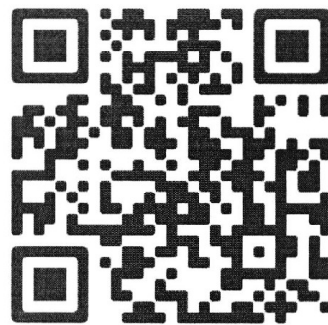




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 15$, $BE = 10$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$ являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$ являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| + \left|y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leq 6$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle DBC = 35^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = z(z+4) \\ yz = x(x+4) \\ xz = y(y+4) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{xy}{z} = z+4 & \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} = x+z+y+12 \\ \frac{yz}{x} = x+4 & \left(\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} \right)^2 = ((x+4) + (y+4) + (z+4))^2 \\ \frac{xz}{y} = y+4 & \frac{x^2y^2}{z^2} = (z+4)^2 \end{cases}$$

(и аналогичные) **Значит,**

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 2(xy + 4x + 4y + 16 + xz + 4x + 4z + 16 + yz + 4y + 4z + 16)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = z^2 + 4z + 4x + 4y + y^2 + 4y + 4x + 4z + 32 + x^2 + 4x + 4y + 4z + 16$$

$$12x + 12y + 12z + 48 = 0 \quad x + y + z = -4$$

$$((x+4) + (y+4) + (z+4))^2 = (x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 + 2(x^2 + y^2 + z^2 + 12x + 12y + 12z + 48)$$

$$= (x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 + 2((x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 + 4x + 4y + 4z) =$$

$$= 3((x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2) + 8x + 8y + 8z = 3((x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2) +$$

$$= 32 = (x+4 + y+4 + z+4)^2 = 8^2. \text{ Значит, } 3((x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2) =$$

$$= 96 \quad (x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = 32. \text{ Ответ: } 32$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = 10^{25000} - 1 \quad n^3 = (10^{25000} - 1)^3 = 10^{75000} - 3 \cdot 10^{50000} + 3 \cdot 10^{25000} - 1$$

Тогда, n^3 это число: ~~выра~~

$\underbrace{99 \dots 9}_{24999} \underbrace{700 \dots 0}_{24999} \underbrace{299 \dots 9}_{25000}$ В нём 49999 девяток

Ответ: 49999.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1



2



3



4



5



6



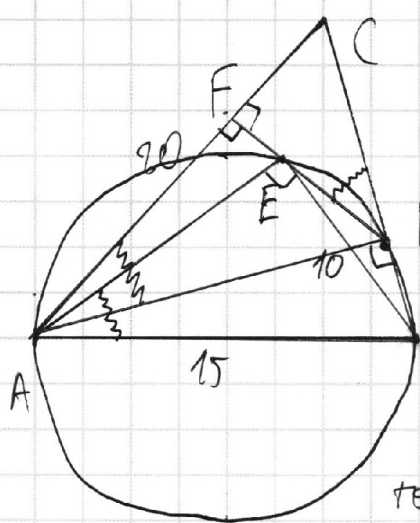
7



СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\angle EAB = \angle FDC$ из вписанности $AEDB$.

$AD \perp DB$, так как $\angle ADB = 90^\circ$, как

D опирающийся на диаметр AB .

Значит, $\angle CDF = \angle CAD = 90^\circ - \angle ACB$.

Пусть, $\angle EAB = \angle CDF = \angle FAD = \varphi$,
тогда $\sin \varphi = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ $\cos \varphi = \frac{\sqrt{5}}{3}$, по

основному тригонометрическому тождеству. $FD^2 = CF \cdot AF$,
как высота в прямоугольном треугольнике $\triangle ADC$.

$FD^2 + AF^2 = AF \cdot (CF + AF) = AF \cdot AC$. Значит,

$AD^2 = AF \cdot 20$ $\frac{AD}{AF} = \frac{1}{\cos \varphi} = \frac{3}{\sqrt{5}}$. Значит,

$AD = \frac{3}{\sqrt{5}} AF$. $\frac{9}{5} AF^2 = AF \cdot 20$ $AF = \frac{100}{9}$

Ответ: $\frac{100}{9}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть, коробок n . Тогда, вероятность победы игрока, открыв 5 коробок, $\frac{C_5^3}{C_n^3}$ (количество

