



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 15$, $BE = 10$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$ являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$ являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| + \left|y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leq 6$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle DBC = 35^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2 & (1) \\ yz = 4x + x^2 & (2) \\ xz = 4y + y^2 & (3) \end{cases} \quad \begin{aligned} & xy - yz = 4(z-x) + (z-x)(z+x) \quad (\text{из } (1) - (2)) \\ & (z-x)(4+x+y+z) = 0 \\ & (y-x)(4+x+y+z) = 0 \quad ((2) - (3)) \\ & (y-z)(4+x+y+z) = 0 \quad ((3) - (1)) \end{aligned}$$

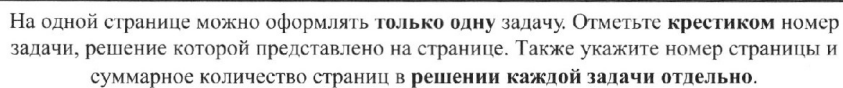
I. Рассмотрим случай, когда x, y, z — разн. числа. Тогда

$$\begin{aligned} x+y+z &= -4 \Rightarrow x+4 = -y-z \Rightarrow (x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = \\ &= (y+z)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = y^2 + z^2 + 2yz + y^2 + 8y + 16 + \\ &+ z^2 + 8z + 16 = 2(y^2 + z^2 + 4y + 4z) + 2yz + 32 = \\ &= 2(xy + xz) + 32 = 2x(y+z) + 32 + 2yz = 2x(-4-x) + \\ &+ 2(4x+x^2) + 32 = -8x - 2x^2 + 8x + 2x^2 + 32 = 32. \end{aligned}$$

II. Если x, y, z — не разн. числа, тогда не допустим $x=y$.
Значит: $\begin{cases} x^2 = 4z + z^2 & (1) \\ xz = 4x + x^2 & (2) \\ xz = 4x + x^2 & (3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 4z + z^2 & (1) \\ x^2 = xz - 4x & (2) \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 4z + z^2 = xz - 4x. \text{ Если } x = y \neq z, \text{ тогда всё ещё } x+y+z = -4, \text{ т. е. ответ будет как в н. I. Тогда } x=y=z. \text{ Тогда } x^2 = 4x + x^2 \Rightarrow x=0 \text{ — не подходит.}$$

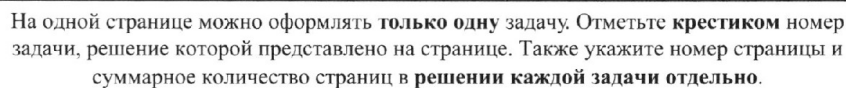
Ответ: 32



СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

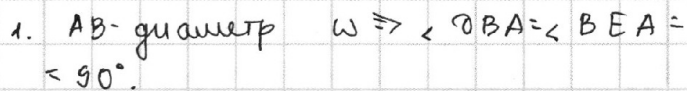
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

0 ml : 45955



СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



2. $\angle F$ - высота в прямоугол. Δ -ке
 $AD \perp BC \Rightarrow \angle F = \sqrt{AF \cdot FC}$

3. По т. Пифагора (Δ BEA):

$$AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{15^2 - 10^2} = 5\sqrt{5}$$

4. Четыр-к $BDEA$ - впис. $\Rightarrow$ в зависимости от расположения F -цы
 $\left. \begin{array}{l} \angle FDC = \angle BAE \\ \angle BEA = \angle DFC = 50^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta BEA \sim \Delta DFC \text{ (по 2-м $\angle$ -ам)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{BE}{FC} = \frac{AE}{DF}$$

$$\frac{10}{FC} = \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{AF \cdot FC}} \Rightarrow 10\sqrt{AF \cdot FC} = 5\sqrt{5}FC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{AF \cdot FC} = \sqrt{5} FC \Rightarrow 2\sqrt{AF} = \sqrt{5} FC \Rightarrow 4AF = 5FC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow EC = \frac{4}{5} AF$$

$$20 = AC = AF + FC = \frac{4}{5}AF + AF = \frac{9}{5}AF$$

$$AF = \frac{100}{9}$$

$$O_{Tb} = \frac{100}{g}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2 - a^3}{3} = 0$$

