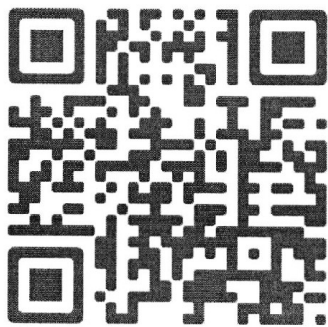




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1./ [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2./ [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?

3./ [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.

4./ [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?

5./ [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.

6./ [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leq 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура Φ при этом повороте.

7./ [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 & (1) \\ yz = 3x + x^2 & (2) \\ zx = 3y + y^2 & (3) \end{cases}$$

Ответ: 18

$$(1) - (2) = 3z + z^2 - 3x - x^2 = xy - yz; \quad z^2 - x^2 + 3z - 3x - xy + yz = (z - x) \cdot$$

$$(x + y + z + 3) = 0; \quad \text{либо } z = x, \text{ либо } x + y + z + 3 = 0.$$

Если $x + y + z + 3 = 0$, то посмотрим на выражение $(x + y + z + 6)^2 =$
 $x^2 + y^2 + z^2 + 36 + 12x + 12y + 12z + 2xy + 2xz + 2yz$; Пользуясь (1), (2), (3)

получим: $(xy + xz + yz) \cdot 2 = (x^2 + z^2 + y^2 + 3x + 3y + 3z) \cdot 2$. Тогда наше

выражение: $(x + y + z + 6)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 12x + 12y + 12z + 36 + 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 +$
 $6x + 6y + 6z = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 18x + 18y + 18z + 36$.

Так как $x + y + z + 3 = 0$, то $x + y + z + 6 = 3$, то есть $(x + y + z + 6)^2 = 9$

Тогда $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 18x + 18y + 18z + 36 = 9$, т.е. $(x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 6y + 6z) = 27$

$(x + 3)^2 + (y + 3)^2 + (z + 3)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 6y + 6z + 27$. Мы знаем,

что $x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 6y + 6z = 27 \Rightarrow (x + 3)^2 + (y + 3)^2 + (z + 3)^2 = 27 - \frac{27}{3} =$

$\frac{54}{3} = 18$. Если же $z = x$, то по (2) имеем: $yx = 3x + x^2$ т.к. $x \neq 0$

$y = x + 3$, по (3) имеем: $x^2 = 3(x + 3) + (x + 3)^2 = x^2 + 9x + 18$; $9x = -18$

$x = -2 = z$, $y = x + 3 = 1$; тогда x, y, z подходит под систему:

$2 \cdot 1 = 3 \cdot 2 + (-2)^2 \quad (-2)(-2) = 3 \cdot 1 + 1$. Ну а тогда $(x + 3)^2 + (y + 3)^2 + (z + 3)^2 = 1^2 + 4^2 + 1^2 =$

18. Ответ: 18, получается при $x = z = -2$, $y = 1$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2

Раз шло светит из ~~40000~~ деревьев, то это $10^{40000} - 1$; положим $k = 40000$ для удобства, тогда

$$n^3 = (10^k - 1)^3 = 10^{3k} - 3 \cdot 10^{2k} + 3 \cdot 10^k - 1$$

$$n^3 + 1 = 10^k (10^{2k} - 3 \cdot 10^k + 3); \quad 10^{2k} - 3 \cdot 10^k \leftarrow \text{вызтем "столбиком"}$$

$$\begin{array}{r} \cdot 999 \quad 10 \\ 1000 \quad 0000 \quad 0 \\ - 3000 \quad 0 \\ \hline 999 \quad 970 \quad 000 \end{array}$$

$k \quad k \quad k$

$$\text{то есть } 10^{2k} - 3 \cdot 10^k + 3 =$$

$$\begin{array}{r} 999 \quad 970 \quad 003 \\ \hline \end{array}$$

$k \quad k \quad k$

$$\text{Тогда } (10^{2k} - 3 \cdot 10^k + 3) \cdot 10^k = \begin{array}{r} 999 \quad 970 \quad 003 \quad 00 \quad 0 \\ \hline \end{array}$$

$k \quad k \quad k \quad k$

$$(10^{2k} - 3 \cdot 10^k + 3) \cdot 10^k - 1 \leftarrow \text{вызтем "столбиком" :}$$

$$\begin{array}{r} \cdot 999 \quad 10 \\ 999 \quad 970 \quad 003 \quad 00 \quad 0 \\ - 1 \\ \hline 999 \quad 970 \quad 002 \quad 999 \quad 9 \end{array}$$

$k \quad k \quad k \quad k$

$$\text{То есть наше итоговое число } n^3 \text{ — это } \begin{array}{r} 9 \quad 970 \quad 029 \quad 9 \\ \hline \end{array}$$

