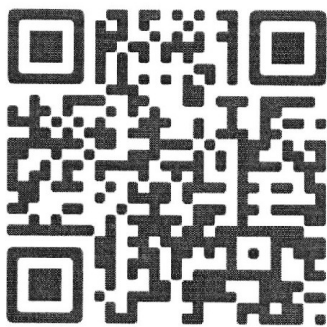




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарик. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leq 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 3z + 2^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases} \quad (x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 6(x+y+z) + 27$$

$x, y, z \neq 0$

Сложим оба раза выражения, получим:

$$\begin{aligned} 2xy + 2yz + 2xz &= 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 6(x+y+z) \\ 6(x+y+z) &= 2xy + 2yz + 2xz - 2x^2 - 2y^2 - 2z^2 \Rightarrow \\ x^2 + y^2 + z^2 + 6(x+y+z) + 27 &= -2x^2 - 2y^2 - 2z^2 + 2xy + 2yz + 2xz + 27 \\ (x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 &= -6(x+y+z) \quad 6(x+y+z) = -(x-y)^2 - (x-z)^2 - (y-z)^2 \\ \downarrow x^2 + y^2 + z^2 - (x-y)^2 - (x-z)^2 - (y-z)^2 + 27 &= 0 \end{aligned}$$

1) Вычтем из (2) (1): $x^2 + 3x - z^2 - 3z = yz - xy$

$$(x-z)(x+z) + 3(x-z) + y(x-z) = 0$$

$$(x-z)(x+z+3+y) = 0$$

1. Если $x=z$, то $xy = x^2 + 3x$ $xy = x^2 + 3x$ $x^2 = y^2 + 3y$
 $x^2 = xy - 3x$, $xy - 3x = y^2 + 3y$ $y(y-x) = -3(x+y)$
 $x(x+3-y) = 0$

Т.е. $x \neq 0$ $y = x+3$ 3 выражения:

$$x^2 = (x+3)^2 + 3(x+3) \quad x^2 = x^2 + 6x + 9 + 3x + 9$$

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = 12 + 4^2 + 1^2 = 18$$

(или наоборот
 $x = -2$ $y = -2$ $z = 1$
 $x = 1$ $y = -2$ $z = 2$)

2. Если $x+y+z = -3$ $x = -3-y-z$

$$\begin{aligned} (-3-y-z) \cdot y &= 3z + 2^2 \quad -3y - y^2 - yz = 3z + 2^2 \\ z^2 + 2(3+y) + y^2 + 3y &= 0 \quad D = y^2 + 6y + 9 - 4y^2 - 12y = \\ &= -3y^2 - 6y + 9 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

↓
Сложив все выражения мы получим, что:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3(x+y+z) = 9(xy+yz+zx) \quad | + 9(xy+yz+zx)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3(x+y+z) = 9(xy+yz+zx) - x - y - z$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3(x+y+z) = 0 \Rightarrow xy+yz+zx = 0$$

Снова сложим выражения:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3(x+y+z) = 0 \quad x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

в самом начале:

$$\text{Тогда } (x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = 9 + 6 \cdot (-3) + 27 = 9 - 18 + 27 = 18$$

Ответ: 18



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = \underbrace{999\dots 9}_{40000} \quad n^3 = ?$$

Заметим, что $n = 9 \cdot \underbrace{111\dots 1}_{40000}$

$$n^3 = \underbrace{99\dots 9}_{40000}^3 = (\underbrace{100\dots 0}_{40001} - 1)^3 = (10^{40001} - 1)^3$$

$$\begin{aligned} (a-b)^3 &= (a^2 - 2ab + b^2)(a-b) = a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 - b^3 = \\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{aligned}$$

$$n^3 = 10^{120000} - 3 \cdot 10^{80000} \cdot 1 + 3 \cdot 10^{40000} \cdot 1^2 - 1^3 = 10^{120000} - 3 \cdot 10^{80000} +$$

