



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = -6y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 20 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 10$, $BE = 9$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шару. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть девять коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$ являются пятым и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| + \left|y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| \leq 8$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle CBA = 46^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 1

Решение:

раскрыв скобки, получим $(x-b)^2 + (y-b)^2 + (z-b)^2$:

$$= z^2 + y^2 + x^2 - 12(x+y+z) + 108.$$

Сложив ур-ние системы, получим

$$6(x+y+z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy - 2x - 2y$$

$$6(x+y+z) = (x+y+z)^2 + 7(xy+xz+yz).$$

подставив правую часть в вар-ию, получим:

$$x^2 + y^2 + z^2 - \underbrace{2(x+y+z)^2}_{108} - 6(xy+xz+yz).$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

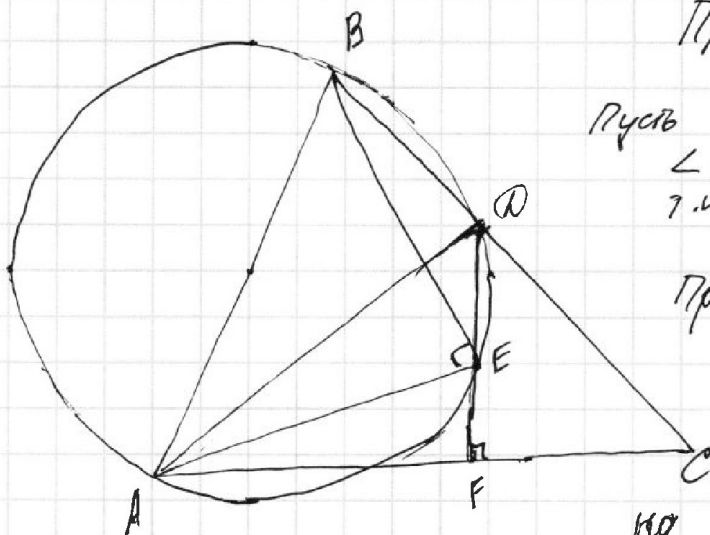
7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 3

Решение:



Проведем AE . Т.к. AB — диаметр, то $\angle AEA = 90^\circ$.

Пусть

$\angle BAE = \alpha$, тогда $\angle ADE = 180^\circ - \alpha$, т.к. $ADEA'$ — вписанн. (сб-бс).

Проведем AD . $\angle ADA = 90^\circ$, т.к. опирается на диаметр.

Отсюда $\angle ADD = 90^\circ$.

$\angle FDC = \angle ADC - \angle ADE$.

$\angle ADE = \angle ARE$ как опир. на одну и ту же дугу AE .

Тогда $\angle FDE = 90^\circ - \angle ARE = \angle BAE = \alpha$.

т.к. $\alpha + \angle ARE = 90^\circ$ в прямоугольнике.

В $\triangle FDC$: $\angle FCD = \angle DEC = 90^\circ - \angle FDC = 90^\circ - \alpha = \angle AAE$.

Значит, $\triangle ABE \sim \triangle ADC$ по 2-м $\angle$ ($\angle ADC = \angle AEA = 90^\circ$, $\angle BAE = \angle FDC$).

тогда $\angle DAC = \alpha$.

Рассм. $\triangle ARE$ ($\angle AEA = 90^\circ$)

по 1. Пифагора $AB^2 = BE^2 + AE^2$, $AE = \sqrt{100 - 81}$

$AE^2 = AB^2 - BE^2 = \sqrt{100 - 81} = \sqrt{19}$.

$$\cos \alpha = \frac{AE}{AB} = \frac{\sqrt{19}}{10}$$

В $\triangle ADC$: ($\angle ADC = 90^\circ$).

$$AD = AC \cdot \sin \alpha = 20 \cdot \frac{\sqrt{19}}{10} = 2\sqrt{19}$$

$$\begin{aligned} \text{В } \triangle ADF: (\angle AFD = 90^\circ \text{ по упр.}); AF &= AD \cdot \cos \alpha = 2\sqrt{19} \cdot \frac{\sqrt{19}}{10} \\ &= \frac{19}{5} = 3,8. \end{aligned}$$

Ответ: 3,8



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 5.