$k-1 \quad k \quad k$

как видно, в нём $2k-1$ девяток, значит

$$\text{ответ } 2 \cdot 40000 - 1 = \underline{79999}$$

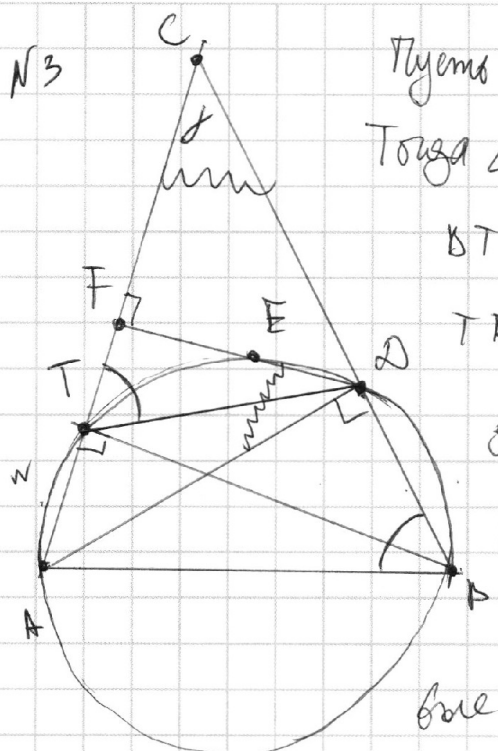


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть w пересечет AC в точке T
Тогда $\angle ATD = 90^\circ$ т.к. AB - диаметр и
 $BT \perp AC$, $DE \perp AC \Rightarrow DE \parallel BT$ и
 $TE \parallel DB$ - лемма 1 окружности и,
значит $TEDB$ - равнобедренная
трапеция (или $TEDB$) и имеет
 $TD = EB$ (это будут либо равно-
бокой трапеции) То есть $TD = EB = 6$. Раз $ATDB$ - вписан-
ный, то $\angle CTD = \angle CBA$. Тогда $\triangle CTD \sim \triangle CBA$ по 2
углам $\angle CTD = \angle CBA$, $\angle TCD = \angle ACB$. Значит:
 $\frac{TD}{AB} = \frac{CT}{BC} = \frac{5}{6}$. $\triangle BTC$ - прямоугольный с прямым углом T
значит если $\angle TCB = \alpha$, то $\sin \alpha = \cos \alpha = \frac{TC}{BC} = \frac{5}{6}$
Тогда $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{11}}{6}$ $AD = AC \cdot \sin \alpha$ т.к.
 ADC - прямоугольный с прямым углом D т.к. $\angle ADB = 90^\circ$
из-за того, что AB - диаметр. $AD = 10 \cdot \frac{\sqrt{11}}{6} = \frac{5\sqrt{11}}{3}$.
 $\angle FAD = 90^\circ$ $\angle CDF = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$. $AF = AD \cdot \sin \alpha$ т.к. ADF -
прямоугольный с прямым углом F . $AF = \frac{5\sqrt{11}}{3} \cdot \frac{\sqrt{11}}{6} = \frac{55}{18}$

Ответ: $\frac{55}{18}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть n всего было и коробок. Посчитаем вероятность того, что игрок отырав 5 коробов победил. Всего способов выбрать 5 коробов из n это C_n^5 (где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ - число сочетаний) Если же из выбранных 5 коробов 3 должны быть фиксированными (те в которых нет шариков), то количество таких коробов это C_{n-3}^2 (количество способов выбрать 2 оставшиеся коробки из всех кроме 3 где нет шариков) Тогда вероятность победы при выборе 5 коробов:

$\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}$ Если же выбираются 6 коробов, то по аналогичным рассуждениям всего способов выбрать 6 коробов C_n^6 , способов выбрать 6 коробов среди которых может быть 3 с шариками C_{n-3}^3 (теперь уже надо добирать 3 шарика, а не 2) То есть вероятность победы при выборе 6 коробов: $\frac{C_{n-3}^3}{C_n^6}$. Нужно умножить:

$$\frac{C_{n-3}^3}{C_n^6} : \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{(n-3)(n-4)(n-5) \cdot 6!}{3! \cdot n(n-1) \cdot (n-5)} \cdot \frac{n(n-1) \cdot (n-4) \cdot 2!}{(n-3)(n-4) \cdot 5!} =$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^2(n-4)^2(n-5) \cdot 6! \cdot 2!}{n(n-1)(n-2)(n-3)^2(n-4)^2(n-5) \cdot 3! \cdot 5!} = \frac{6! \cdot 2!}{3! \cdot 5!} = 2$$

