



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x + 4)^2 + (y + 4)^2 + (z + 4)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 15$, $BE = 10$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарик. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$ являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$ являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| + \left|y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leq 6$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle DBC = 35^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Мы рассмотрим $x, y, z \neq 0$

$$xy = 4z + z^2 \quad ; \quad yz = 4x + x^2$$

$$y(x-z) = 4(z-x) + (z-x)(z+x)$$

$$(z-x)(4+x+y+z) = 0$$

~~мы~~ ~~также~~ ~~делаем~~
для всех пар уравнений
вместе

$$(x-y)(4+x+y+z) = 0$$

Заметим это если x, y, z одновременно не равны друг другу, то одна из скобок

всегда $x-y$ будет не равной нулю поэтому
① $x+y+z = -4$ или $x=y=z$ (могут быть одновременно)

если $x=y=z$ то: $x^2 = 4x + x^2 \Rightarrow x=0$ ~~невозможно~~

$$② \quad x+y+z = -4$$

$$z = -4 - x - y \quad ; \quad xy = (x+y+4)(x+y) \Rightarrow$$

$$xy = x^2 + y^2 + 4x + 4y + 2xy \Rightarrow 0 = (x+y)^2 + 4(x+y) - xy$$

$$x+y=t \quad ; \quad t^2 + 4t - (4z + z^2) \quad ; \quad 16 + 4(4z + z^2) = 0$$

$$16 + 16z + 4z^2 = (2z + 4)^2 \quad ; \quad t = \frac{-4 \pm \sqrt{2z+4}}{2}$$

$$① \quad \frac{-4 + \sqrt{2z+4}}{2} = t$$

$$z = -4 - z$$

$$2z = -4$$

$$z = -2$$

$$② \quad \frac{-4 - \sqrt{2z+4}}{2} = t$$

$$4 - z = z$$

сумма корней -4 один
корень -2 значит другой

тоже -2

$$-4 - z = -2$$

$$z = -2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$z = -2.$$

$$x + y + z = -4$$

$$x + y = -2$$

$$x = -2 - y$$

$$\begin{aligned} 2y &= x(x+y) \\ (2-y)(2-y) + 2y &= 0 \\ 4 - 4y + y^2 + 2y &= 0 \\ y^2 - 2y + 4 &= 0 \end{aligned}$$

$$-2y = (-2-y)(2-y) = (2+y)(y-2)$$

$$y^2 + 2y - 4 = 0$$

$$D = 4 + 16 = 20.$$

$$① y_1 = \frac{-2 + \sqrt{20}}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$② y_2 = -1 - \sqrt{5}$$

$$① x = 1 - \sqrt{5}$$

$$① x = 1 + \sqrt{5}$$

подставим x, y и z в $6xy = 4z + z^2$

$$(3 - \sqrt{5})^2 + (3 + \sqrt{5})^2 + 2^2 =$$

$$-(7 + 2\sqrt{5}) = -8 + 4 \text{ — неправда.}$$

$$= 9 + 5 + 9 + 5 + 4 =$$

$$= 32$$

это симметричная система в переменных

ответ: 32.

вернее
на
значит
 x, y, z



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2 - a^3}{2} = (x - x_1)(x - x_2)$$

$$2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^3 - 6a - 4 = 2(x - x_3)(x - x_4)$$

Всё парная обобщности: $x_1 = b + 3k$, $x_2 = b + 4k$

$$x_3 = b + k; \quad x_4 = b + 6k.$$

то есть b - первый член прогрессии, k - её шаг.

$$x_1 + x_2 = a^2 - a; \quad x_3 + x_4 = \frac{a^3 - a^2}{2}$$

$$x_1 + x_2 = b + 7k = x_3 + x_4$$

$$2a^2 - 2a = a^3 - a^2$$

$$a^3 - 3a^2 + 2a = 0$$

$$a(a^2 - 3a + 2) = 0$$

~~если~~ если $a \neq 0$,

$$a^2 - 3a + 2 = 0.$$

Решим квадратное уравнение корни 1 и 2.

при $a=0$
 $x^2 - \frac{2}{3} = 0$ - 2 корня
 $x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$

при $a=1$
 $x^2 + \frac{1}{3} = 0$ - 2 корня
 $x = \pm \sqrt{-\frac{1}{3}}$

при $a=2$
 $x^2 - 2x - 2 = 0$
 $x_1 = 1 - \sqrt{3}$, $x_2 = 1 + \sqrt{3}$.

если $a \neq 0, 1, 2$
 $2x^2 - 4 = 0$
 $x^2 = 2$
 x_3, x_4 - не 0
 не взаимно простые

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 2$$

$$2x_2 - 4x - 2 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2 - 4 = 0$$

$$\frac{-4}{2} = -x_3 + x_4$$

$$k = 2\sqrt{3}; \quad b = 1 - 7\sqrt{3}$$

пример.