вариантов, где шарик оказывается в этих 5 коробках ко всем вариантам). Открывая 8 коробок вероятность победить $\frac{C_8^3}{C_n^3}$ (аналогично посчитано), тогда вероятность стала больше в $\frac{C_8^3}{C_5^3}$ раз

$$\frac{C_8^3}{C_5^3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{28}{5} = 5,6 \text{ раз.}$$

Ответ: в 5,6 раз.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2 - a^3}{3} = 0 \text{ Пусть, корни } x_1 + 3k; x_1 + 4k,$$

$$2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0. \text{ Тогда, корни этого уравнения}$$

$$x_1 + k; x_1 + 6k. \text{ Заметим, что среднее арифметическое}$$

$$\text{корней уравнений равны. Значит, абсциссы вершин парабол}$$

$$\text{совпадают (так же абсцисса вершины параболы } ax^2 + bx + c = 0$$

$$-\frac{b}{2a}). \text{ Значит, } \frac{a^3 - a^2}{4} = \frac{a^2 - a}{2} \quad a^3 - a^2 - 2(a^2 - a) =$$

$$= a^2(a - 1) - 2a(a - 1) = a(a - 1)(a - 2). \text{ Значит, } a \text{ может}$$

$$\text{быть равно только } 0; 1 \text{ или } 2. \text{ Проверим } a = 0:$$

$$x^2 - 0 \cdot x + \frac{2}{3} = 0. \text{ Нет решений. Значит, } a \neq 0$$

$$a = 1: x^2 - 0 \cdot x + \frac{2 - 1}{3} = 0. \text{ Нет решений. Значит, } a \neq 1$$

$$a = 2: x^2 - 2x - 2 = 0 \quad x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 8}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$2x^2 - 4x - 14 = 0 \quad x^2 - 2x - 7 = 0 \quad x_{3,4} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 28}}{2} = 1 \pm \sqrt{8}$$

$$x_3 = 1 - \sqrt{8} \quad x_4 = 1 + \sqrt{8} \quad x_1 = 1 - \sqrt{3} \quad x_2 = 1 + \sqrt{3} \text{ являются}$$

$$\text{членами арифметической прогрессии } (b_n): b_n = 1 - \sqrt{3} + n\sqrt{3}$$

$$\text{Ответ: } a = 2.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

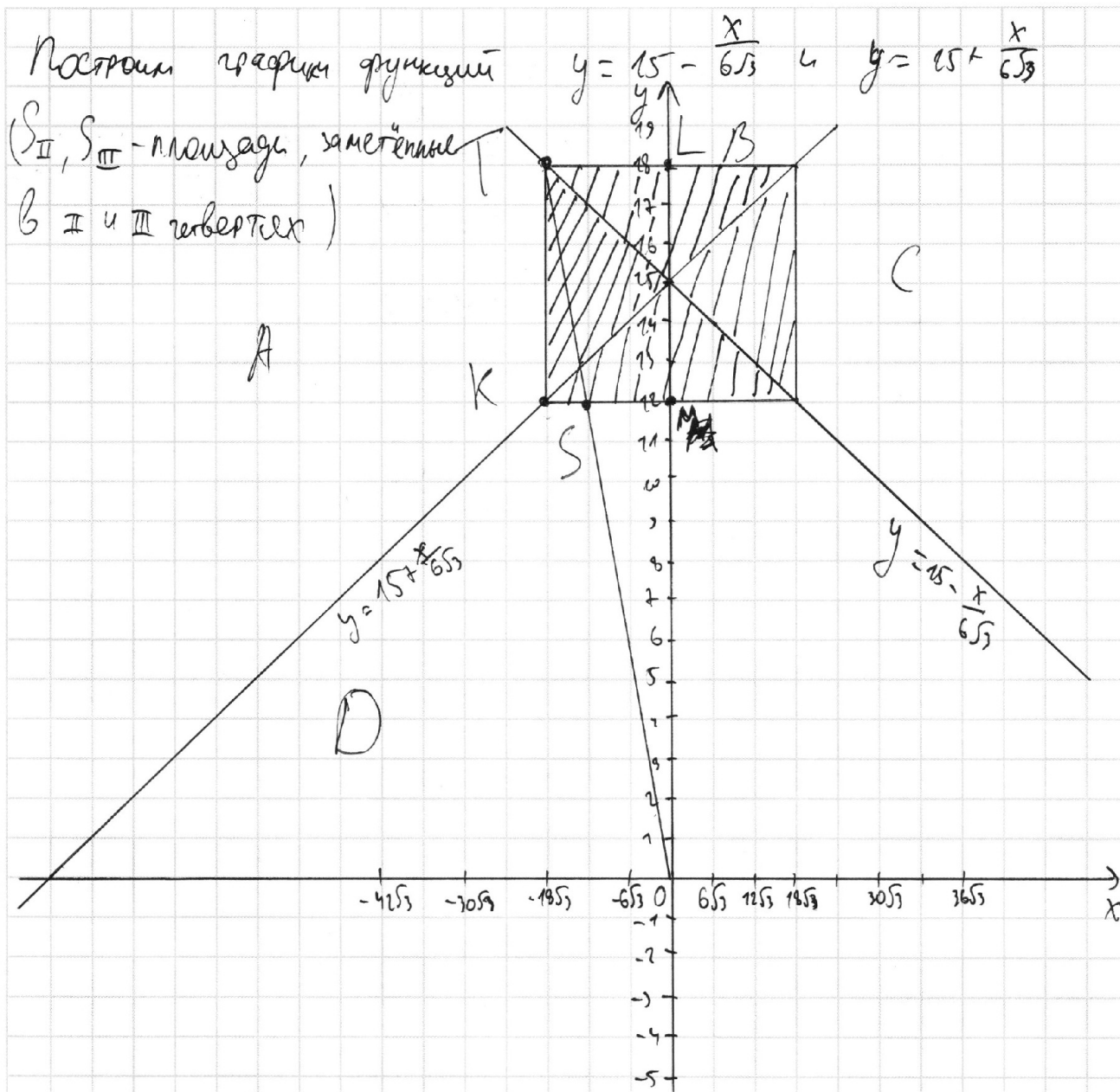
5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Они делят плоскость на части A, B, C, D такие, что