Ответ: увеличится в 2 раза



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0 \quad N^5$$

Пусть корни этого уравнения это $p+4q$ и $p+5q$ (где $p, p+4q, p+5q, \dots, p+nq, \dots$ — арифметическая прогрессия из условия).

$$4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0 \quad \text{— корни этого уравнения}$$

$$\text{это } p+2q, p+7q.$$

$$\text{Сумма корней 1 уравнения это } p+4q + p+5q = 2p+9q,$$

с другой стороны по т. Виета это $a^2 - a$, то есть:

$$a^2 - a = 2p + 9q. \text{ Аналогично во 2 уравнении по теореме}$$

$$\text{Виета } p+2q + p+7q = \frac{a^3 - a^2}{4} = 2p + 9q. \text{ То есть:}$$

$$a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{4} = 2p + 9q; \quad 4a^2 - 4a = a^3 - a^2; \quad a^3 - 5a^2 + 4a = 0$$

$$a(a^2 - 5a + 4) = 0; \quad a(a-1)(a-4) = 0. \text{ То есть } a=0 \text{ или } a=1$$

$$\text{или } a=4.$$

$$\text{Если } a=0, \text{ то 1 уравнение: } x^2 - (0-0)x + 0-5 = 0$$

$$x^2 - 5 = 0 \quad x = \sqrt{5} \text{ или } x = -\sqrt{5}$$

$$2 \text{ уравнение: } 4x^2 - (0-0)x + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 0 - 4 = 0$$

$$4x^2 - 4 = 0; \quad x^2 - 1 = 0; \quad x = -1 \text{ или } x = 1$$

$$\text{То есть: } |\sqrt{5} + \sqrt{5}| = |p+4q - p-5q| = |q|, \quad |q| = |2\sqrt{5}|, \text{ с другой}$$

$$\text{стороны } |1+1| = |p+2q - p-7q| = |5q|, \quad |q| = \left|\frac{2}{5}\right| \text{ противоречие.}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если $a=1$, то 1 уравнение: $x^2 - (1^2-1)x + 1-5=0$

$$x^2 - 4 = 0 \quad x = -2 \text{ или } x = 2$$

Второе уравнение: $4x^2 - (1^3-1^2)x + 2 \cdot 1^4 + 2 \cdot 1^2 - 1^6 - 4 = 0$

$$4x^2 - 1 = 0 \quad x = -\frac{1}{2} \text{ или } x = \frac{1}{2}$$

$|p+4q - p-5q| = |-2-2| \Rightarrow |q| = |4|$, с другой стороны

из 2 уравнения: $|p+2q - p-7q| = |\frac{1}{2} + \frac{1}{2}| \Rightarrow |5q| = 1 \Rightarrow |q| = \frac{1}{5}$, противоречие

Если $a=4$, то 1 уравнение: $x^2 - (4^2-4)x + 4-5=0$

$$x^2 - 12x - 1 = 0 \quad D = 144 + 4 = 148$$

$$\text{Корни: } \frac{12 \pm \sqrt{148}}{2} = \frac{12 \pm 2\sqrt{37}}{2} = 6 \pm \sqrt{37}$$

Второе уравнение: $4x^2 - (4^3-4^2)x + 2 \cdot 4^4 + 2 \cdot 4^2 - 4^6 - 4 = 0$

$$x^2 - (4^2-4)x + 2 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4 - 4^5 - 1 = 0$$

$$x^2 - 12x + 128 + 8 - 1024 - 1 = 0; \quad x^2 - 12x - 889 = 0$$

$$D = 144 + 4 \cdot 889 = 4(36 + 889) = 4 \cdot 925$$

$$\text{Корни: } \frac{12 \pm \sqrt{925}}{2} = 6 \pm \sqrt{925}$$

Из 1 уравнения: $|p+4q - p-5q| = |6-\sqrt{925} - 6-\sqrt{925}|; |q| = |2\sqrt{925}|$

Из 2 уравнения: $|p+2q - p-7q| = |6+\sqrt{925} - 6+\sqrt{925}|; |5q| = |2\sqrt{925}|$

$$|q| = |2\sqrt{925}| = |2\sqrt{925}| = \frac{2 \cdot 5 \cdot \sqrt{37}}{5} = |2\sqrt{37}| \quad p+2q = 6 - 5\sqrt{37} \Rightarrow$$