$$+ 3 \cdot 10^{40000} - 1 = 10^{80000} (10^{40000} - 3) + 3 \cdot 10^{40000} - 1 =$$

$$= 10^{80000} (10^{40000} - 3) + 3(10^{40000} - 3) + 8 =$$

$$= \underbrace{999\dots 9}_{39999} \underbrace{70000\dots 0}_{80000} + \underbrace{3000\dots 00}_{40000} - 1 =$$

$$= \underbrace{999\dots 9}_{39999} \underbrace{70000\dots 0}_{80000} + \underbrace{2999\dots 9}_{40000}$$

$$\text{Умно: } 39999 + 40000 = 79999$$

$$\text{Ответ: } \underline{79999}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

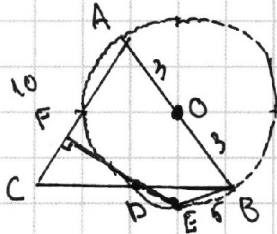
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

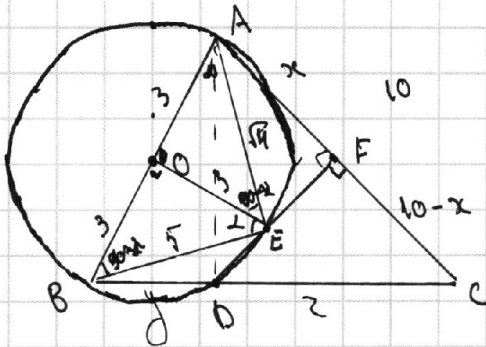


В $\triangle ABC$ $\omega \cap BC = D$ $DF \perp AC$ $F \in AC$
 $AC = 10$ $AB = 6$ $BE = 5$ $AF = ?$

$$1/r = \frac{AB}{2} = 3$$

$\angle AEB = 90^\circ$ (опирается на диаметр)

2) По т. Птолемея $BO^2 + OE^2 = 2 \cos \angle BOE$
 $OE^2 + BE^2 - 2 \cos \angle OEB \cdot OE \cdot BE = BO^2$
 $9 + 25 - 2 \cos \angle 2 \cdot 15 = 9$ $\cos \angle 2 = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$
 $2 \cos \angle 2 \cdot 15 = 25$
 $AE^2 = AB^2 - BE^2 = 6^2 - 5^2 = 36 - 25 = 11$
 $AE = \sqrt{11}$



$$36 - y^2 = 100 - z^2 \quad z^2 = 64 + y^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

x коробок в 3 ящика по шарикам

1) Может угадать на 5 коробок

Всего вариантов выбрать 5 коробок: $C_x^5 = \frac{x!}{5! \cdot (x-5)!}$

Варианты с 3 коробками с шариками: $A_3^3 = 3 \cdot 2 \cdot 1$

$C_{x-3}^2 = \frac{(x-3)!}{2! \cdot (x-5)!}$, т.е. общее число вариантов выбора 5 коробок без повторов; варианты с 3 коробками - число выбора двух оставшихся коробок (3 шариками с шариками)

$$P(5) = \frac{C_{x-3}^2}{C_x^5} = \frac{\frac{(x-3)!}{2! \cdot (x-5)!}}{\frac{x!}{5! \cdot (x-5)!}} = \frac{(x-3)! \cdot 5! \cdot (x-5)!}{x! \cdot 2! \cdot (x-5)!} = \frac{(x-3)! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{x! \cdot 2} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{x(x-1)(x-2)} = \frac{60}{x(x-1)(x-2)}$$