в A : $y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \geq 0$ $y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \leq 0$

в B : $y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \geq 0$ $y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \geq 0$

в C : $y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \geq 0$ $y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \leq 0$

в D : $y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \leq 0$ $y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \leq 0$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда, раскрывая модули, имеем:

$$\text{в } A: y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} - y + 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} = -\frac{2x}{6\sqrt{3}} - \frac{2x}{6\sqrt{3}} \leq 6$$

$$x \geq -3 \cdot 6\sqrt{3}$$

$$\text{в } B: y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} + y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} = 2y - 30 \quad 2y - 30 \leq 6 \quad y \leq 18$$

$$\text{в } C: y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} - y + 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} = \frac{2x}{6\sqrt{3}} \quad \frac{2x}{6\sqrt{3}} \leq 6 \quad x \leq 3 \cdot 6\sqrt{3}$$

$$\text{в } D: -y + 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} - y + 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} = 30 - 2y \quad 30 - 2y \leq 6 \quad y \geq 12$$

Значит, Φ - закрашенная часть плоскости. При повороте в ~~первой~~ I и IV четвертях мы замечаем промежуток между окружностями с центрами O и радиусами 12 и 36

$$\text{Это площадь } \frac{\pi \cdot 36^2 - \pi \cdot 12^2}{2} = \pi \cdot 24^2 \text{ Во II четверти}$$

Замечает $\triangle TKS$ $S = \triangle OTM$ MK и часть окружности радиусом 36 с центром O, ^{без $\triangle OSM$} ограниченную $\angle TOM$ $OT = 36$, $TL = 18\sqrt{3}$

$$\sin \angle TOL = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \angle TOL = 60^\circ. \quad KS = 6\sqrt{3} \quad TK = 6 \quad S_{\triangle TKS} = 18\sqrt{3}$$

$$S_{\text{сектор}} = \pi \cdot 36^2 \cdot \frac{60^\circ}{360^\circ} = \pi \cdot 216 \quad S_{\triangle OSM} = \frac{12 \cdot 12\sqrt{3}}{2} = 72\sqrt{3}$$

$$S_{II} = \pi \cdot 216 - 54\sqrt{3}. \text{ Во II и III четвертях замечаю}$$

одинаково, поэтому $S_{III} = \pi \cdot 216 - 54\sqrt{3}$ Итого:

$$S = \pi \cdot 24^2 + 2 \cdot \pi \cdot 216 - 108\sqrt{3} = \pi \cdot 36 \cdot 28 - 108\sqrt{3}.$$

Ответ: $1008\pi - 108\sqrt{3}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

