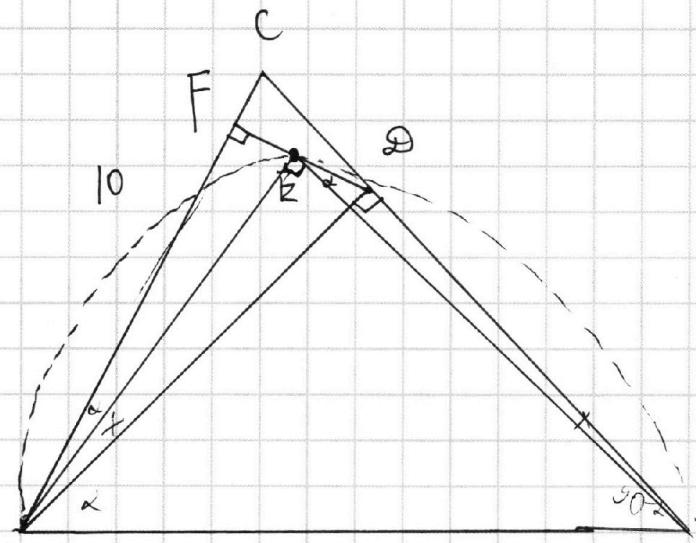


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$\angle DAB = \alpha$, $\angle DAЕ = x$. $\triangle ABD$ -треугольник выпуклый, то вписаные углы, опирающиеся на то же прямое $\Rightarrow \angle AEB = \angle ADB = 90^\circ$.

$\angle DBA = 180 - 90 - \angle DAB = 90 - \alpha$. Так как A, E, D, B лежат на одной окружности, то $\angle AED + \angle ABD = 180 \Rightarrow \angle AED = 180 - \angle ABD =$

$$\Rightarrow \angle AED = 180 - \angle AED = \angle ABD = 90 - \alpha. \text{ Так как } DE \perp AC, \text{ то } \angle EAD = 90 - (90 - \alpha) = \alpha \Rightarrow \triangle AED \sim \triangle ADB \text{ по второму условию} (\angle EAD = \angle DAB, \angle ADB = \angle AED = 90^\circ) \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AE^2 = \frac{AD \cdot AB}{AB}$$

По теореме косинусов для $\triangle AEB$, $AE = \sqrt{AB^2 - EB^2} = \sqrt{6^2 - 5^2} = \sqrt{11}$.

По теореме синусов для $\triangle ADB$, $\frac{AD}{\sin \angle ABD} = \frac{AB}{\sin(\alpha+2)} = 2R \geq AB$.

$\angle ACB = 180 - \angle CAB - \angle ABC = 180 - 2\alpha - 90 + \alpha = 90 - (\alpha + 2)$. По теореме синусов для $\triangle ABC$, $\frac{AC}{\sin \angle CAB} = \frac{AB}{\sin \angle ACB} \Rightarrow \frac{AC}{\sin(90 - \alpha)} = \frac{AB}{\sin(\alpha + 2)} \Rightarrow$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \sin(90-2) = \frac{AC}{AB} \cdot \sin(90-(2+x)) \quad \left[\begin{array}{l} \text{из прямоугольного } \triangle AGB, \text{ где} \\ \angle EBA = (90+2+x) \text{ и } \sin(90-(2+x)) = \end{array} \right]$$
$$AD = AB \cdot \sin(90-2) = \frac{AC \cdot AE}{AB}$$

$$= AB \cdot \frac{AC}{AB} \cdot \frac{AE}{AB} = \frac{AC \cdot AE}{AB}$$

$$AP^2 = \frac{AD \cdot AG}{AB} = \frac{\frac{AC \cdot AE}{AB} \cdot AE}{AB} = AC \cdot \left(\frac{AE}{AB}\right)^2 = 10 \cdot \left(\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2 = \frac{110}{36} = \frac{55}{18}$$

Ответ: $\frac{55}{18}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

У нас есть x коробок. В трех из них шашки. Тогда коробки поделены на две группы: эти 3 коробки, а остальные можно выбирать как угодно.