Решение: 1) Обозначим условия, при которых $\frac{a}{n}$ корни ур-ний - члены арифм. прогрессии.

Пусть 1-й член прогрессии b , её разность $d \neq 0$.
n-й член: b_n

тогда по 1-му условию получаем,

$$b + 4d + b + 7d = \frac{a^3 - 4a^2}{5}$$

$$2b + 11d = \frac{a^3 - 4a^2}{5}$$

$$b + 5d + b + 6d = a^2 - 4a$$

$$2b + 11d = a^2 - 4a$$

2) Приравняем правые части:

$$\frac{a^3 - 4a^2}{5} = a^2 - 4a \quad \Leftrightarrow \quad a^3 - 4a^2 = 5a^2 - 20a$$

$$a^3 - 9a^2 + 20a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a(a^2 - 9a + 20) = 0$$

Решая ур-ние, получаем корни $a=0$, $a=5$, $a=4$.

3) Подставим a в ур-ние, чтобы найти корни - члены арифм. прогрессии.

$$a=0: \quad x^2 = 0$$

$$x = 0$$

Очевидно, что корни не являются членами арифм. прогрессии

$$5x^2 = 15$$

$$x = \pm \sqrt{3}$$

$$a=4: \quad x^2 + 16 - 24 + 4 = 0$$

$$x^2 = 4 \quad x = \pm 2$$

$$5x^2 - 2 \cdot 64 - 24 + 15 = 0 \quad 5x^2 = 127 \quad x = \pm \sqrt{\frac{127}{5}}$$

Очевидно, что корни не являются членами арифм. прогрессии



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐ 1

☐ 2

☐ 3

☐ 4

☒ 5

☐ 6

☐ 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow a=0 \quad a=5: \quad x^2 - (25-20)x + 25-20+4=0$$

$$x^2 - 5x - 1 = 0. \quad x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{29}}{2}$$

$$5x^2 - (125 - 4 \cdot 25)x - 2 \cdot 125 - 6 \cdot 5 - 15 = 0$$

$$5x^2 - 25x - 250 - 30 - 15 = 0$$

$$x^2 - 5x - 29 = 0$$

$$x_{3,4} = x_{3,4} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 29}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{129}}{2}$$

т.к. корни 1-го ур-ния — положительные числа
то их разность = d:
 $d = \pm \sqrt{29}$

попробуем, но если $d > 0$ т.е. $d = \sqrt{29}$, то

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4 \quad b_1 = \frac{5 + \sqrt{29}}{2}, \quad b_2 = \frac{5 + \sqrt{29}}{2}$$

$$b_1 + \sqrt{29} = b_2 \quad \text{это верно}$$

$$\text{Также, } b_1 + d = b_2 = \frac{5 + \sqrt{29}}{2}, \quad b_2 = \frac{5 + \sqrt{29}}{2}$$

$$\text{Или } b_1 + d = b_2 + \sqrt{29} = b_2 \quad \text{это верно}$$

$$\text{Аналогично с } d = -\sqrt{29}: \quad b_1 = \frac{5 - \sqrt{29}}{2}, \quad b_2 = \frac{5 - \sqrt{29}}{2}$$

$$b_1 + d = b_2 \quad \text{верно. } b_1 = \frac{5 + \sqrt{29}}{2}, \quad b_2 = \frac{5 + \sqrt{29}}{2}$$

$b_1 + d = b_2$ — верно. Получим, $a=5$ при $a=5$
корни ур-ния будут теми же числами, что и раньше

Ответ: $a=5$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

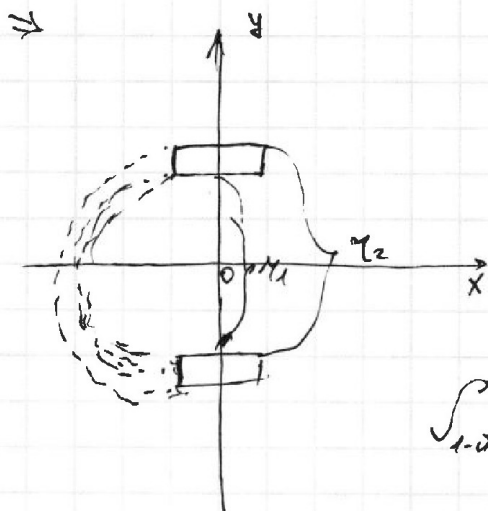
5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть при повороте на π получится фигура Φ' .