$p = 6 - 9\sqrt{37} \quad q = 2\sqrt{37}$, такая профессия порождает потому что:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p+4q = 6 - 9\sqrt{37} + 4 \cdot 2\sqrt{37} = 6 - \sqrt{37} \quad \text{--- корни 1 уравнения}$$

$$p+5q = 6 - 9\sqrt{37} + 5 \cdot 2\sqrt{37} = 6 + \sqrt{37}$$

$$p+2q = 6 - 9\sqrt{37} + 2 \cdot 2\sqrt{37} = 6 - 5\sqrt{37} \quad \text{--- корни 2 уравнения}$$

$$p+7q = 6 - 9\sqrt{37} + 7 \cdot 2\sqrt{37} = 6 + 5\sqrt{37}$$

Итак, получается, что $a=0$, $a=1$ не подходит,

$a=4$ - подходит

Ответ: $a=4$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

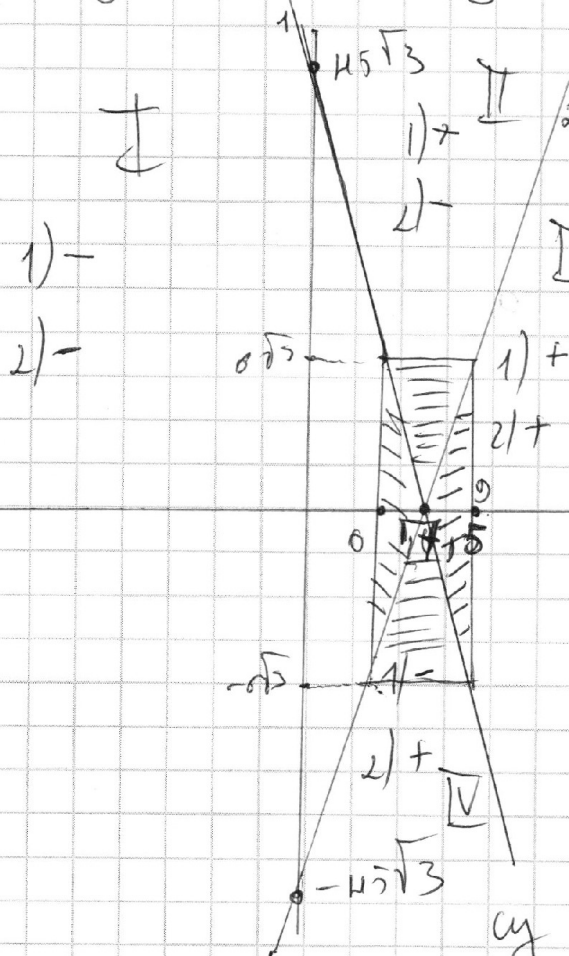
7
☐

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Начертим прямые $x - \frac{15}{2} + \frac{y}{\sqrt{3}} = 0$ и $x - \frac{15}{2} - \frac{y}{\sqrt{3}} = 0$

т.е. $y = -x\sqrt{3} + 4\sqrt{3}$ и $y = x\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$:



Заметим, что обе эти прямые проходят через точку $(7.5; 0)$ и 1 прямая проходит через $(0; 4\sqrt{3})$, а 2

прямая через $(0; -4\sqrt{3})$

Эти прямые делят координатную плоскость на 4 части в каждой

из которых значения

$x - \frac{15}{2} + \frac{y}{\sqrt{3}}$ и $x - \frac{15}{2} - \frac{y}{\sqrt{3}}$ положительны или

отрицательны, обозначим их как 1) и 2)

соответственно и поставим + если значение положи-
тельно, - если значение отрицательно. Т.к

оба значения при $x=0$ отрицательны то в 1 части



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) - 2) - В I и IV части 1) -, а во II и III части 1) +. Аналогично в I и II части 2) -, а в III и IV части 2) +.

Если 1) + 2) + то значение $|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{\sqrt{3}}| + |x - \frac{15}{2} - \frac{y}{\sqrt{3}}|$

$$\text{то } x - \frac{15}{2} + \frac{y}{\sqrt{3}} + x - \frac{15}{2} - \frac{y}{\sqrt{3}} \leq 3$$

$$2x - 15 \leq 3 \Rightarrow x \leq 9, \text{ то есть подходит в}$$

этой части $x \leq 9$

Если 1) - 2) -, то $|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{\sqrt{3}}| + |x - \frac{15}{2} - \frac{y}{\sqrt{3}}| =$

$$\frac{15}{2} - x - \frac{y}{\sqrt{3}} - x + \frac{15}{2} + \frac{y}{\sqrt{3}} \leq 3; \quad 15 - 2x \leq 3 \text{ т.е. } x \geq 6$$

Если 1) + 2) -, то $|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{\sqrt{3}}| + |x - \frac{15}{2} - \frac{y}{\sqrt{3}}| =$

$$x - \frac{15}{2} + \frac{y}{\sqrt{3}} - x + \frac{15}{2} + \frac{y}{\sqrt{3}} \leq 3$$

$$y \leq \sqrt{3}$$

Если 1) - 2) +, то $|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{\sqrt{3}}| + |x - \frac{15}{2} - \frac{y}{\sqrt{3}}| = \frac{15}{2} - x - \frac{y}{\sqrt{3}} +$

$$x - \frac{15}{2} - \frac{y}{\sqrt{3}} \leq 3 \Rightarrow y \geq -\sqrt{3}$$

В итоге получаеме прямоугольник с координатами $(6; -\sqrt{3})$ $(9; \sqrt{3})$ $(5; \sqrt{3})$ $(6; -\sqrt{3})$ которого закрашена внутренность - множество наших точек подходящих под условие.