Тогда вероятность подсечь это описание каким-либо способом

когда мы подсекли (т. е. подсажен выбором 3 коробки с

шашками, ~~или~~ или 2 из 3 коробки из $x-3$

оставшиеся мы можем выбрать любые, значит есть выбор

случай C_{x-3}^2 (если 5 коробок) и C_{x-3}^3 (если 6 коробок). Всего

случаев C_x^5 (если 5 коробок) и C_x^6 (если 6 коробок). Тогда

$$P(\text{подсечь, если 5 коробок}) = \frac{C_{x-3}^2}{C_x^5}$$

$$P(\text{подсечь, если 6 коробок}) = \frac{C_{x-3}^3}{C_x^6}, \text{ тогда отношение одинаково}$$

безразлично! Это:

$$\frac{\frac{C_{x-3}^3}{C_x^6}}{\frac{C_{x-3}^2}{C_x^5}} = \frac{C_{x-3}^3 \cdot C_x^5}{C_{x-3}^2 \cdot C_x^6} = \frac{\frac{(x-3)!}{(x-6)!} \cdot \frac{x!}{5!(x-5)!}}{\frac{(x-3)!}{(x-5)! \cdot 2!} \cdot \frac{x!}{(x-6)! \cdot 6!}} = \frac{\frac{2! \cdot 6!}{3! \cdot 5!}}{2} = 2$$

Ответ: вероятность увеличилась в 2 раза.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

a_n - n-тий член арифметического прогрессии, a_1 - первый член,

d - разность прогрессии, $d \neq 0$. Тогда $a_3 = a_1 + 2d$, $a_6 = a_1 + 5d$

$$a_5 = a_1 + 4d, a_6 = a_1 + 5d \Rightarrow a_5 + a_6 = 2a_1 + 9d = a_3 + a_6.$$

$$x^2 - (a^2 - a) x + a - 5 = 0 \text{ имеет корни } a_5 \text{ и } a_6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{по теореме Виетта: } a_5 a_6 = -(-a^2 + a) = a^2 - a$$

$$4x^2 - (a^3 - a^2) x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0 \text{ имеет корни } a_3 \text{ и } a_8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{по теореме Виетта: } a_3 a_8 = \frac{-(-a^3 a^2)}{4} = \frac{a^3 - a^2}{4}$$

$$\text{ибо } a_5 a_6 = a_3 a_8, \text{ ибо } a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{4} \Rightarrow a^3 - 5a^2 + 4a = 0$$

$$a(a^2 - 5a + 4) = 0 \Rightarrow a(a-4)(a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=4 \\ a=1 \end{cases}$$

1) $a=0$:

$$x^2 - (a^2 - a) x + a - 5 = 0 \Rightarrow x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{5}$$

$$4x^2 - (a^3 - a^2) x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0 \Rightarrow 4x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 1.$$

Но и.к. ~~это~~ члены арифметической прогрессии под уменьшение ($d > 0$)

и под увеличение ($d < 0$). Т.е. a_5 и a_6 должны лежать между

a_3 и a_8 , но $-\sqrt{5} < -1 < 1$, $\sqrt{5} > 1 > -1$. Значит при $a=0$

$x=0$ такой прогрессии не существует.

2) $a=1$

$$x^2 - (a^2 - a) x + a - 5 = 0 \Rightarrow x^2 - (1^2 - 1) x + 1 - 5 = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2 \cdot 1^4 + 2 \cdot 1^2 - 1^6 - 4 = 0 \Rightarrow 4x^2 - 7 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$$

а₅ и а₆, между которыми четные числа а₃ и а₄,
 $\text{но } -2 < -\frac{\sqrt{7}}{2} < \frac{\sqrt{7}}{2} < 2 \quad \left(\frac{\sqrt{7}}{2} < 2 \right) \text{ и } < \sqrt{7} \Rightarrow \sqrt{7} < 16 \right)$

Значит уравнение такой последовательности не существует.