2) Может угадать на 6 коробок

Всего вариантов выбрать 6 коробок: $C_x^6 = \frac{x!}{6! \cdot (x-6)!}$

Варианты с 3 коробками с шариками: $C_{x-3}^3 = \frac{(x-3)!}{3! \cdot (x-6)!}$

$$P(6) = \frac{C_{x-3}^3}{C_x^6} = \frac{\frac{(x-3)!}{3! \cdot (x-6)!}}{\frac{x!}{6! \cdot (x-6)!}} = \frac{(x-3)! \cdot 6! \cdot (x-6)!}{3! \cdot (x-6)! \cdot x!} = \frac{(x-3)! \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(x-3)! \cdot (x-2)(x-1) \cdot x \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{(x-2)(x-1) \cdot x} = \frac{120}{x(x-1)(x-2)}$$

$$\frac{P(6)}{P(5)} = \frac{C_{x-3}^3 \cdot C_x^5}{C_x^6 \cdot C_{x-3}^2} = \frac{\frac{120}{x(x-1)(x-2)}}{\frac{60}{x(x-1)(x-2)}} = 2$$

Ответ: в два раза



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$q = 6 - 9\sqrt{37} \quad d = 2\sqrt{37}$$

Ответ:

$$x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0 \quad x_1 = q + 4d \quad x_2 = q + 5d \quad \underline{a = 4}$$

$$4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0 \quad x_3 = q + 2d \quad x_4 = q + 7d$$

$$1) (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2 = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 =$$

$$= x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 \Rightarrow \underline{a^2 - a = x_1 + x_2} \quad \underline{a - 5 = x_1x_2}$$

$$4(x - x_3)(x - x_4) = 4x^2 - 4x_4x - 4x_3x + 4x_3x_4 =$$

$$= 4x^2 - 4(x_3 + x_4)x + 4 \cdot x_3x_4 = 4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 \Rightarrow$$

$$\underline{a^3 - a^2 = 4(x_3 + x_4)} \quad \underline{2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 4 \cdot x_3 \cdot x_4} \quad \text{Умножив: } x_1 = (6 - 9\sqrt{37}) + 4 \cdot 2\sqrt{37}; x_2 = (6 - 9\sqrt{37}) + 5 \cdot 2\sqrt{37};$$

$$2) x_1 + x_2 = 2q + 9d = x_3 + x_4 = 2q + 9d \Rightarrow$$

$$(a^2 - a) = \frac{a^3 - a^2}{4}$$

$$a(a^2 - 5a + 4) = 0$$

$$a^3 - a^2 = 4a^2 - 4a \quad a^3 - 5a^2 + 4a = 0$$

(попробуем предположить, что $a \in \mathbb{Z}$ и $a \neq 0$)

1. Если $a = 0$, то $x^2 - 5 = 0 \quad x = \pm\sqrt{5} \quad 4x^2 - 4 = 0 \quad x = \pm 1$
 $-\sqrt{5}; -1; 1; \sqrt{5}$ — не подходит (разные корни)

2. Если $a^2 - 5a + 4 = 0 \quad D = 25 - 16 = 9 \quad a = \frac{5 \pm 3}{2} = 4; 1$

Если $a = 1$, то $x^2 - (1^2 - 1)x + 1 - 5 = x^2 - 4 = 0 \quad x = \pm 2$
 $4x^2 - (1^3 - 1^2)x + 2 \cdot 1^4 + 2 \cdot 1^2 - 1^6 - 4 =$
 $= 4x^2 - 1 = 0 \quad x = \pm 0,5$ — не подходит

$x_1 = q + 4d = -2 \quad x_2 = q + 5d = 2$ или наоборот, но $d = 4; -4$

а м.р. $x_3 = q + 2d = -0,5 \quad x_4 = q + 7d = 0,5$ такой вариант

или $x_3 < x_1 < x_2 < x_4$ или $x_3 > x_1 > x_2 > x_4$ — не подходит

3. Если $a = 4$, то $x^2 - 12x - 1 = 0 \quad D = 144 + 4 = 148 \quad x = \frac{12 \pm \sqrt{148}}{2} = 6 \pm \sqrt{37}$

$$4x^2 - 48x + 2 \cdot 256 + 2 \cdot 16 - 4^6 - 4 = 0$$

$$x^2 - 12x + 128 + 8 - 1024 - 1 = x^2 - 12x - 889 \quad D = 144 + 3556 = 3700$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{3700}}{2} = 6 \pm 5\sqrt{92.5}$$