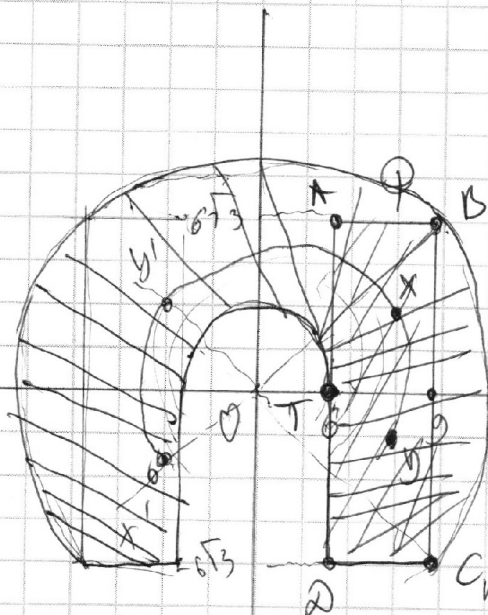


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
3 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Замечая, что траектория точки X при повороте на π представляет собой дугу с центром в O и радиусом OX .

Тогда если взять пару симметричных отн. оси Ox точек X и Y принадлежащих прямоугольнику P то они образуют

2 траектории в виде 2 полуокружностей через O которые закончатся в x' и y' где x', y' — отражения X и Y отн. O . То есть пара точек X и Y заменит дугу $YXY'X'$ так как $OX = OY$ и X и Y симметричны отн. оси Ox . Тогда поворот заметит фигуру закрашенную на рисунке. У большой дуги радиус это OX у маленькой OT т.к. T — ближайшая точка P от источника O , — самая дальняя точка P отн. O . Перечеркнем картинку, (или на след. стр.)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

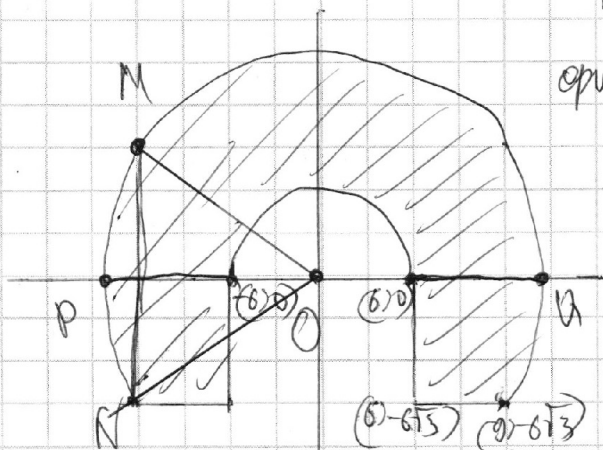
5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
и из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Разделим нашу полувыпуклую фигуру на 3 части прямой OX . Посчитаем площадь

Клоуза верхней полукруга,

$$\text{это } \frac{\pi R^2}{2} - \frac{\pi r^2}{2} \text{ где}$$

R - радиус большой дуги

r - радиус малой дуги

$$R = \sqrt{9^2 + (6\sqrt{3})^2} = \sqrt{81 + 96} = \sqrt{177}$$

$$r = 6 \quad \text{Тогда } \frac{\pi}{2}(R^2 - r^2) = \frac{(177 - 36) \cdot \pi}{2} = \frac{141\pi}{2}$$

Теперь посчитаем площади 2 криволинейных трапеций

которые остались Для этого посчитаем площадь

сектора ONM . Пусть $\angle MON = 2\alpha$, тогда $OM = R$

$$\frac{9}{\sqrt{177}}, \cos \alpha = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{177}} \Rightarrow \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2 \cdot 9 \cdot 6\sqrt{3}}{177} =$$

$$\frac{108\sqrt{3}}{177} = \frac{34\sqrt{3}}{59}$$

$$\text{Тогда } S_{\text{сектора}(ONM)} = \pi R^2 \cdot \frac{\arcsin(\frac{34\sqrt{3}}{59})}{2\pi} = \frac{177 \arcsin(\frac{34\sqrt{3}}{59})}{2}$$

$$\text{Площадь нашей трапеции, это } \frac{S_{\text{сек}(ONM)} - S_{\Delta ONM}}{2} +$$

$$18\sqrt{3} = \frac{177 \arcsin(\frac{34\sqrt{3}}{59})}{2} - 27\sqrt{3} + 18\sqrt{3}$$

$$\text{Тогда ответ: } \frac{141\pi}{2} + \frac{177 \arcsin(\frac{34\sqrt{3}}{59})}{2} - 27\sqrt{3} + 38\sqrt{3}$$