3) а=4 : $x^2 - (a^2 - a)(4a - 5) = 0 \Rightarrow x^2 - 12x - 1 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 + 4 \cdot 1}}{2} = 6 \pm \frac{\sqrt{148}}{2} = 6 \pm \frac{2\sqrt{37}}{2} = 6 \pm \sqrt{37}$$

$$4x^2 - (a^3 - a^2) + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0 \Rightarrow 4x^2 - (4^3 - 4^2)x + 2 \cdot 4^4 + 2 \cdot 4^2 - 4^6 - 4 = 0 \quad | : 4 \quad x^2 - (4^3 - 4)x + 2 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4 - 4^5 - 1 = 0$$

$$x^2 - 12x - 88 = 0$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 + 4 \cdot 88}}{2} = 6 \pm \frac{2\sqrt{136}}{2} = 6 \pm \sqrt{925} = 6 \pm \sqrt{25 \cdot 37} =$$

$$= 6 \pm 5\sqrt{37}.$$

Таким образом $a_1 = 6 - 5\sqrt{37}$, $a_2 = 2\sqrt{37}$. Тогда $a_3 =$

$$= 6 - 9\sqrt{37} + 2 \cdot 2\sqrt{37} = 6 - 5\sqrt{37}$$
, $a_4 = 6 - 9\sqrt{37} + 9 \cdot 2\sqrt{37} = 6 + 5\sqrt{37}$,
$$a_5 = 6 - 9\sqrt{37} + 4 \cdot 2\sqrt{37} = 6 - \sqrt{37}$$
, $a_6 = 6 - 9\sqrt{37} + 5 \cdot 2\sqrt{37} = 6 + \sqrt{37}$.

Т.е. при $a=4$ такая последовательность существует.

Ответ: $a=4$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|a| + |b| \geq |ab|$$

$$\geq \left| x + \frac{15}{2} + \frac{4}{6\sqrt{3}} \right| + \left| x + \frac{15}{2} - \frac{4}{6\sqrt{3}} \right| \geq 3$$

$$|a| + |b| \leq 3$$

$$|ab| = \frac{y}{3\sqrt{3}}$$

$$x - \frac{15}{2} + \frac{4}{6\sqrt{3}} - x + \frac{15}{2} \leq$$

$$\frac{AP}{AD} = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

$$PR = \frac{\sqrt{11}}{6} \cdot AD$$

$$AD^2 = AB^2 - AB \sin 90^\circ = AC \cdot \sin 20^\circ - AC \cdot \frac{\sqrt{11}}{6}$$

$$\frac{10\sqrt{11}}{6} \cdot \frac{\sqrt{x+y-\sqrt{3xy^2}}}{\sqrt{2}\sin 20^\circ} = \frac{DC}{\frac{\sqrt{11}}{6}}$$

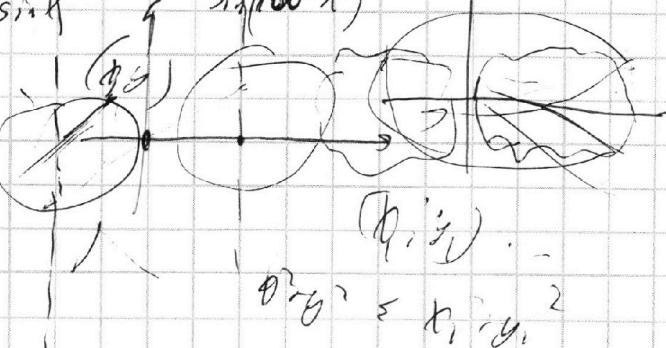
$$\frac{6\sqrt{10}}{30} \cdot \frac{\sqrt{xy-\sqrt{3xy^2}}}{\sin 20^\circ}$$

$$DC = \frac{\sqrt{xy-\sqrt{3xy^2}}}{2\sin 20^\circ}$$

$$\frac{xy - \sqrt{3xy^2}}{2\sin 20^\circ \cdot \sin 10^\circ} = \frac{\sqrt{3xy^2}}{\sin(160^\circ - x)}$$

