



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [4 балла] Ненулевые числа  $x, y, z$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения  $(x + 4)^2 + (y + 4)^2 + (z + 4)^2$ , если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа  $n$  состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа  $n^3$ ?
3. [5 баллов] Окружность  $\omega$  с диаметром  $AB$  пересекает сторону  $BC$  остроугольного треугольника  $ABC$  в точке  $D$ . Точка  $F$  выбрана на отрезке  $AC$  так, что  $DF \perp AC$ , а  $E$  — точка пересечения отрезка  $DF$  с окружностью  $\omega$ , отличная от  $D$ . Найдите  $AF$ , если  $AC = 20$ ,  $AB = 15$ ,  $BE = 10$ .
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарик. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых корни уравнения  $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^2}{3} = 0$  являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения  $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$  являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура  $\Phi$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют неравенству  $\left|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| + \left|y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leq 6$ . Фигуру  $\Phi$  непрерывно повернули вокруг начала координат на угол  $\pi$  по часовой стрелке. Найдите площадь множества  $M$ , которое замела фигура  $\Phi$  при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе  $BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  выбраны точки  $P$  и  $Q$  так, что  $AB = BP$ ,  $AC = CQ$ . Внутри треугольника  $ABC$  выбрана точка  $D$ , для которой  $DP = DQ$ , а  $\angle PDQ = 90^\circ$ . Найдите  $\angle DCB$ , если известно, что  $\angle DBC = 35^\circ$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5) Из уравнения (2) получаем:

$$xy + xz + yz = x^2 + y^2 + z^2 + 4(x + y + z) = x^2 + y^2 + z^2 - 16$$

6) <Зерное тождество>:

$$\left[ \frac{(x+y+z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}{2} = xy + xz + yz \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16 - (x^2 + y^2 + z^2) = 2(xy + xz + yz)$$

$$\Rightarrow \{x^2 + y^2 + z^2 - 16 = -2(xy + xz + yz)\}$$

7) Из п. 5 и п. 6:  $-2(xy + xz + yz) = xy + xz + yz$

$$\Rightarrow xy + xz + yz = 0$$

8) Из п. 7 и п. 4 получаем:

$$32 + xy + xz + yz = 32 \text{ - значение искомого выражения}$$

Ответ: 32



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2 & (1) \\ yz = 4x + x^2 \\ xz = 4y + y^2 \end{cases}$$

1) сложим уравнения, получим:

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + yz - 4(x + y + z) \quad (2)$$

2) перемножим уравнения, получим:

$$x^2 y^2 z^2 = xyz(x+4)(y+4)(z+4) \quad (x, y, z \neq 0 \text{ по условию})$$

$\Rightarrow xyz = (x+4)(y+4)(z+4)$ ; подставим  $xy$  из уравнения (1), получим:

$$z^2(z+4) = (x+4)(y+4)(z+4)$$

3) Если  $z = -4$ :  $xy = -16 + 16 = 0 \Rightarrow$  одно из  $x, y = 0$ ,

что противоречит условию  $\Rightarrow z \neq -4 \Rightarrow$

$\Rightarrow z^2 = (x+4)(y+4)$  - подставим  $z^2$  в уравнение (1):

$$(x+4)(y+4) + 4z = xy \Rightarrow$$

$$xy + 4x + 4y + 16 + 4z = xy \Leftrightarrow z = -x - y - 4 \Rightarrow$$

4)  $x + y + z = -4$ .  $\Rightarrow \begin{cases} x = -4 - z - y \\ y = -4 - x - z \\ z = -4 - x - y \end{cases}$   $\rightarrow$  подставим  
висканое выражение, получим:

$$(-x-y)^2 + (-x-z)^2 + (-y-z)^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2)$$

+  $2(xy + xz + yz)$ ; подставим (2) и получим:

$$2(x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + xz + yz) = (x+y+z)^2 + xy + yz + xz - 4(xy + yz)$$

$$= 3z + xy + xz + yz$$







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черпунком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Пусть коробок всего:  $n$

2) Вероятность величина, когда выбираются  $x$  коробок (считаем, что  $x > 3$ , что ясно из условия) равна:  $\frac{[\text{Кол-во благоприятных вариантов}]}{[\text{Кол-во всех вариантов}]}$

При выборе  $x$  коробок ~~не~~ благоприятных вариантов:  $C_{n-3}^{x-3}$  (обязательно нужно взять коробки с шариками, остальные коробки могут быть пустыми)