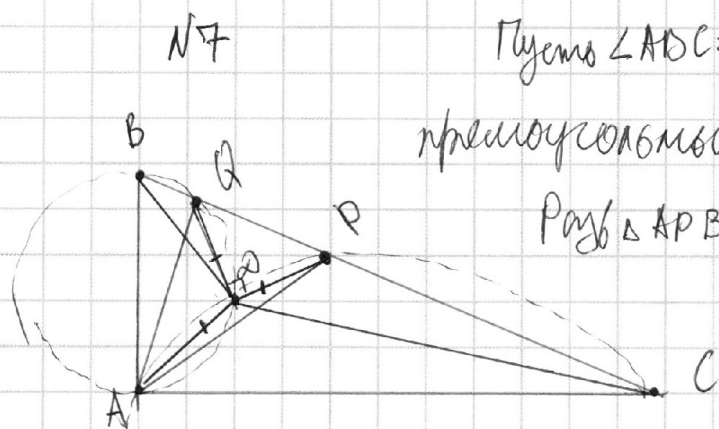


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $\angle ABC = \varphi$, тогда $\triangle ABC$ - прямоугольный, то $\angle ACB = 90 - \varphi$.

Рассмотрим $\triangle APB$, $AP = PB$, то:

$$\angle BPA = \angle BAP = \frac{180 - \angle ABP}{2} =$$

$$90 - \frac{\varphi}{2}.$$

Аналогично в $\triangle QCA$: $\angle AQC = \angle QAC = \frac{180 - \angle QCA}{2} = 45 + \frac{\varphi}{2}$.

$$\angle QAP = \angle BAP + \angle QAC - \angle BAC = 90 - \frac{\varphi}{2} + 45 + \frac{\varphi}{2} - 90 = 45^\circ.$$

Тогда точка Q внутри $\triangle APB$ такова, что $QD = QP$ и

$\angle QDP = 90^\circ = 2 \cdot \angle QAP$. Значит D - центр описанной

окружности $\triangle ACP$. Тогда $\angle ADP = 2 \cdot \angle ACP = 2 \cdot (45 + \frac{\varphi}{2}) =$

$90 + \varphi$, $\angle DCA = 90 - \varphi$ то есть $\angle ADP + \angle DCA = 90 + \varphi +$

$90 - \varphi = 180^\circ \Rightarrow ADPC$ - вписанный. Аналогично

$$\angle AQA = 2 \cdot \angle QPA = 2 \cdot (90 - \frac{\varphi}{2}) = 180 - \varphi, \angle ABQ = \varphi \Rightarrow$$

$\angle AQA + \angle ABQ = \varphi + 180 - \varphi = 180^\circ \Rightarrow AQAB$ - вписанный.