Во время поворота Φ анна-
-ная область, находящуюся
между 2-ми полу-
-кругами радиусов 16 и 24.

$$S_{1-\text{полукр-м}} = \frac{\pi \cdot r_1^2}{2} = \frac{\pi \cdot 16^2}{2} = 128\pi.$$

$$S_{2-\text{пол}} = \frac{\pi r_2^2}{2} = \frac{\pi \cdot 24^2}{2} = 288\pi.$$

Тогда ~~M~~ найдем S_M , вычитая S_1 из S_2 :

$$S_M = S_2 - S_1 = 288\pi - 128\pi = 160\pi.$$

Ответ: 160π .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№.6

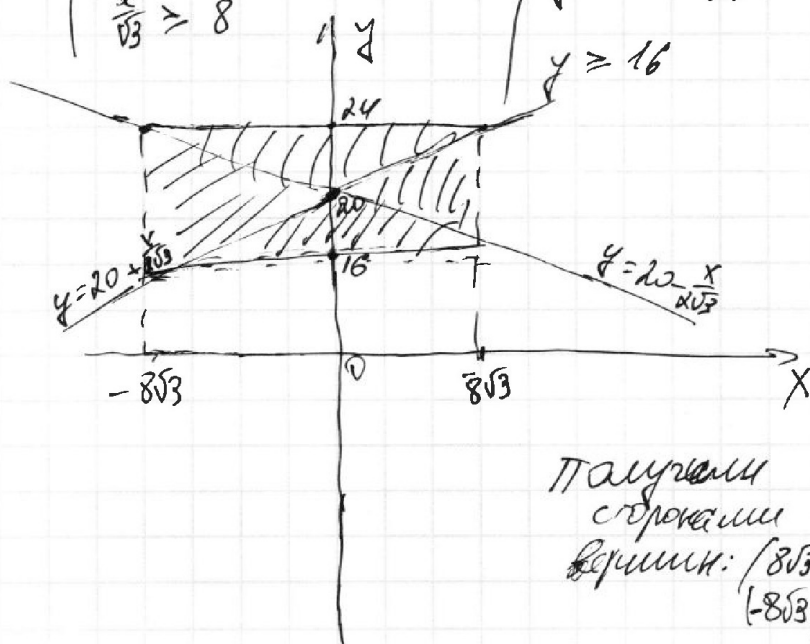
Решение: Построим Φ на м.ст.

$$1) \begin{cases} y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \geq 0 \\ y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \geq 0 \\ y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} + y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 8 \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \\ y \leq 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \\ y \leq 9 \text{ и } y \leq 24 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \geq 0 \\ y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 0 \\ y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} - y + 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 8 \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \\ y \leq 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \\ \frac{x}{\sqrt{3}} \leq 8 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} y \leq 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \\ y \geq 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \\ \frac{x}{\sqrt{3}} \geq 8 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} y \leq 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \\ y \leq 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \\ y \geq 16 \end{cases}$$



Получили прямоугольник со сторонами 8 и $16\sqrt{3}$, координаты вершин: $(8\sqrt{3}; 16)$ $(8\sqrt{3}; 24)$ $(-8\sqrt{3}; 16)$ $(-8\sqrt{3}; 24)$
 $\Rightarrow$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

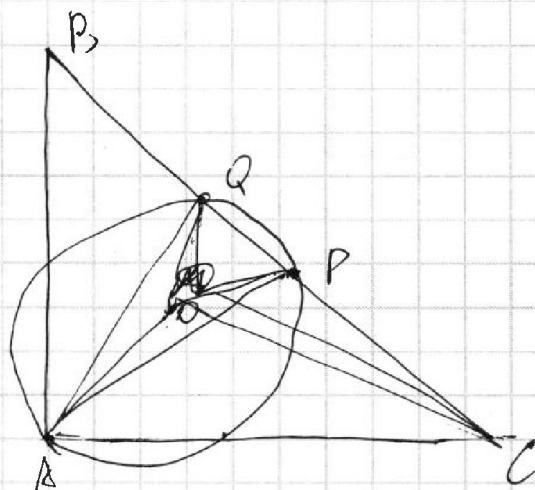
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№.7