а всего вариантов, очевидно:  $C_n^x$

3) Ч.н.з получаем отношение, необходимое

для ответа  $\frac{C_{n-3}^5}{C_n^8} \cdot \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}$  (отношение вероятности при  $x=8$  к вероятности при  $x=5$ )

$$\frac{C_{n-3}^5}{C_n^8} \cdot \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{(n-3)(n-4) \cdot \dots \cdot (n-7) \cdot 8!}{5! \cdot n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-7)} \cdot \frac{2! \cdot n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-4)}{5! \cdot (n-3)(n-4)}$$

$$= \frac{8! \cdot 2!}{5! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 5,6$$

Ответ: 5,6



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3)  $\alpha = 2$ , уравнения примут вид:

(1)  $x^2 - 2x - 2 = 0$  (2)  $2x^2 - 4x - 148 = 0$

~~(1)~~ (1) ~~на~~  $D = 4 + 8 = 12$

$$x_{1,2} = \frac{\cancel{1} \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

(2)  $x^2 - 2x - 74 = 0$

$$D = 4 + 296 = 300$$

$$x_{3,4} = \frac{2 \pm \sqrt{300}}{2} = 1 \pm \sqrt{75} = 1 \pm 5\sqrt{3}$$

Эти значения подпадают к прогрессии с первым членом  $1 - 7\sqrt{3}$  и разностью  $2\sqrt{3}$ :

$1 - 7\sqrt{3}$ ;  $1 - 5\sqrt{3}$ ;  $1 - 3\sqrt{3}$ ;  $1 - \sqrt{3}$ ;  $1 + \sqrt{3}$ ;  $1 + 3\sqrt{3}$ ;  $1 + 5\sqrt{3}$   
①, ②, ③, ④, ⑤, ⑥, ⑦

Ответ:  $\alpha = 2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Пусть первый член данной прогрессии равен  $x$ , а ее разность равна  $d$ . Тогда ее члены с номерами 4, 5, 2, 7 равны соответственно:  $x+3d, x+4d, x+d, x+6d$ , но тогда сумма членов 4 и 5 равна сумме членов 2 и 7.

2) Пусть корни первого уравнения равны  $x_1$  и  $x_2$ ; а второго:  $x_3$  и  $x_4$ . Тогда из п. 1

получим:  $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$ , ~~тогда~~ из п.

$$\text{Здесь получаем: } \alpha^2 - \alpha = \frac{\alpha^3 - \alpha^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\alpha(\alpha - 1) = \alpha^2(\alpha - 1) \Rightarrow \alpha(\alpha - 1)(2 - \alpha) = 0 \Rightarrow$$

$\alpha$  принимает одно из трёх значений:

0, 1, 2.

1)  $\alpha = 0$ , уравнения примут вид:

$$(1) x^2 + \frac{2}{3} = 0 \quad \text{и} \quad (2) 2x^2 - 4 = 0$$

~~(1)  $x^2 + \frac{2}{3} = 0$~~  (1) - не имеет решений  $x^2 \neq -\frac{2}{3}$

2)  $\alpha = 1$ , уравнения примут вид:

$$(1) x^2 + \frac{1}{3} \quad (2) 2x^2 - 14 = 0$$

(1) - не имеет решений  $x^2 \neq -\frac{1}{3}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

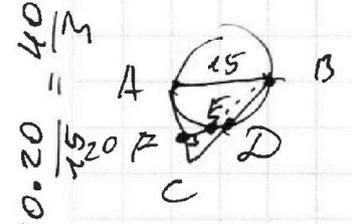
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x = 10.20 = \frac{40}{3}$

$$(10^{25000} - 1)^3 = (10^{25000})^3 - 3 \cdot (10^{25000})^2 + 3 \cdot 10^{25000} - 1$$



99...97299...9

$$5 \cdot 2^3 \rightarrow 5^{15} \cdot 2^9$$

$$5 \cdot 2^9 \rightarrow 5^{10} \cdot 2^6 \text{ нулей } = 3$$

$$\frac{C_{n-6}^2}{h-2}$$

$n \rightarrow 3$  (1)