$$|\alpha y| + |\beta y|$$

$$\theta^2 y^2 \leq x_1^2 y_1^2$$



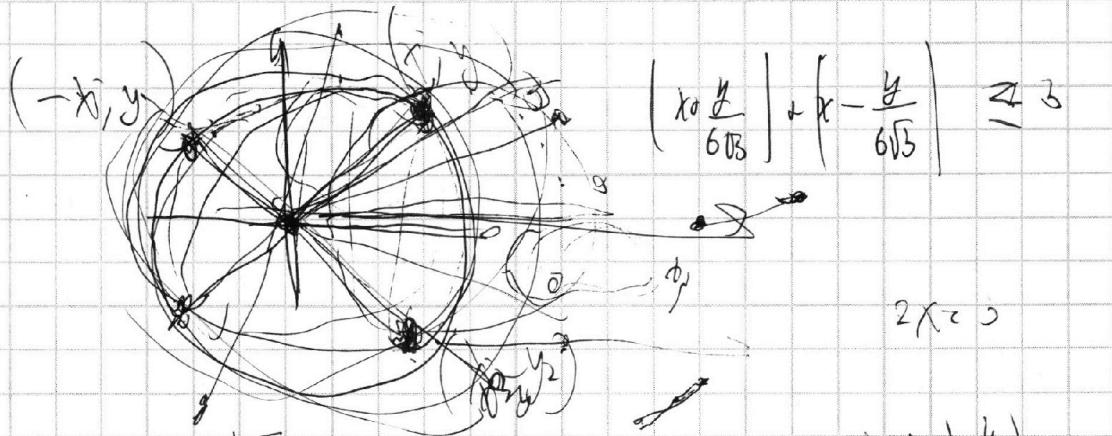
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\left| x_0 - \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| + \left| x - \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| \leq 3$$

$$2x = 3$$

$$\left| x - \frac{y}{6\sqrt{3}} \right|$$

$$2x - 3y \leq 3$$

$$b \leq \frac{3x}{2}$$

$$x, y$$

$$\left| x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| + \left| x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| \leq 3$$

$$\left| x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| + \left| x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| \leq \left| \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| + \left| \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \right|$$

$$\left| x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| + \left| x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| \leq \left| a - \frac{15}{2} \right| + \left| b - \frac{15}{2} \right| \leq 30$$

$$\left(x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \right)^2 + \left(x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \right)^2 \leq \left(a - \frac{15}{2} \right)^2 + \left(b - \frac{15}{2} \right)^2$$