шаг равен $2\sqrt{3}$, а $b = 1 - 7\sqrt{3}$

Ответ: $a = 2$

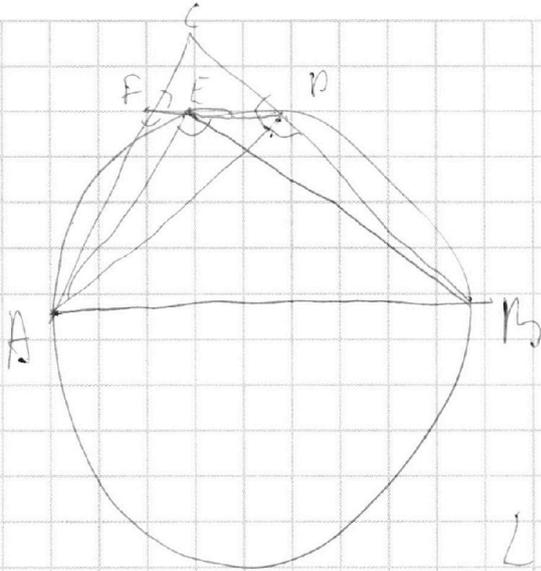


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AC = 20, AB = 15, AE = 10$$

$$\angle FAD = 90 - \angle FDA$$

$$\angle FDA = \angle EBA$$

ввиду вписанности $\angle EBA$

$$\angle EAM = 90 - \angle EBA$$

$$\angle FAD = \angle EAM = \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{EB}{AB}, \quad \sin \alpha = \frac{CD}{AC}$$

$$\frac{CD}{AC} = \frac{EB}{AB} \Rightarrow CD = \frac{AC \cdot EB}{AB} = \frac{200}{15} = \frac{40}{3}$$

$$AD = \sqrt{400 - \frac{1600}{9}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 400}{9}} = \frac{20}{3} \sqrt{5}$$

$$AE = \sqrt{15^2 - 10^2} = 5\sqrt{5} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{5} \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{AE}{AB}$$

$$\begin{aligned} \text{APPL} \quad \cos \alpha &= \frac{AF}{AD} \Rightarrow AF = AD \cdot \cos \alpha = \\ &= \frac{20}{3} \cdot \frac{20}{3} \cdot \sqrt{5} = \frac{100}{3} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{100}{3}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

В этой игре количество способов выбрать 5 коробок — это C_n^5 , где n — кол-во коробок.

Выводов в 6 случаях $C_3^3 \cdot C_{n-3}^2 = C_{n-3}^2$

выводов с мансом: $\frac{(n-3)!}{2 \cdot (n-5)!}$

$$= \frac{\cancel{(n-3)} \cdot \cancel{(n-4)}}{2} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{\cancel{n} \cdot \cancel{(n-1)} \cdot \cancel{(n-2)} \cdot \cancel{(n-3)} \cdot \cancel{(n-4)}} = \frac{60}{n(n-1)(n-2)}$$

в случае с нашим игроком.

кол-во способов: C_n^8 , а выигранные только:

$C_3^3 \cdot C_{n-3}^5$ манс выиграна:

$$\frac{(n-3)!}{5! \cdot \cancel{(n-5)!}} \cdot \frac{8! \cdot \cancel{(n-8)!}}{n!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{n(n-1)(n-2)}$$

увеличился манс:

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{n(n-1)(n-2)} \cdot \frac{\cancel{n} \cdot \cancel{(n-1)} \cdot \cancel{(n-2)}}{6 \cdot 10} = 5,6$$

Ответ: 5,6



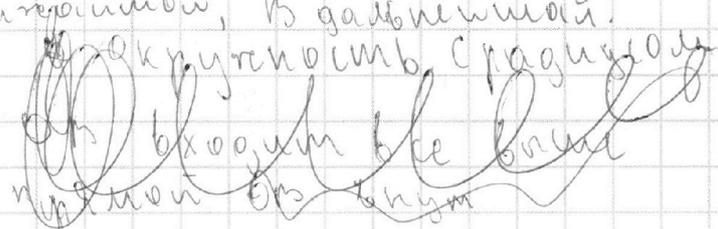
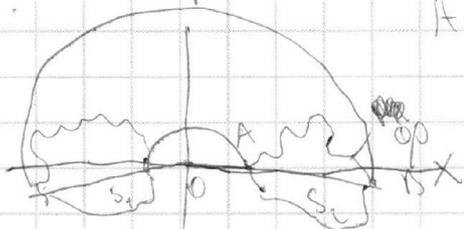
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что площадь будет равна половине площадей \odot круга около ближайшей точки \ominus минус площадь круга около наибольшей точки от поворота фигуры и еще плюс площадь этой фигуры.