Решение:



$$\angle BCA = 90^\circ \Rightarrow \angle AQC = 44^\circ$$

$$\text{т.к. } \triangle ABP \text{ и } \triangle AQC \text{ п.о.}$$

$$\text{то } \angle BAP = \frac{180 - \angle ABC}{2} = 81^\circ$$

$$\angle QAC = \frac{180 - \angle BCA}{2} = 68^\circ$$

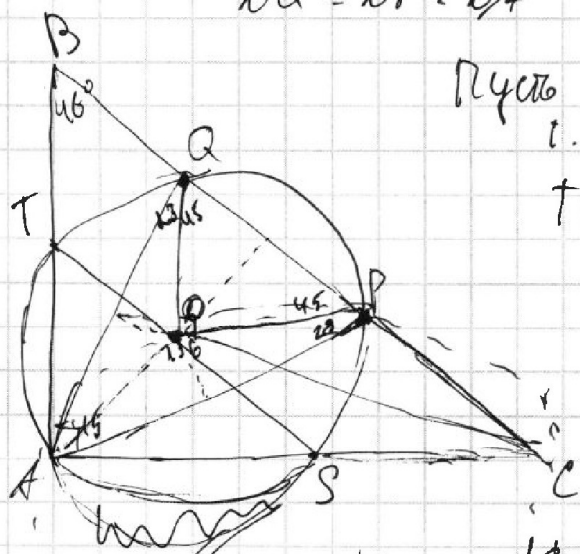
$$\angle QAP = \angle BAC$$

$$\angle BAC = \angle BAP + \angle QAC - \angle QAP$$

$$\angle QAP = \angle BAP + \angle QAC - \angle BAC = 45^\circ$$

Значит, $\angle QAP = \frac{\angle QBP}{2}$. D - то центр опис. окр-ти $\triangle QBP$.

$$DQ = DP = DA - \text{радиусы}$$



Пусть окр-ты $\cap AB$ и AC в
т.т. T и S.

ТС - диаметр, т.к. $\angle A = 90^\circ$

$$\angle DPC = 135^\circ$$

т.к. D - центр окр-ти

$$\angle ADP = \angle AQP \cdot 2 = 136^\circ$$

т.к. $\angle ACQ + \angle ADP = 180^\circ$, $\triangle DPC$ - вписан

значит $\angle DCP = \angle DAP$ как отв. на $\perp DP$.

$\Rightarrow$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\Rightarrow \triangle ADP$ - р.б. т.к. $AD = DP$ как радиусы.
 $\angle DPA = \angle DAP$.

$$\angle DPA = \angle BPA - \angle DPQ = 67 - 45 = 22^\circ.$$

Тогда $\angle OCP = \angle OCP = 22^\circ$.

Ответ: 22° .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3

5-6

$1+2+5+4+5$
9

$15+6+8+2=$
 $31+10(21)$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 12/(x+y+z) + 108. \quad - ?$$