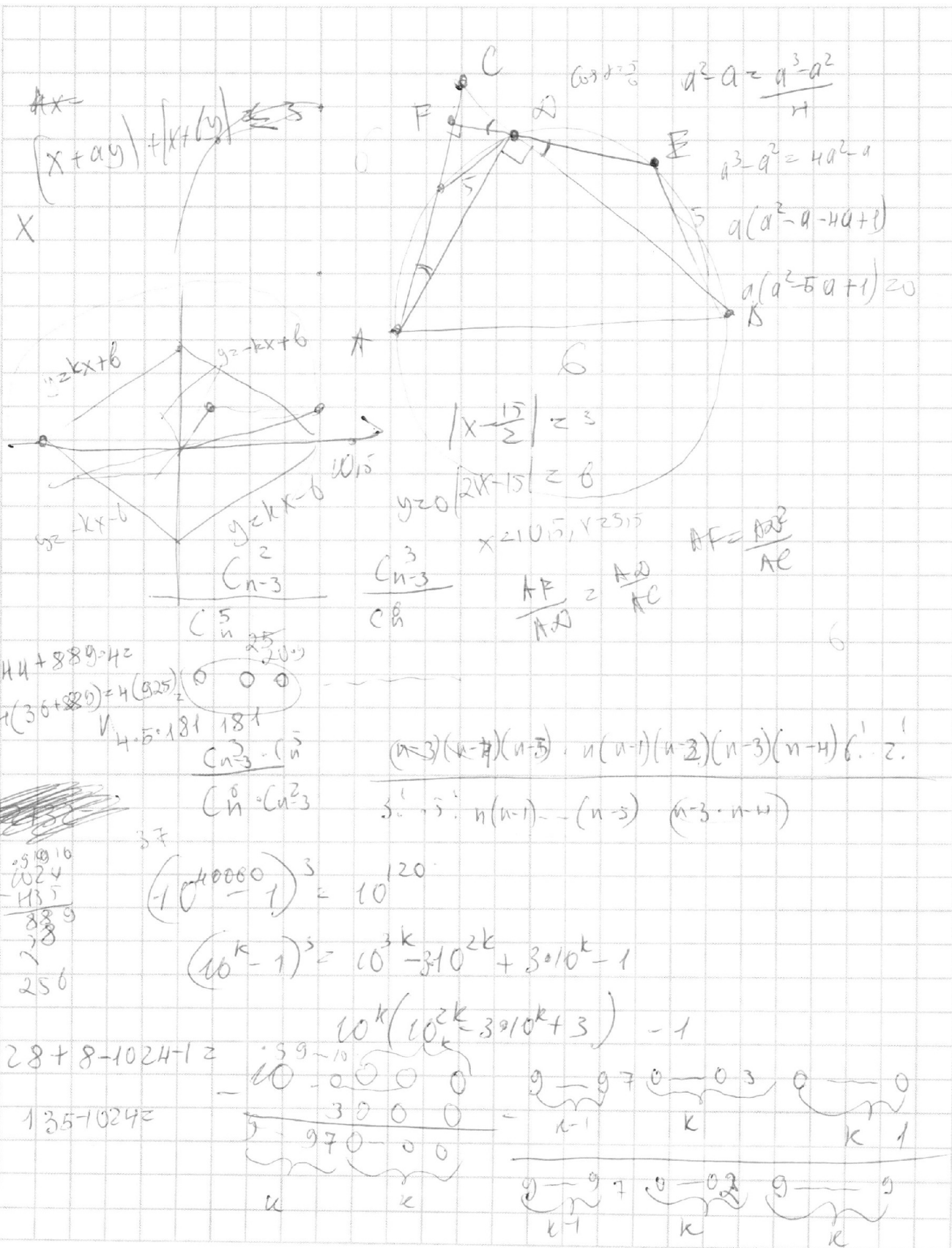
Рассмотрим $\triangle ADP$ - вписанный, то $\angle DCP = \angle DAP = 20^\circ$. Тогда

$$\angle ADP = 180 - 2 \cdot \angle DAP = 140^\circ \Rightarrow \angle AQP = \frac{\angle ADP}{2} = 70^\circ. \text{ так как}$$

D - центр описанной окр. $\triangle ACP$, $\angle AQP = \angle ACP = 45^\circ + \frac{\varphi}{2} = 25^\circ$

$\angle AQP = \angle DAP$ т.к. $AD = DQ$ и по вписанности $AQAB$; $\angle QAD =$

$$\angle QDA = \angle QBC. \angle QAD = 25^\circ \Rightarrow \angle QBC = 25^\circ \text{ Ответ: } 25^\circ$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$xy = 3z + z^2$$

$$yz = 3x + x^2$$

$$y(x-z) = 3(7-x) + (z-x)(7+x) = (z-x)(3+x+z)$$

$$(z-x)(x+y+z-3) = 0$$

10

$$(x+z)y$$

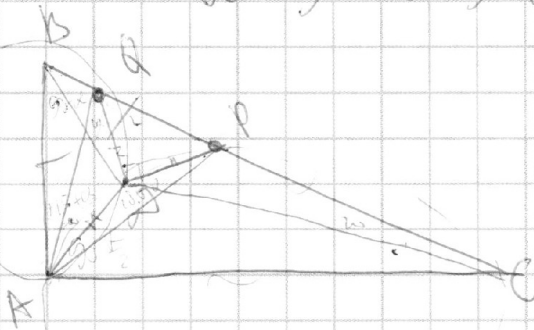
$$x^2 + 6x + 0$$

$$y^2 + 6y + 6$$

$$z^2 + 6z + 5$$

$$2p + 0q = a^2 - a$$

$$(p+4q)(p+5q) = a-5$$



$$z = x$$

$$(x+y+z+6)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 12x + 12y + 12z + 36$$

$$y = 3+x$$

$$2xy + 2xz + 4yz = 6z + 2z^2 + 6x + 2x^2 +$$

$$6y + 2y^2$$

$$x^2 = 3(3+x) + (3+x)^2$$

$$x^2 = 9 + 3x + 9 + 6x + x^2$$

$$3x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 18x + 18y + 18z + 30 = (x+y+z+6)^2$$