5605. 8605. 88

$\times 99997-19$

9...9991

$$- 10 \dots 0$$

$$+ 30 \dots 0$$

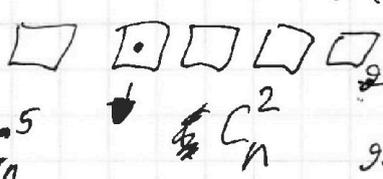
$$+ 30 \dots 0$$

$$- 1$$

$$= 10 \dots 0$$

$$5^{15} \cdot 2^9 \leq 5^{10} \cdot 2^6$$

$x = \frac{40}{3}$



9999...970000

$$999 \cdot 6 \cdot 9$$

$$25000z$$

$$33000$$

$$9299$$

$C_{n-2}^2$  формул.  $y = \frac{115}{15} = \frac{23}{3}$

$C_{n-5}^5$  формул.  $\frac{\sqrt{115}}{y} = \frac{15}{\sqrt{115}}$

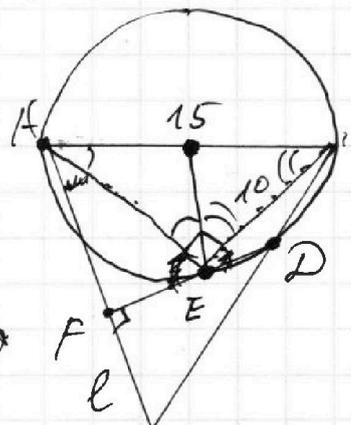
$$\frac{x}{y} = \frac{15}{\sqrt{115}}$$

A F-7

$$\frac{20}{15} = \frac{x}{10}$$

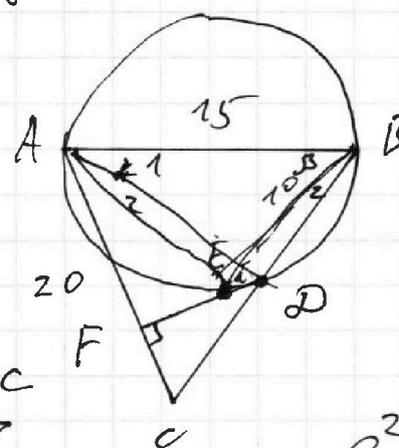
$$(10^{25000})^3 - (10^{25000})^2 + 1 + 10^{25000}$$

1)  $\angle AEB = 90^\circ \Rightarrow d \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{15}{\sqrt{115}}$



$AC=20$   
 $AD=10$   
 $DC=10$

$AE = \sqrt{115}$



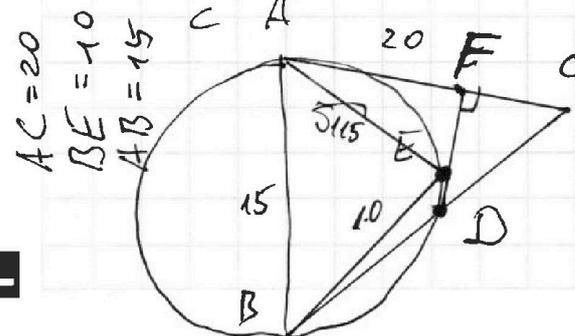
1)  $\angle AEB = 90^\circ \Rightarrow AE = \sqrt{115}$

2)  $\angle BAE$

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ$

$\angle 1 + 90^\circ + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$

$15 \cdot 20 = 7DC =$



$AC=20$   
 $BE=10$   
 $AB=15$

$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^5}$  формул.  $\frac{5}{C_{n-5}^8}$

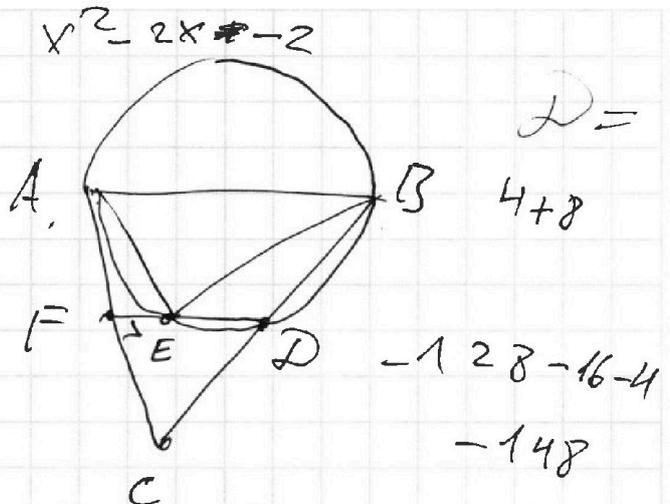
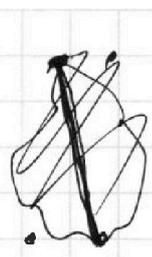
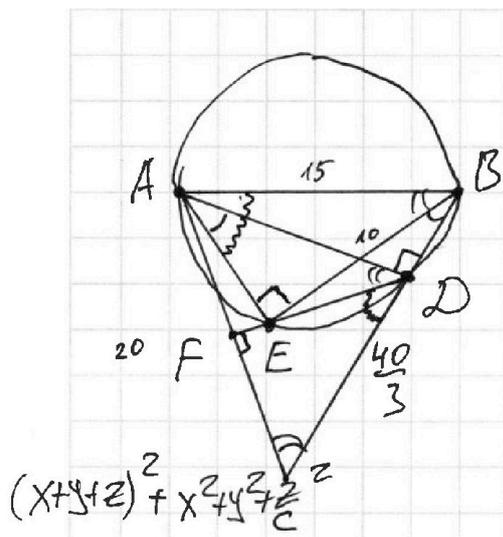