$$xy + yz +$$

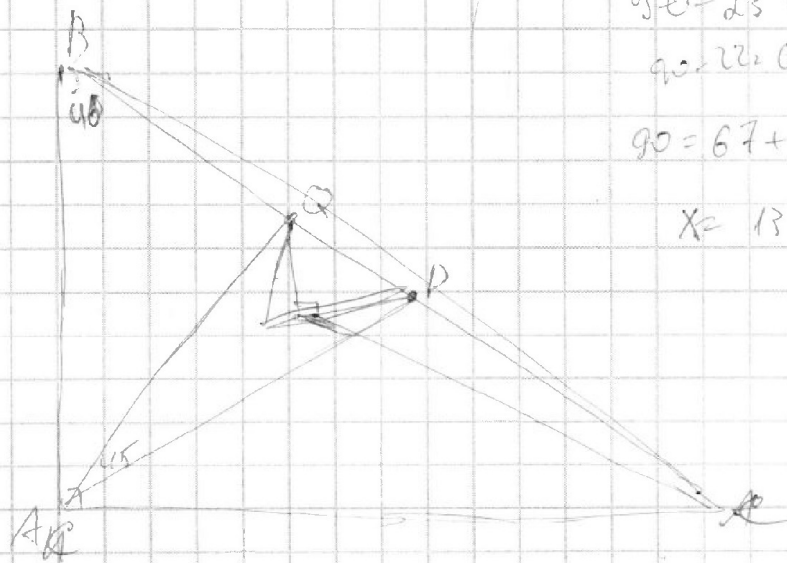
$$xz + xz + yz = 6/(x+y+z) + 108.$$

$$xyz(z-6)$$

$$\frac{(xy)^2}{z^2} + \frac{(xz)^2}{y^2} + \frac{(yz)^2}{x^2}$$

$$(10^{2002} - 1)^3 = 10^{3 \cdot 2002} - 10$$

$$\frac{3}{n} < \frac{3}{n-1} < \frac{3}{n-2} < \frac{2}{n-1}$$



$$90 - 23 = 67$$
$$90 - 22 = 68$$

$$\begin{array}{r} 67 \\ + 68 \\ \hline 135 \end{array}$$

$$90 = 67 + 68 - X.$$

$$X = 135 - 90.$$

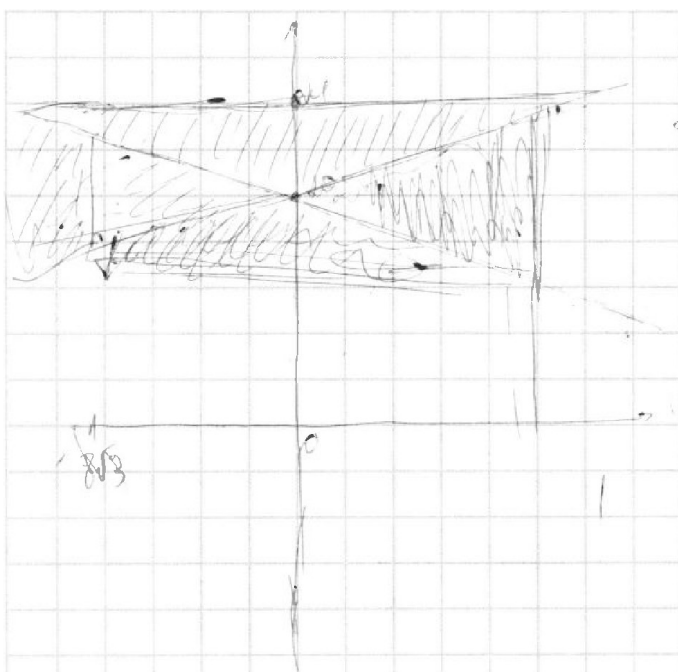


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

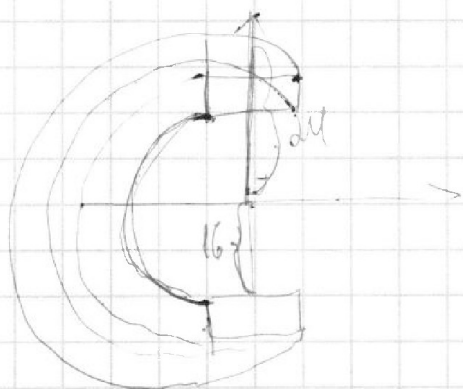
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено болсе одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$-2y + 40 \leq 0$$

$$-2y$$



$$-y + 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} + y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 0$$

$$\begin{aligned} y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} &\geq 0 \\ y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} &\geq 0 \\ 2y - 40 &\leq 0 \\ 2y &\leq 40 \quad y \leq 20 \\ y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} &\leq 0 \\ y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} - y + 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} &\leq 0 \\ \frac{x}{\sqrt{3}} &\leq 0 \\ x &\leq 0 \\ -y + 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} - y + 20 &\geq 0 \\ -2y &\geq -40 \quad y \leq 20 \\ -y - y + 40 &\leq 0 \\ 2y &\leq 40 \quad y \leq 20 \\ 24^2 \cdot \pi - 16^2 \cdot \pi \\ 2 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = 99 \dots 9 \quad \left. \begin{array}{l} \text{11 - крестик} \\ 72 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} 36 \\ \times 3 \\ \hline 108 \end{array}$$