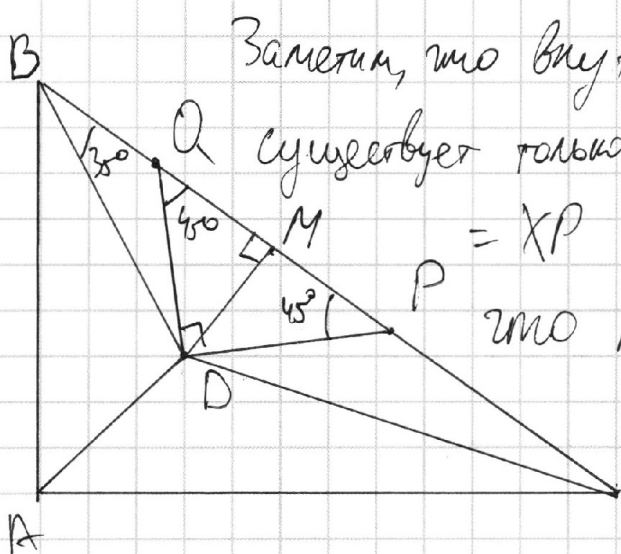
5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что внутри треугольника ABC существует только одна точка X , что $XQ = XP$ и $\angle QXP = 90^\circ$. Докажем, что D — центр $\triangle ABC$. Пусть, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Тогда,

$$BQ = a - b, \quad PC = a - c. \quad (MD \perp QP \Rightarrow DQ = DP) \quad BM = \frac{a + c - b}{2}.$$

Значит, $QP = b + c - a$. Пусть, M — середина QP , $BM = \frac{a + c - b}{2}$. Значит, на перпендикуляре к BC в точке M (на луче MD) лежит центр I (потому что длина BM равна длине отрезка касательной к вписанной окружности $\triangle ABC$ из точки B). $MD = \frac{1}{2}QP$, как медиана в прямоугольном треугольнике $MD = \frac{b + c - a}{2}$, что равно радиусу вписанной в $\triangle ABC$ окружности. Значит, D — центр $\triangle ABC$ BD — биссектриса $\angle ABC \Rightarrow \angle ABC = 35^\circ \cdot 2 = 70^\circ$. $\angle ACB = 180^\circ - \angle BAC - \angle ABC = 20^\circ$. $\angle DCB = \frac{1}{2} \angle ACB = 10^\circ$.

Ответ: 10° .