Ответ: $a = 4$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

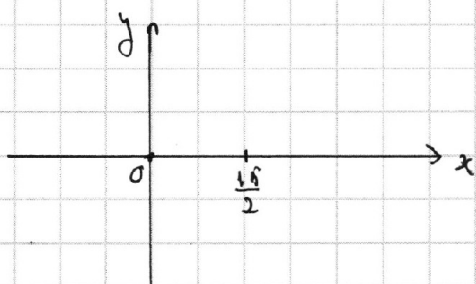
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$(x; y)$

$$\left| x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| + \left| x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| \leq 3 \quad \pi$$

Получим симметричный квадрат $(x; y)$

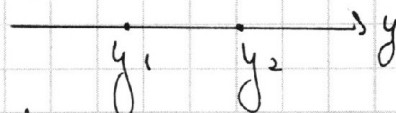
$$\left| x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| + \left| x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| \leq 3$$



Если $x < \frac{15}{2}$: $x = \frac{15}{2} - y \cdot \frac{1}{6\sqrt{3}}$

$y_2 = \left(x - \frac{15}{2} \right) \cdot 6\sqrt{3}$ $y_1 = -y_2$

При $x \geq \frac{15}{2}$



Иначе:

Если $x \geq \frac{15}{2}$

1. $y \geq \left(x - \frac{15}{2} \right) \cdot 6\sqrt{3}$
 $\geq 6\sqrt{3}x - 45\sqrt{3}$

$$\left(x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \right)^2 + 2 \left| x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| + \left(x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \right)^2 \leq 9$$

$a = x - \frac{15}{2}$ $b = \frac{y}{6\sqrt{3}}$ $(a+b)^2 + 2|a+b| + (a-b)^2 \leq 9$

$$= a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 + 2|a+b| + (a-b)^2 =$$

$$= 2(a^2 + b^2 + |a+b| + |a-b|) \leq 9$$

$a \geq -b$ $a \geq b$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

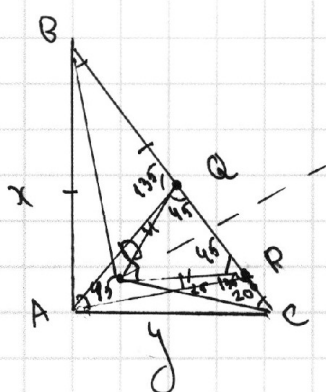
5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} \triangle ABC \quad \angle A = 90^\circ \quad P, Q \in BC \\ AB = BP \quad AC = CQ \quad DP = DQ \\ \angle PDQ = 90^\circ \quad \angle DCB = 20^\circ \\ \angle DBC = ? \end{aligned}$$

1) Пусть $AB = x$, $AC = y$, тогда

$$BC^2 = x^2 + y^2 = (x + y - QP)^2$$

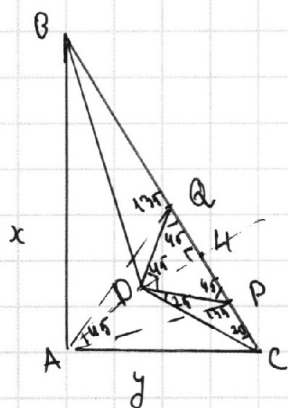
$$QP = x + y \quad x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + QP^2 + 2xy - 2xQP - 2yQP$$

$$QP^2 - QP(2x + 2y) + 2xy = 0$$

$$D = 4x^2 + 4y^2 - 8xy - 8xy = 4(x^2 - 4xy + y^2)$$

$$QP = \frac{2x + 2y + \sqrt{x^2 - 4xy + y^2}}{2} = x + y + \sqrt{x^2 - 4xy + y^2}$$