$$\begin{aligned} (x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 &= x^2 - 12x + 36 + y^2 - 12y + 36 + z^2 - 12z + 36 = \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - 12(x+y+z) + 108. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2 \\ yz = -6x + x^2 \\ zx = -6y + y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 6(x+y+z) = xy + yz + zx \\ x^2 + y^2 + z^2 - 6(x+y+z) = 108. \end{cases}$$

$$+6(x+y+z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$$

$$\left((x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \right)$$

$$6(x+y+z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx - 3(xy + yz + zx)$$

$$6(x+y+z) = (x+y+z)^2 - 3(xy + yz + zx)$$

$$6(x+y+z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + yz + zx) + xy + yz + zx$$

$$6(x+y+z) = (x-y-z)^2 + x^2 + y^2 + z^2 - 6z - 6x - 6y$$

$$x = \frac{-6z + z^2}{y}$$

$$z = \frac{-6x + x^2}{y} = \frac{-6(-6z + z^2) + (-6z + z^2)^2}{y}$$

$$6(x+y+z) = x^2$$

$$6(x+y+z) = (x-y-z)^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten solution on grid paper for a geometry problem involving a sphere and a tetrahedron.

Top Left Diagram: A sphere with a tetrahedron inscribed. Points A, B, C, D are on the sphere's surface. A line segment AF is drawn. Calculations: $AF = AD \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{10} = 2 \cdot \frac{2 \cdot 19}{10} = \frac{38}{5}$. Other calculations: $\frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, $\frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Top Right Diagram: A sphere with a tetrahedron. A line segment AF is drawn. Calculations: $\frac{FC}{DF} = \frac{DF}{AF} = \frac{DC}{AD}$, $DF = \sqrt{AF \cdot FC}$.

Middle Left Diagram: A sphere with a tetrahedron. Points A, B, C, D, E, F are marked. Calculations: $BE^2 = AD^2 + DE^2 + 2 \cdot AD \cdot DE \cdot \frac{\sqrt{3}}{10}$, $81 = AD^2 + DE^2 + 5\sqrt{3} \cdot AD \cdot DE$, $AF = ?$.

Middle Right Diagram: A sphere with a tetrahedron. Points A, B, C, D, E, F are marked. Calculations: $AC = 20$, $AP = 10$, $AE = 9$, $100 - 81 = 19$.

Bottom Left Diagram: A sphere with a tetrahedron. Points A, B, C, D, E, F are marked. Calculations: $DC = AC \cdot \cos \beta = 20 \cdot \frac{9}{10} = 18$, $AD = AC \cdot \sin \beta = 20 \cdot \frac{\sqrt{19}}{10} = 2\sqrt{19}$, $FC = DC \cdot \cos \beta = 18 \cdot \frac{9}{10} = \frac{162}{10}$, $AF = AC - FC = 20 - \frac{162}{10} = \frac{38}{5}$.

Bottom Right Diagram: A sphere with a tetrahedron. Points A, B, C, D, E, F are marked. Calculations: $AF = AC - FC$, $DC = AC \cdot \cos \beta = 20 \cdot \frac{9}{10} = 18$, $AD = AC \cdot \sin \beta = 20 \cdot \frac{\sqrt{19}}{10} = 2\sqrt{19}$, $FC = DC \cdot \cos \beta = 18 \cdot \frac{9}{10} = \frac{162}{10}$, $AF = AC - FC = 20 - \frac{162}{10} = \frac{38}{5}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