В точку M входят все точки выше прямой OA и входящие в окружность с радиусом OA и с центром в O точке. а оставшаяся часть выше дает площадь фигуры \odot .

при $y - 15 - \frac{x}{\sqrt{3}} \geq 0$

$2y - 30 \leq 6$

$y - 15 \leq 3$ - прямой.

$y \leq 18$

$y > 15 + \frac{x}{\sqrt{3}}$

$x < 3\sqrt{3}$

при $y - 15 + \frac{x}{\sqrt{3}} < 0$
симметрично относительно
Y оси координат

$\frac{1}{\sqrt{3}} \leq 6 \Rightarrow \frac{x}{3\sqrt{3}} \leq 3$

$x \leq 9\sqrt{3}$

$y > 15 - \frac{x}{\sqrt{3}} ; y < 15 + \frac{x}{\sqrt{3}}$

при $y - 15 + \frac{x}{\sqrt{3}} \geq 0$

$y - 15 - \frac{x}{\sqrt{3}} < 0$

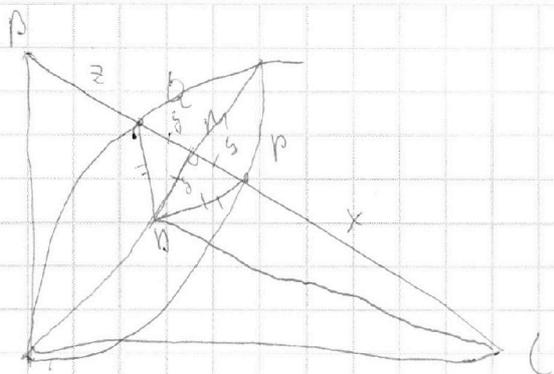


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



AM лежит на
среднем перпенди-
куляре к BP

A

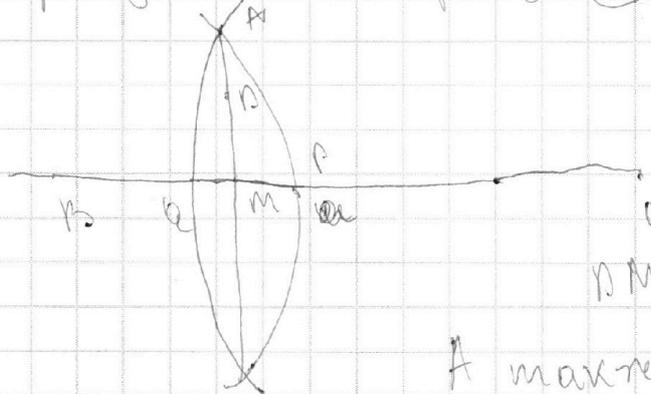
$$\sin \angle ABC = \frac{2y+x}{2y+x+z}$$

т. синусов.

$$\sin \angle ACB = \frac{2y+z}{2y+z+x}$$

~~AM - перпендикуляр A, поскольку AM~~

~~средний перпендикуляр~~



BC отрезок
соединяющий
центры окружностей

AM - перпендикуляр к BP

A также лежит на средн.

перпендикуляре к BP

AM - перпендикуляр к BC.

$$\sin \angle BCP = \sin \angle BCP = \frac{y}{y+x}; \quad \sin \angle PBC = \frac{y}{y+z}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>					

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если $AB = AC$, то BM лежит на медиане AM .
Также $\triangle ABM$ - симметричен, $\triangle AMC$
а значит $\angle AMB = 35$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x_2 = b + 2x_1$
 $x_1 = b + 4x_1$
 $x_1 = b + 4x_1$
 $x_1 = b + 6x_1$
 $a^3 - a^2 = a^2 - a$
 $2x_1 + 2x_1 = a^3 - a^2$

$$(x+4)^2 + (y+4)^2 - (z+4)^2 = 0$$

$$x^2 + 4x + 16 + y^2 + 4y + 16 + z^2 + 4z - 16 = ?$$

$$z^2 = 4y(y+4)$$

$$x^2 + 4x + y^2 + 4y + z^2 + 4z = xy + yz + zx$$

$$yz = z(y+4)$$

$$x^2 + 4x - x(y+z) + z^2 + y^2 + 4y + 4z - yz$$

$$(4-y-z)^2 - 4z^2 - 4y^2 - 4y - 4z + 4yz > 0$$

$$x^2 + 4x - yz = 0$$

$$16 + 4xy > 0$$

$$xy > -4$$

$$xy \leq 4 ; yz \leq 4 ; zx \leq 4$$

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$x \cdot (x+4) + 4(x+4) + y(y+4) + 4(y+4) + z(z+4) + 4(z+4)$$

$$yz + 4x + 16 + xy + 4z + 4y + 16 + 4z + 16 = ?$$

$$-x^2 + 2yz - y^2 + 2zx - z^2 + 2xy$$

$$0 = 12 + x + y + z$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4z + 4x + y = xy + yz + zx$$