$$a^2 + b^2 \leq r^2$$

999 69999
999 69999
27 cm
27 cm
27 cm
27 cm

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 1 <input type="checkbox"/> | 2 <input type="checkbox"/> | 3 <input type="checkbox"/> | 4 <input type="checkbox"/> | 5 <input type="checkbox"/> | 6 <input type="checkbox"/> | 7 <input type="checkbox"/> |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} xy = 3z + t \\ yz = 3xz + x \\ zt = 3yz + y^2 \end{array} \right. & \quad \begin{array}{l} 2 \quad 2(3+2) \\ 2 \quad 2(3+1) \\ 2 = 3y + y^2 = y(3+y) \end{array} \quad \begin{array}{l} y^2(3+x)(3+z) \\ x^2(3+y)(3+z) \quad 3 \cdot 10 \\ z^2(3+x)(3+y) \end{array} \\ (xyz)^2 &= xyz(3+x)(3+z)(3+y) \\ xyz(3+x)(3+y)(3+z) &= 9(3x+3yz+xy)(3+xz) \quad 2 \\ x^2y^2z^2 + 6xyz + 27 &= 9999999999 \\ -2x, 3x+9y+3xyz & \quad 9999999999 \\ \cancel{2} \quad 3(8y+2) + 9(y+2) & \quad 12010000 \\ 3(8y+2) + 3(8y+2) + 2x^2 &= 0 \\ 3(16y+4) + 2x^2 &= 0 \\ 3(16y+4) + 3(16y+4) + 2x^2 &= 0 \\ 3(16y+4) &= -3(10^{120000} - 10^{10000}) \\ 3(16y+4) &= 3(16y+4) \\ 120000 &= 120000 \\ x &= 120000 \\ x-5 & \quad 120000 \\ x &= 120000 \\ x &= 120000 \\ \frac{C_6}{C_5} \cdot \frac{C_3}{C_5} \cdot \frac{C_3}{C_5} \cdot \frac{C_2}{C_{x-3}} \cdot \frac{C_3}{C_{x-3}} & \quad \frac{6!(x-6)!}{5!(x-5)!} \\ \frac{6!}{8!2!} \cdot \frac{3!2!}{3!} \cdot \frac{C_2}{C_{x-3}} \cdot \frac{(x-6)!3!}{C_{x-3}} & \quad \frac{(x-5)!}{(x-3)!} \cdot \frac{1}{3} = \frac{x-5}{3} \\ \frac{C_2}{C_{x-3}} & \quad \frac{C_{x-3}^3 \cdot C_x^5}{C_{x-3}^2 \cdot C_x^6} = \frac{x-5}{3} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Задача 18

На рисунке изображены три окружности с центрами A , B , C , касающиеся друг друга в точках D , E , F соответственно. Длина дуги AC равна 60° , а длина дуги BC равна 120° . Точка P лежит на окружности с центром A , а точка R — на окружности с центром B . Угол APC равен 90° . Найдите радиус окружности с центром C , если известно, что радиусы окружностей с центрами A и B равны.

Дано: $\angle ACF = 60^\circ$, $\angle BCF = 120^\circ$, $\angle APC = 90^\circ$.
Найти: радиус окружности с центром C .

Решение:

Пусть r_1 , r_2 и r_3 — радиусы окружностей с центрами A , B и C соответственно. Рассмотрим треугольник ABC . Из условия задачи $\angle ACF = 60^\circ$ и $\angle BCF = 120^\circ$ следует, что $\angle ACB = 60^\circ$. Пусть r — радиус окружности с центром C .

Так как $\angle APC = 90^\circ$, то $\angle APB = 90^\circ$. Поэтому $AB^2 = AP^2 + PB^2$. Но $AB^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos 120^\circ = r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2$. Используя формулу косинусов для треугольника ABC , получим:

$$r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos 60^\circ = r_1^2 + r_2^2 - r_1 r_2$$

$$r_1 r_2 = r_1 r_2$$

$$r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$$

Таким образом, радиус окружности с центром C равен $\sqrt{r_1^2 + r_2^2}$.

Далее предстоит решить систему уравнений для определения радиусов r_1 и r_2 .

Уравнения:

$$r_1^2 - r_1 r_2 = 40$$

$$r_2^2 - r_1 r_2 = 480$$

$$r_1^2 + r_2^2 = 520$$

$$r_1 = r_2 = 20$$

Решение системы уравнений:

$$\begin{cases} r_1^2 - r_1 r_2 = 40 \\ r_2^2 - r_1 r_2 = 480 \\ r_1^2 + r_2^2 = 520 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} r_1^2 - r_1 r_2 &= 40 \\ r_2^2 - r_1 r_2 &= 480 \\ r_1^2 + r_2^2 &= 520 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_1(r_1 - r_2) &= 40 \\ r_2(r_2 - r_1) &= 480 \\ r_1^2 + r_2^2 &= 520 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_1 - r_2 &= 1 \\ r_2 - r_1 &= 12 \\ r_1^2 + r_2^2 &= 520 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_1 &= 6 \\ r_2 &= 18 \\ r_1^2 + r_2^2 &= 520 \end{aligned}$$

$$r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} = \sqrt{6^2 + 18^2} = \sqrt{36 + 324} = \sqrt{360} = 6\sqrt{10}$$