~~нет~~ корни x_1 и x_2 . ЧУО, $x_1 = b_1 + 3g$; $x_2 = b_1 + 4g$

$$2) 2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$$

~~нет~~ корни x_3 и x_4 . ЧУО, $x_3 = b_1 + g$ $x_4 = b_1 + 6g$

по 1. Виета
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a^2 - a \\ x_3 + x_4 = \frac{a^3 - a^2}{2} \end{cases} \quad x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 2b_1 + 7g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{2} \Rightarrow 2a^2 - 2a = a^3 - a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^3 - 3a^2 + 2a = 0 \Rightarrow a(a-1)(a-2) = 0$$

$$a = 0, a = 1 \text{ и } a = 2$$

I. $a = 0$

~~Ур-е~~ ~~не~~ 1-ое ур-е превращается в $x^2 + \frac{2}{3} = 0$. Нет корней.
 $a = 0$ не подходит.

II. $a = 1$ 1-ое ур-е превращается в $x^2 + \frac{1}{3} = 0$. Нет корней.
 $a = 1$ не подходит

III. $a = 2$ 1) $x^2 - (4-2)x + \frac{2-8}{3} = 0$

$$x^2 - 2x - 2 = 0 \quad D = 4 + 4 \cdot 2 = 12$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$2) 2x^2 - (8-4)x - 2 \cdot 64 - 8 \cdot 2 - 4 = 0$$

$$2x^2 - 4x - 148 = 0$$

$$x^2 - 2x - 74 = 0$$

$$D = 4 + 4 \cdot 74 = 4 \cdot 75 = 300$$

$$x_{3,4} = \frac{2 \pm 10\sqrt{3}}{2} = 1 \pm 5\sqrt{3}$$

Рассмотрим $x_2 - x_1 = g = \pm (1 + \sqrt{3} - (1 - \sqrt{3})) = \pm 2\sqrt{3}$
подходит. Проверим ампл. совместность, где $b_1 = 1 - 7\sqrt{3}$ и $g = 2\sqrt{3}$.
 $x_1 = b_1 + 3g = 1 - \sqrt{3}$; $x_2 = b_1 + 4g = 1 + \sqrt{3}$; $x_3 = b_1 + g = 1 - 5\sqrt{3}$; $x_4 = b_1 + 6g = 1 + 5\sqrt{3}$

Отв: $a = 2$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☒☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left| y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \right| + \left| y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \right| = 6 \quad \text{Возведем обе части в квадрат}$$

$$2y^2 + 2 \cdot 225 + \frac{2 \cdot x^2}{36 \cdot 3} - 60y + 2 \left((y-15)^2 - \frac{x^2}{36 \cdot 3} \right) = 36$$

$$4y^2 + 4 \cdot 225 - 120y = 72$$

$$y^2 - 30y - 236 = 0$$

$$D = 900 + 4 \cdot 236 = 900 + 944 = 1844$$

$$y_{1,2} = \frac{30 \pm \sqrt{1844}}{2}$$

Значит 2 гра

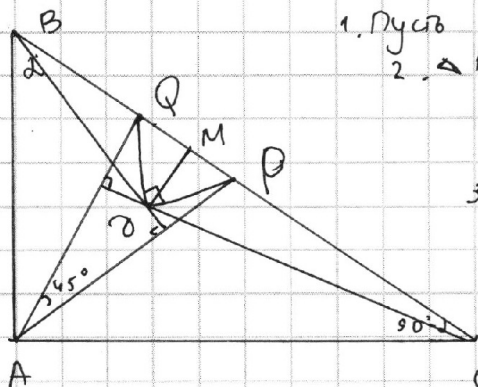


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned}
 1. & \text{ Пусть } \angle ABC = \alpha. \text{ Тогда } \angle BCA = 90^\circ - \alpha. \\
 2. & \triangle BAP - \text{р/д} \Rightarrow \angle BAP = \angle BPA = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} \\
 3. & \triangle QCA - \text{р/д} \Rightarrow \angle AQC = \angle QAC = \frac{180^\circ - (90^\circ - \alpha)}{2} = 45^\circ + \frac{\alpha}{2}
 \end{aligned}$$