$$z^2 = 4y + y^2$$

$x > 0, y > 0, z > 0$

$x > 0, y > 0, z < 0$

$x > 0, y < 0, z > 0$

$x > 0, y < 0, z < 0$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

3 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2x^2 - 2 - 8 - 4 = 0$$

$$-2y = 4x(4+x)$$

$$x4y = 2$$

$$x^2 = \frac{1}{3} \quad x^2 = \frac{1}{3}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{CN}{CF} = \frac{AD}{FD} = \frac{AC}{CD}$$

$$8. \frac{AC}{CD} = \frac{15}{10}$$

$$x^2 - 1 - 4 - 2 = 0$$

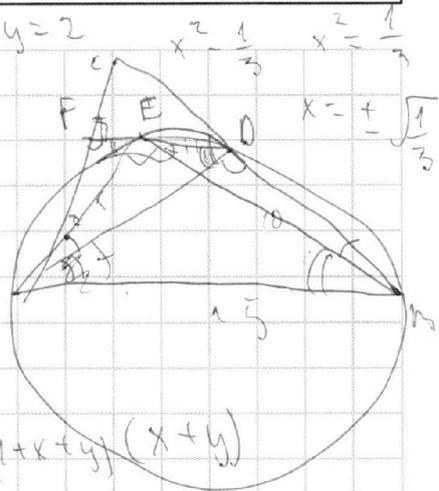
$$x^2 = 7$$

$$\frac{AD}{CF} = \frac{AC}{CD} = \frac{AD}{FD}$$

15

$$\frac{AD}{AF} = \frac{AC}{AD} = \frac{CN}{FD}$$

$$\frac{AD^2}{AC} = AF$$



C_n^5 - количество вар.

$$xy = 4 + x + 4y$$

$$xy - 4x + 4y + x^2 + y^2 = 4$$

$$C_3^1 \cdot C_{n-3}^4 + C_3^2 \cdot C_{n-3}^3 + C_3^3 + C_{n-3}^1$$

$$(n-3)! \cdot x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y + 4z$$

$$n! \cdot (n-7)! \quad + \quad 3 \cdot \frac{(n-3)!}{3! \cdot (n-6)!} \quad + \quad \frac{(n-3)!}{2! \cdot (n-5)!} \cdot (x^2 + y^2 + xy + 4(x+y))$$

$$x^2 - 2x - 2 \quad \sin 2\alpha \quad z = -y - x - 4 \quad - \text{вер. 1}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{(n-3)!}{\sin 2\alpha = 2(1 - \sin^2 \alpha) 5!(n-8)!}$$

$$\frac{AB}{\sin \angle AFB} = 2R$$

вер хороша

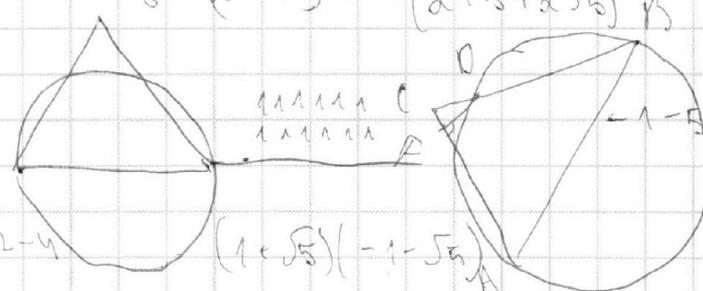
$$9 \cdot 9 \cdot 9 = 81 \cdot 9$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\frac{(n-3)!}{5!(n-10)!} + \frac{3(n-3)!}{4!(n-9)!} + \frac{(n-3)!}{5!(n-8)!}$$

$$\frac{AD}{\sin \angle ABD} = 15 \cdot \frac{(n-3)!}{8!(n-11)!} \cdot \frac{(1-\sqrt{5})(-1-\sqrt{5})}{-(2+5+2\sqrt{5})}$$

$$\frac{(n-3)!}{4!(n-7)!} + \frac{3 \cdot (n-3)!}{5!(n-8)!}$$



$$2x^2 - 4x - 2 \cdot 8 - 8 \cdot 2 - 4$$

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$$

$$16 + 16z + 4z^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$10 - a - 35$
 $180 - a - 35$

$PM = \sin 35 \cdot (7 + y)$

h^3 $h^2 \cdot n$ $110 + a$

$\sin 45 + a - \beta = \frac{2y + x}{2y + x + z}$

$(h + 10h + 100h + \dots + 10^{25000} h) \cdot n$

$h^2 + 10h^2 +$

$\frac{55 + a - \beta \cdot (2y + z + x)}{2} = R$

$10 - 35 + a - \beta$
 $55 + a - \beta$

$45 - a$