$$5x + 18 = 0$$

$$x = -2$$

$$p + 4q$$

$$p$$

$$p+q$$

$$p+2q$$

$$6y + 12$$

$$a^2 + 2a^3$$

$$x^2 - (a^2 - a)x + (a - 5) = 0 \quad \text{корни: } p+4q \quad p+5q$$

$$4x^2 - (a^3 - a^2) + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 \quad p+2q \quad p+7q$$

$$2a^4 a^6 = a^4(2-a^2) + 2(a^2-2) = (a^4-2)(2-a^2) \quad (\sqrt{2}-a)$$

$$(a^2-2)(a^2+2)(a+5)(a-5)$$

$$(a^3 + a\sqrt{2} - \sqrt{2}a^2 - 2)$$

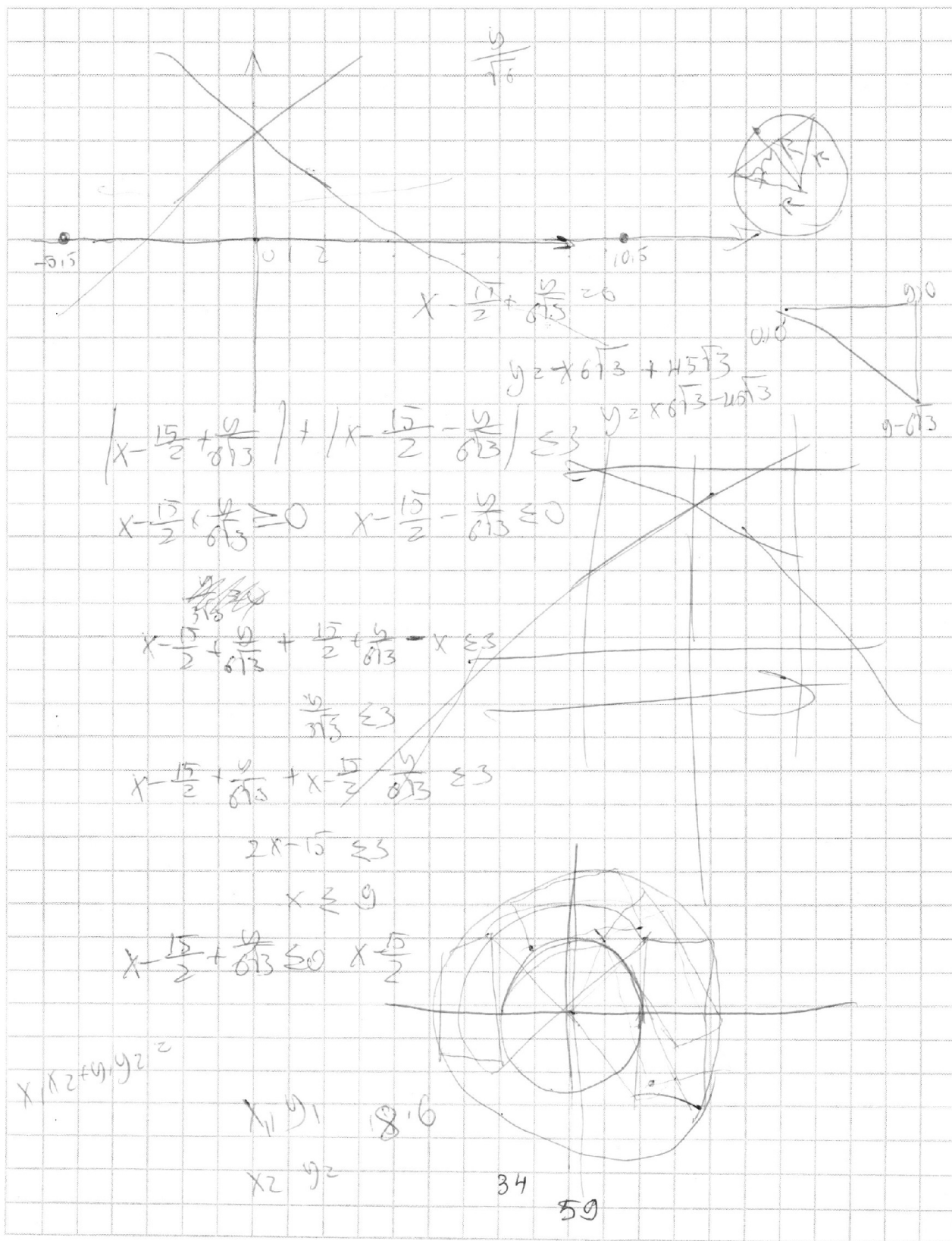


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