4. т.к. Q, P расположены именно как на картинке, т.е. если бы они ~~были~~ ~~были~~ ~~были~~ в другом порядке, тогда $BA + AC = BP + CQ < BC$, что противоречит неравенству Δ -ка.

$$5. \angle QAP = \angle BAP + \angle QAC - \angle BAC = 45^\circ$$

6. $\triangle QAP - \text{р/д} \Rightarrow O$ лежит на пересечении к QP - DM (м.среди-на QP). Тогда O - центр опис. окр-ти Δ -ка QAP, т.е. $\angle QOP = 2 \cdot \angle QAP$ и O лежит на пересечении к QP.

7. $\triangle QAC - \text{р/д} \Rightarrow CQ \in$ перпен к QA.

8. O - центр опис. окр-ти $\triangle QAP \Rightarrow O \in$ перпен к QA

9. Из 7 и 8 пунктов $\Rightarrow CO -$ перпен к QA

$$10. \text{ Аналогично } BO - \text{ перпен к AP} \Rightarrow \angle OBP = \angle OBA = 35^\circ = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \alpha = 70^\circ. \quad 90^\circ - \alpha = 20^\circ. \quad \angle OCO = \frac{\angle ACB}{2} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$$

$$\angle OCB = 15^\circ$$

$$AF = \frac{C_5^3}{C_5^1 + C_5^2 + C_5^0 + C_5^3} = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0 \quad x_1 + x_2 \quad 1, + 3q \quad 1, + 4q$$

$$2x^2 - (a^3 - a^2)x - 1a^6 - 8a - 4 = 0 \quad 1, + q \quad 1, + 6q$$

x_3, x_4

$$1, \quad 1, + q \quad 3,$$

$$\frac{a^2 - a}{\cancel{2a^2}} = \frac{a^3 - a^2}{2}$$

$$2a^2 - 2a = a^3 - a^2$$

$$a^3 - 3a^2 + 2a = 0$$

$$a(a^2 - 3a + 2) = 0$$

$$a(a-1)(a-2) = 0$$

$$a = 0 \quad a = 1 \quad a = 2$$

$$a = 0$$

$$\cancel{x^2} + \frac{2}{3} = 0$$

$\emptyset$

$$2x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 2$$

$$\text{не нос}$$

$$a = 1. \quad x^2 + \frac{1}{3} = 0 \quad \emptyset \quad \text{не нос}$$

$$a = 2 \quad x^2 - 2x + \frac{2-8}{3} = x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$2x^2 - 4x - 2 \cdot 64 - 8 \cdot 2 - 4$$

$$x^2 - 2x - (64 + 8 + 2) = x^2 - 2x - 74 = 0$$

$$D = 4 + 4 \cdot 74 = 20$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

$$\emptyset \quad \cancel{4}$$

$$D = 4 + 4 \cdot 14 = 4 \cdot 75 = 4 \cdot 25 \cdot 3$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 10\sqrt{3}}{2} = 1 \pm 5\sqrt{3}$$

$$1 - \sqrt{5}$$

$$1 + \sqrt{5}$$

$$2$$

$$4$$

$$5$$

$$1 - 5\sqrt{3}$$

$$1 + 5\sqrt{3}$$

$$1 - 7\sqrt{3}$$

$$1 - 5\sqrt{3}$$

$$1 - \sqrt{3}$$

$$1 + \sqrt{3}$$

$$1 + 5\sqrt{3}$$

$$1 + \sqrt{5} - 1 + \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

$$5\sqrt{3} - \sqrt{5} =$$

$$= \sqrt{5}(\sqrt{15} - 1) = 4\sqrt{5}$$

$$\frac{64}{+2} \quad 16 \cdot 4 = 20$$

$$128$$

$$128$$

$$148 \overline{) 2}$$

$$-14 \quad 74$$

$$0 \quad 75$$

$$-4$$

$$300$$

$$\frac{75}{25} \overline{) 5}$$

$$-5 \quad 15$$