2) Пусть $\angle CQA = \angle QAC = \alpha$; $\angle BAP = \angle BPA = \beta$, тогда $\angle QAP = 180 - 2\beta$,
 $\angle BAP + \angle QAC - \angle QAP = 90^\circ \quad \beta + \alpha - (180 - 2\beta) = 90^\circ$
 $2\alpha + 2\beta = 270 \quad \alpha + \beta = 135^\circ \Rightarrow \angle QAP = 45^\circ$
 $\angle RDC = \angle BQA = \angle DPC = 135^\circ \Rightarrow \angle RDC = 25^\circ$



Можно заметить, что D - центр описанной окружности $\triangle AQP$, т.е.
 $\angle QDP = 2\angle QAP = 90^\circ \Rightarrow QD = DP = AD$
 (радиусы) $\angle QP = 90^\circ$, $\angle QPA = 135^\circ$
 $\angle ADC = 110^\circ$

$$180 - (110 + 20) = 90 - 20 = \angle DAC, \text{ если } \angle QCA = 20^\circ$$

$$\angle BAP = 90 - (90 - 20) = 20^\circ \quad DH \perp BC \Rightarrow \angle HPC = 45^\circ$$

ADQB:

$$135 + 135 + 2 + (90 - 2) = 360^\circ$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (x + y + \sqrt{x^2 - 4xy + y^2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\angle RDC = 25^\circ$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

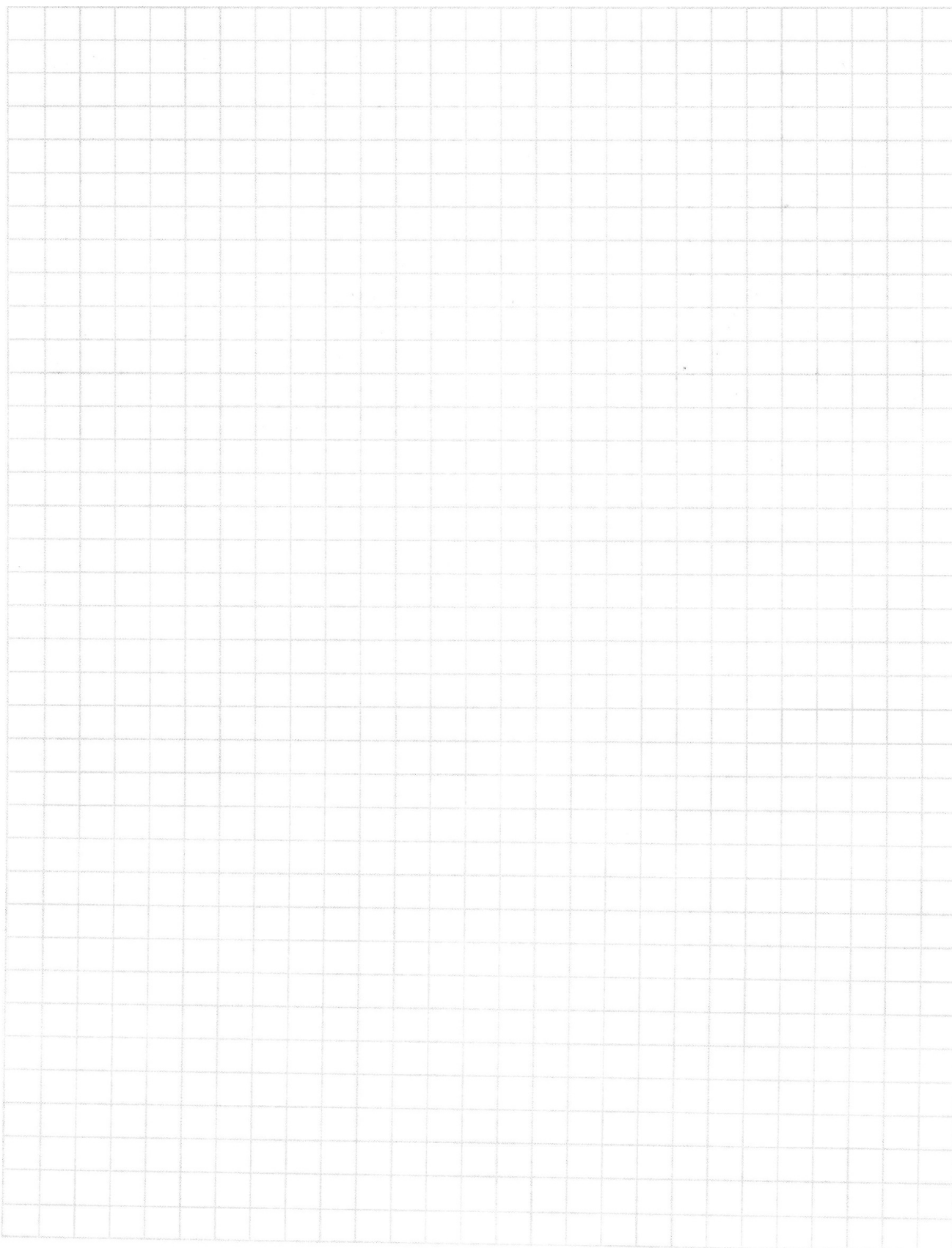
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