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) проведем AD и AE:

$$xyz = (x+y)(y+z)(z+x)$$

$$z = -4$$

$$x_1, x_2 = \dots$$

$$z^2 = (x+y)(y+z)$$

$$x+y+z = -4$$

$$x = -y$$

$$xy = 4z + xy + 16 + 4y + 4x$$

$$-y^2 = 0$$

$$y = 0 \quad (x+y)^2 + (x+z)^2 + (y+z)^2 =$$

$$z = -x - y - 4$$

очнов!  $x = -y - z - 4$

$$y = -x - z - 4$$

$$(x+y+z)^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 296$$

$$x+y+z = -2x - 2y - 2z - 12$$

$$= 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2(xy+xz+yz)$$

$$3x + 3y + 3z = 12$$

$$= (x+y+z)^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

$$x+y+z = -4 \quad 1-5\sqrt{3} \quad 1-\sqrt{3}; \quad 1+\sqrt{3}$$

$$z^2 - z(x+y+z) = xy$$

$$16 + x^2 + y^2 + z^2$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

$$-\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$8-4 \quad x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + yz - 4x - 4y - 4z$$

$$3z + xy + xz + yz$$

$$4(xy + xz + yz)$$

$$2x^2 - 4x - 128 - 16 - 4 \quad 2(x+y+z)^2 - 2xy - 2xz - 2yz$$

$$-148$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦  
 $\alpha$   $\alpha+2d$   $\alpha+3d$   $\alpha+5d$

$$\begin{aligned} xy &= 4z + z^2 \\ xz &= 4y + y^2 \\ yz &= 4x + x^2 \end{aligned}$$

$$x^2 - (\alpha^2 - \alpha)x + \frac{2 - \alpha^3}{3} = 0$$

$$x^2 y^2 z^2$$

$$2x^2 - (\alpha^3 - \alpha^2)x - 2\alpha^6 - 8\alpha - 4 = 0$$

$$\begin{aligned} xyz &= (x+4)(y+4)(z+4) \\ x+y+z &= -4 \end{aligned}$$

$$x+y+z = -4$$

$$2(x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + xz + yz)$$

$$2(xy + xz + yz) = 2(x^2 + y^2 + z^2) + 4(x+y+z)$$

$$x^2 - (\alpha^2 - \alpha)x + \frac{2 - \alpha^3}{3} = 0$$

$$2x^2 - (\alpha^3 - \alpha^2)x - 2\alpha^6 - 8\alpha - 4 = 0$$

$$D_1 = (\alpha^2 - \alpha)^2 - \frac{4}{3}(2 - \alpha^3) = \alpha^4 - 2\alpha^3 + \alpha^2 - \frac{8}{3} + \frac{4}{3}\alpha^3$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{D_1}}{2}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc} \alpha \rightarrow \alpha+d & \alpha+6d & 2\alpha+7d \\ & \alpha+3d & \alpha+4d \end{array} \right]$$

$$x_{3,4} = \frac{-2 \pm \sqrt{D_2}}{2}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{4(\alpha^2 - \alpha)}{2} = 2(\alpha^2 - \alpha)$$

$$x_3 + x_4 = \frac{\alpha^3 - \alpha^2}{2}$$

$$\alpha^2 - \alpha = \frac{\alpha^3 - \alpha^2}{2}$$

$$2\alpha(\alpha - 1) = \alpha^2(\alpha - 1)$$

$$\alpha(\alpha - 1)(2 - \alpha) = 0$$

$$\alpha \neq 2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2 \\ yz = 4x + x^2 \\ \cancel{xz = 4y + y^2} \end{cases}$$

$$xyz \neq (x+4)(y+4)(z+4)$$

$$\cancel{x+y+z = -4}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \neq 16$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \cancel{16} + xy + xz + yz$$

$$\frac{(x+y+z)^2 - x^2 - y^2 - z^2}{2} = xy + xz + yz$$

$$\frac{16 - x^2 - y^2 - z^2}{2} = xy + xz + yz$$

$$-(xy + xz + yz)$$

$$-16 + x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + yz \neq 16$$

$$\frac{(x+y+z)^2 - x^2 - y^2 - z^2}{2} = xy + xz + yz$$

$$16 - (x^2 + y^2 + z^2) = 2(xy + xz + yz)$$