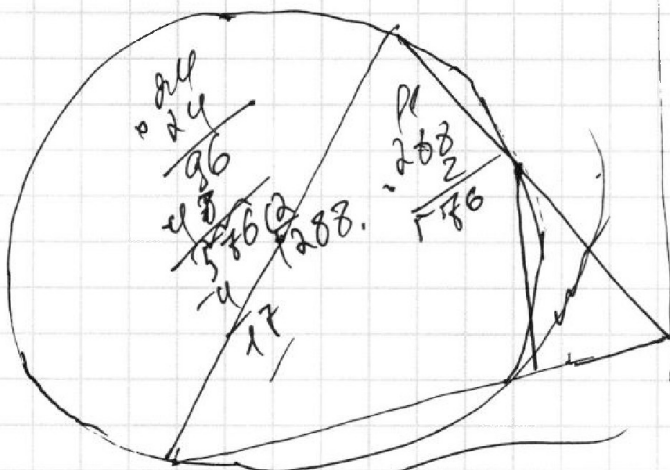
СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3.

Решение:

$$\begin{aligned} xy &= z^2 - 6z \\ xy(z-6)^2 + 6z &= 9 \\ xy - 6z + 9 + xz + yz \end{aligned}$$



$$xy + xz + yz - 6(x+y+z) + \sqrt{4} = 17$$

$$\begin{aligned} 6 + 4d &= \frac{a^3 - 4a^2 - \sqrt{a}}{10} \\ 6 + 5d &= \frac{a^2 - 4a - \sqrt{a}}{2} \\ 6 + 6d &= \frac{a^2 - 4a + \sqrt{a}}{2} \\ 6 + 7d &= \frac{a^3 - 4a^2 + \sqrt{a}}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{a} \\ 2d &= \frac{\sqrt{a}}{5} \end{aligned}$$

$$x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0 \quad [6, 7, 200]$$

$$D_1 = a^4 - 8a^3 + 16a^2 - 4a^2 + 24a - 16 = a^4 - 4a^2 + 24a - 16$$

$$x_1 = \frac{a^2 - 4a + \sqrt{a^4 - 8a^3 + 16a^2 + 24a - 16}}{2} = \frac{a^4 - 8a^3 + 16a^2 + 24a - 16}{2}$$

$$x_2 = \frac{a^2 - 4a - \sqrt{a^4 - 8a^3 + 16a^2 + 24a - 16}}{2}$$

$$5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$$

$$D_2 = a^6 - 8a^5 + 16a^4 + 8a^3 + 24a^2 + 60 > 0$$

$$x_3 = \frac{a^3 - 4a^2 + \sqrt{a^6 - 8a^5 + 16a^4 + 8a^3 + 24a^2 + 60}}{10}$$

$$x_4 = \frac{a^3 - 4a^2 - \sqrt{a^6 - 8a^5 + 16a^4 + 8a^3 + 24a^2 + 60}}{10}$$

$$\frac{152}{15} = 10 \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} 128 - 0 \\ 128 - 24 + 15 \\ 104 + 15 \\ 119 + 15 \\ 134 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$d^2 = a^4 - 8a^3 + 12a^2 + 24a - 16$$

$$9d^2 = a^6 - 8a^5 + 16a^4 + 8a^3 + 24a^2 + 60a - 144$$

$$225d^2 = a^6 - 8a^5 + 16a^4 + 8a^3 + 24a^2 + 60a - 144$$

$$225(a^4 - 8a^3 + 12a^2 + 24a - 16) = a^6 - 8a^5 + 16a^4 + 8a^3 + 24a^2 + 60a - 144$$

$$225a^4 - 8 \cdot 225a^3 + 12 \cdot 225a^2 + 24 \cdot 225a - 16 \cdot 225 =$$

$$a^6 - 8a^5 - 209a^4 + 8 \cdot 226a^3 - 12(223)a^2 + 60 + 16 \cdot 225 = 0$$

$$1 - 8 - 209 + 8 \cdot 226 - 12 \cdot 223 + 60 + 16 \cdot 225 =$$

$$-216 + 1808 - 2676 + 60 + 16 \cdot 225 =$$

$$-2892 + 1808 + 60 + 3600 =$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 12(x+y+z) + 100 =$$

$$6(x+y+z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6z - z^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 6z - z^2$$