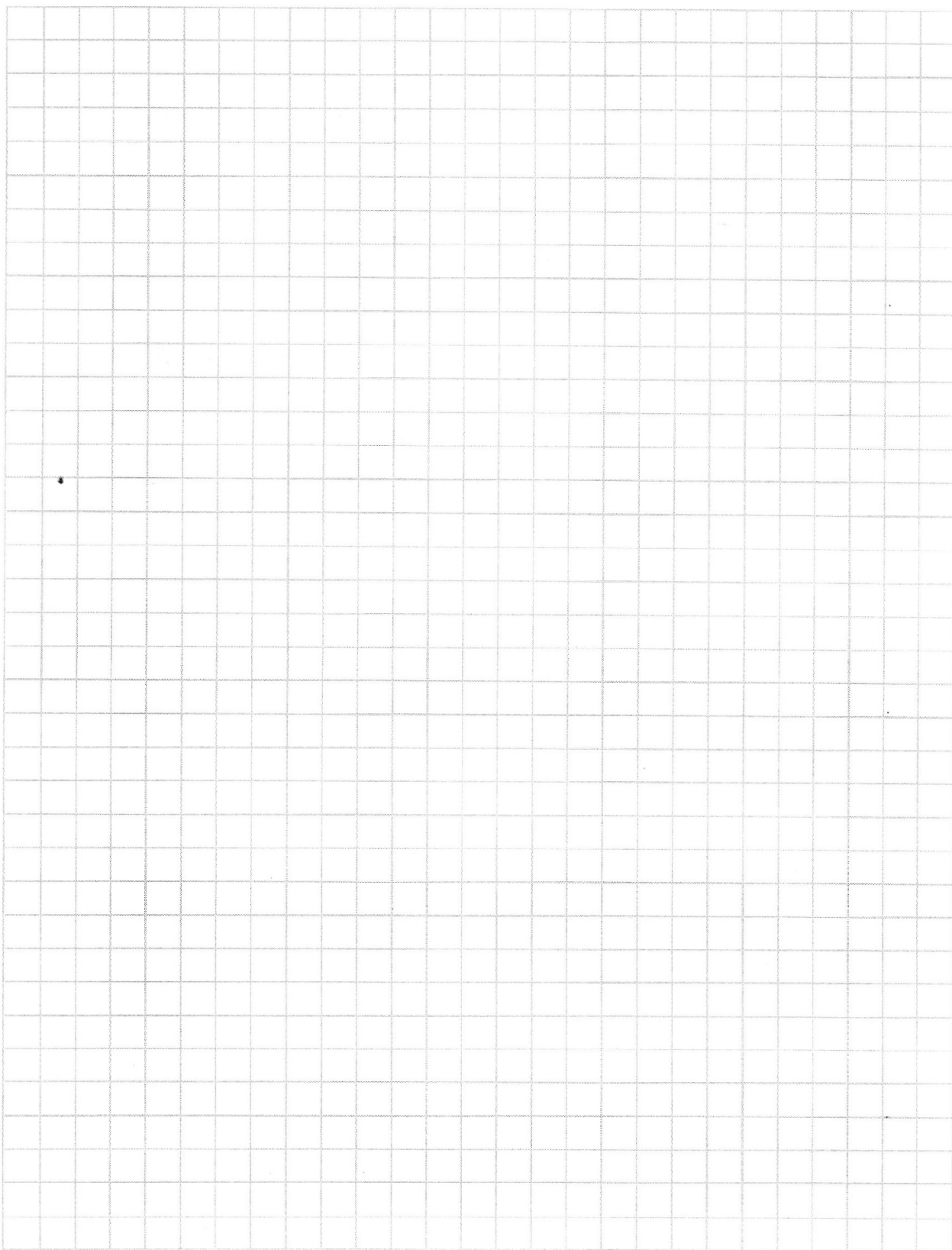
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☒