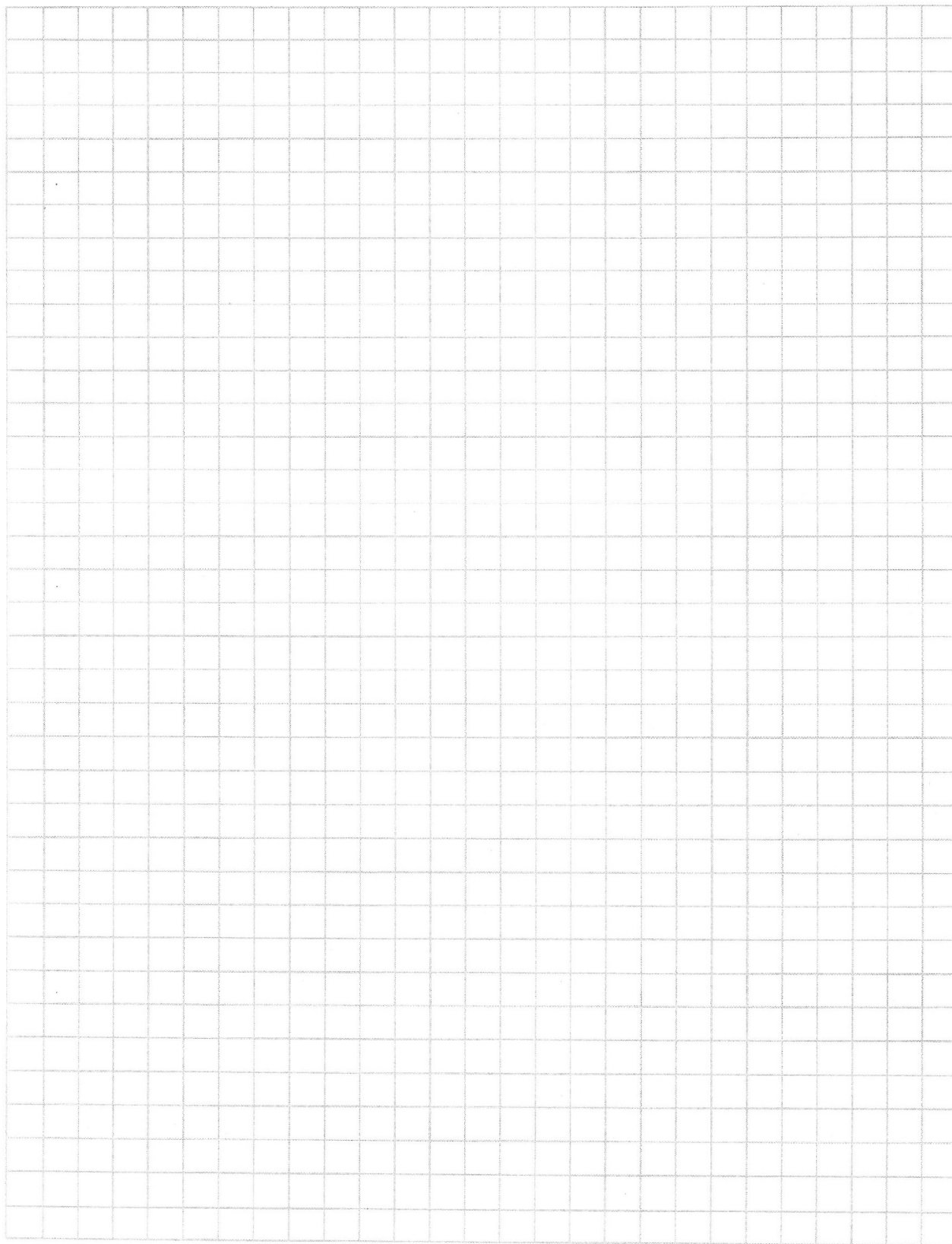


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



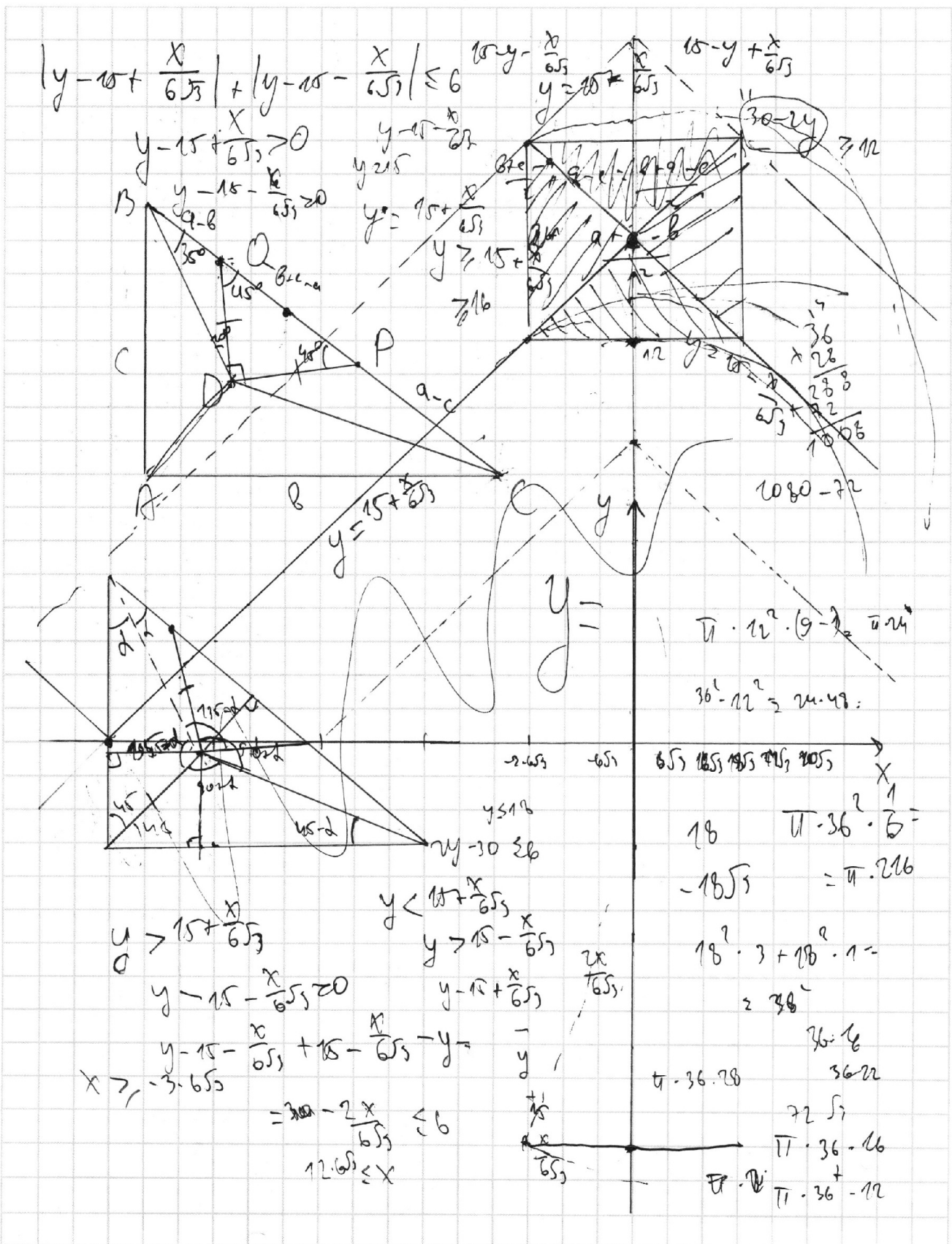


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



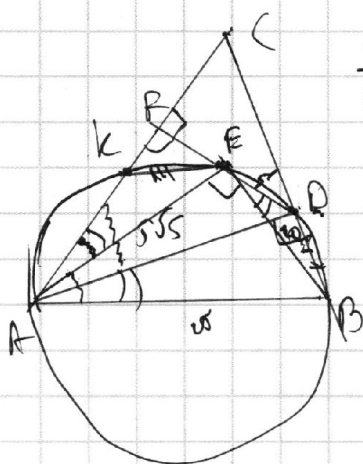


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{10}{FC} = \frac{15}{CO} = \frac{5\sqrt{5}}{FO}$$

$$\frac{FC}{CO} = \frac{2}{3} = \frac{CO}{AO}$$

$$\frac{15}{5\sqrt{5}} = \frac{DB}{FE} = \frac{AD}{AF}$$

$$7.5\sqrt{2} = \frac{15}{\sqrt{2}}$$

$$AF \cdot FC = CO^2$$

$$CO^2 = FC \cdot AD$$

$$\frac{FD}{AD} = \frac{2}{3}$$

$$126 - 16 - 4 = -148$$

$$\sqrt{5}$$

$$178 + \frac{16+4}{3} = 178 + \frac{20}{3} = 178 + 6\frac{2}{3} = 184\frac{2}{3}$$

$$FD^2 = CF \cdot AF$$

$$2^2 = 178 -$$

$$\frac{AF^2}{AF \cdot 2AF} = \frac{FD}{\sqrt{5}}$$

$$AF = \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

$$FD^2 + AF^2 = AF(CF + AF) \quad AD^2 = AF \cdot 20$$

$$AF = \frac{\sqrt{5}}{3} AD$$

$$AD^2 = \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot AD \cdot 20$$

$$AD = \frac{20\sqrt{5}}{3}$$

$$AF = \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot AD = \frac{20\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{200}{9}$$

$$\frac{CF}{FD} = \frac{FD}{AF} \quad 1 + \sqrt{5}$$

$$x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2 - a^3}{3} = 0 \quad x_1 + 3k \quad x_1 + 4k$$

$$2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^3 - 8a - 4 = 0$$

$$x_1 + k$$

$$x_1 + 6k \quad 1 - \sqrt{5}$$

$$\frac{a^2 - a}{2} = \frac{a^3 - a^2}{4}$$

$$\frac{(a^2 - a)}{2 \cdot 2} = \frac{a^3 - a^2}{4}$$

$$a^3 - 2a^2 - a^2 + a = 0$$

$$a^3 - a^2 - 2(a^2 - a) = 0 \quad a^2(a - 1) - 2a(a - 1) = 0$$

$$a(a - 2)(a - 1) = 0$$

$$x^2 + \frac{2}{3} = 0$$

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$x^2 - 2x - 74 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$x_{3,4} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 148}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{152}}{2} = 1 \pm \sqrt{38} = 1 \pm 2\sqrt{9.5}$$