$$6(x+y+z) = (x+y+z)^2 - 3(xy+yz+xz)$$

$$3(xy+yz+xz) = (x+y+z)(x+y+z-6)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 2z^2 + 2xy + yz + zx + 100 =$$

$$= -x^2 - y^2 - z^2 + 2(xy+yz+xz) + 100 =$$

$$= -(x+y+z)^2 + 100$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2b + \underbrace{b+4d}_{x_9}; \underbrace{b+5d}_{x_1}; \underbrace{b+6d}_{x_2}; \underbrace{b+7d}_{x_4}$$

$$2b + 11d = a^2 - 4a$$

$$a^2 - 4a = a^3 - 4a^2$$

$$2b + 11d = a^3 - 4a^2$$

$$a^3 + 4a^2 - a^3 - 4a^2 = 0$$

$$a^3 - 5a^2 + 4a = 0$$

$$a^3 - 4a^2 + 4a$$

$$(a=0)$$

$$a^3 - 5a + 4 = 0$$

$$a=1$$

$$a=4$$

$$\text{или } a=0$$

$$x^2 = 0$$

$$x^2 = 0, x^2 - 15 = 0$$

$$+152$$

$$\times 23$$

$$-\sqrt{15}; -1; +\sqrt{15}$$

$$a=1, x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$D = 9 + 4 = 13$$

$$a) 5x^2 + 3x - 13 = 0$$

$$D = 9 + 115 = 124$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{11}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-3 + \sqrt{11}}{2}$$

$$a=0, x^2 + 16 - 24 + 4 = 0$$

$$x^2 - 8 = 0$$

$$x^2 - 4 = 0, x = \pm 2$$

$$x^2 - 2 \cdot 64 - 6 \cdot 4 + 15 = 0$$

$$x = 4$$

$$x^2 - 128 - 24 - 15 = 0$$

$$x^2$$

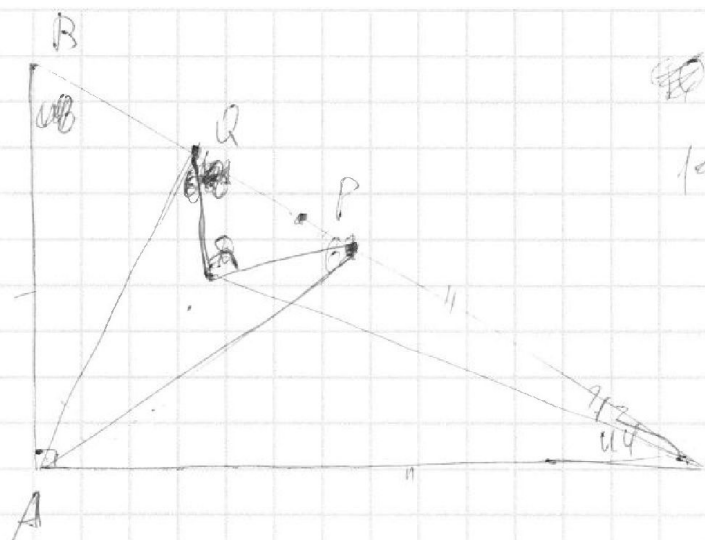


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$90 - 23 = 67$$

$$90 - 22 = 68$$

$$6 + 9 + 10 + 6 =$$

$$= 15 + 10 + 6$$

$$99$$

$$9^2 = 81$$

$$99 = 9 \cdot 11$$

$$9^2 (11)^2$$

$$= 23 / 111 \dots$$

$$2000$$

$$11 = 99 \cdot 9$$

$$999 = 9(111)$$

$$31/1$$

$$11 \cdot 10$$

$$a^2 - 4a = a^2 - 4a^2$$

$$(6 + 4d)(6 + 7d) = -2a^3 - 6a - 15$$

$$6^2 + 11d^2 + 11d6 = -2a^3 - 6a - 15$$

$$6^2 + 11d^2 +$$

$$6^2 + 30d^2 + 11d6 = a^2 - 6a + 4 = 0$$

$$19d^2 = 2a^3 + 6a + 15 + a^2 - 6a + 4$$

$$19d^2 = 2a^3 + a^2 + 19$$

$$2d^2 = 2a^3 + a^2 + 19$$