3
☒

4
☒

5
☒

6
☒

7
☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \times 11111 \\ 11111 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2 + 6x + 9 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 6(x + y + z) + 27 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2(xy + yz + zx) + 27 \\ \times 11111 \\ 11111 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$n \ 9999 \dots 9$$

$$9 \cdot \overbrace{111 \dots 1}^{40000}$$

$$-2 \cdot 1 = -6 + 4 +$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \quad 11 \quad 121 \quad 111 \\ \times 111 \\ \hline 111 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -2 = -6 + 4 + \times 111 \\ \times 111 \\ \hline 111 \end{array}$$

$$4 = 3 + 1 \quad \begin{array}{r} \times 12321 \\ 12321 \\ \hline 12321 \end{array}$$

$$2x^2 + 6x + 2yz \quad \begin{array}{r} 1 \ 3 \ 6 \ 7 \ 6 \ 3 \ 1 \\ \times 12321 \\ \hline 12321 \end{array}$$

$$\begin{cases} 2xy = 6z + 2z^2 \\ 2yz = 6x + 2x^2 \\ 2zx = 6y + 2y^2 \end{cases}$$

$$x, y, z \neq 0$$

$$2xy + 2yz + 2zx = 2z^2 + 2x^2 + 2y^2 + 6z + 6x + 6y$$

$$(2x - x)^2 + (2 - y)^2 + (x - y)^2 = -6(x + y + z)$$

$$2(x + y + z)^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4xy + 4yz + 4xz + 6(x + y + z)$$

$$2(x + y + z)^2 = 4xy + 4yz + 4xz + 6xy + 6xz + 6yz - 6x - 6y - 6z$$

$$(x + y + z)(2x + 2y + 2z + 6) = 6xy + 6xz + 6yz$$

$$(x + y + z)(x + y + z + 6) = 3xy + 3xz + 3yz$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 121 \\ 121 \\ \hline 121 \end{array}$$

$$(x + 3)^2 + x^2 = 2yz + 9 \quad (x - x + y)(x + x - y) + (y - y + z)(y + y - z) +$$

$$(x + 3)^2 = 9 - x^2 + 2yz + 2((z - y + 2)(z + y - 2) = y(2x - y) +$$

$$(y + 3)^2 = 9 - y^2 + 2xz + 2(2y - 2) - y(2z - y)$$

$$27 - x^2 - y^2 - z^2 + 2yz + 2xz + 2xy = x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 6y + 6z$$

$$x^2 - z^2 + 3x - 3z = y(z - x) \quad 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = -6(x + y + z)$$

$$(x - y)(x + y + 3) + y(z - x) + y(z - x) + y(z - x) = -6(x + y + z)$$