



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 & (1) \\ yz = 3x + x^2 & (2) \\ zx = 3y + y^2 & (3) \end{cases}$$

Пусть, не умаляя общности, $x \neq 0$ (симметрич отн. x, y, z).

Тогда $yz = 3x + x^2 \neq 0$, т.е. $y \neq 0$ и $z \neq 0$. Пропишем.

Тогда $3x + x^2 \neq 0$, $3z + z^2 \neq 0$, $3y + y^2 \neq 0$ и на них можно делить.

$$\begin{aligned} (1) - (2): \quad xy - yz &= z^2 - x^2 + 3(z - x) \\ (z - x)(z + x) + 3(z - x) + y(z - x) &= 0 \\ (z - x)(z + x + y + 3) &= 0. \end{aligned}$$

I. Если $z = x$

$$\begin{cases} x^2 = 3y + y^2 \\ xy = 3x + x^2 \\ xy = 3x + x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = 3y + y^2 \\ y = 3 + x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = 3y + y^2 \\ y^2 = 9 + 6x + x^2 \\ y = 3 + x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = 3y + 6x + 9 \\ y = 3 + x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = y + 2x + 3 \\ y = 3 + x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = z = -2 \end{cases}$$

Аналогично подхолим

сначала $(1; -2; -2)$ и $(-2; -2; 1)$.

Тогда $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = 18$.

II $3 + x + y + z = 0 \Leftrightarrow x + y + z = -3$

~~(1) + (2) - (3):~~

$$\cancel{xy - yz = z^2 - x^2 + 3(z - x)}$$

$$\cancel{y(x + y + z) + 3y = x^2 + z^2 + 3x + 3z + 3y}$$

$$\cancel{-3y + 3y = x^2 + z^2 + 3x + 3z + 2x}$$

$$\cancel{0 = (x+z)^2 - xz + 3(x+z)}$$

$$\cancel{xz = (x+z)(x+z+3)}$$

$$\cancel{xz = -y(x+z)}$$

~~Также $xz = y(3+y)$~~

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 6(x+y+z) + 27 = x^2 + y^2 + z^2 + 9$$

Заметим, что $yz = (3+x)x = (-y-3)(-y-3-3) = y^2 + z^2 + 3y + 3z + 2yz$, т.е.

$$y^2 + z^2 + yz + 3y + 3z = 0 \Leftrightarrow y^2 + z^2 = -3y - 3z - yz$$

Также из (2) верно $x^2 = yz - 3x$, и тогда $x^2 + y^2 + z^2 = -3x - 3y - 3z = 9$.

$$\text{Тогда } (x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = 9 + 9 = 18.$$

Пример: $x = y = -2, z = 1$.

Ответ: 18.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Число n может быть представлено в виде $10^{40000} - 1$,
так как n - самое большое 40000-значное число, и следующее
за ним натуральное как раз 10^{40000} .

Тогда верно

$$n^3 = (10^{40000} - 1)^3 = 10^{120000} - 3 \cdot 10^{80000} + 3 \cdot 10^{40000} - 1 =$$

$$= 10^{80000} (10^{40000} - 3) + (3 \cdot 10^{40000} - 1)$$

Заметим, что $10^{80000} > 3 \cdot 10^{40000} - 1$, то есть первое слагаемое

будет оканчиваться на ~~много нулей~~, ~~быть и при сложении то вырвется~~

~~статистика~~ ~~перехода через десяток не будет.~~ ~~Тогда достаточно~~

~~найти количество десятков в сумме~~ такое количество

нулей, что ~~второе слагаемое~~ все цифры в десятичной записи

второго слагаемого будут складываться с 0. Тогда после сложения
этих двух чисел ~~количество десятков~~ не будет ни перехода через
десяток, ни изменения ~~количества~~ ~~цифр~~ количества цифр, кроме нулей.

Слагаемое $10^{80000} (10^{40000} - 3)$ будет равно $\underbrace{999 \dots 9700 \dots 0}_{99999 \text{ десятков } 80000 \text{ нулей}}$,

а слагаемое $3 \cdot 10^{40000} - 1$ равно $\underbrace{299 \dots 9}_{40000 \text{ десятков}}$.

Тогда сумма будет равна $\underbrace{99 \dots 970 \dots 0}_{39999 \text{ десятков}} \underbrace{29 \dots 9}_{40000 \text{ десятков}}$. Итого ~~79999 десятков~~
~~десятков~~.

$$80000 - 40000 - 1 =$$

$$= 39999 \text{ нулей}$$

Ответ: 79999 десятков.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

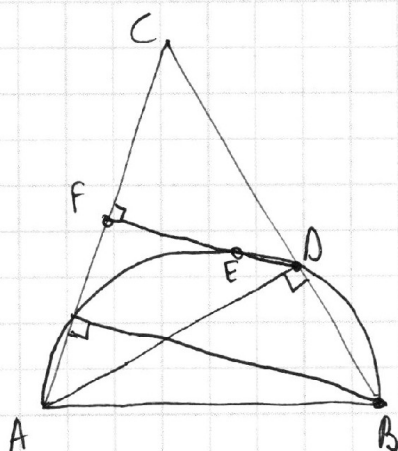
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть ведущий берет a коробок (где $a > 6$) в мешке.

Когда игрок выбирает 5 коробок, то побеждает, если выбирает 3 ~~коробка победит~~ коробки с шариками и 2 любые без них — вариантов сделать это

C_{a-3}^2 (выбрать 2 пустые из $a-3$ пустых). Всего же вариантов

выбрать 5 любых коробок C_a^5 . Тогда $P_{\text{победы}} = \frac{C_{a-3}^2}{C_a^5}$. Обозначим это за P_1 .

Когда игрок выбирает 6 коробок, то побеждает, если выбирает ровно 3 пустые и остальные с шариками. Способов сделать это — C_{a-3}^3 (выбрать 3 пустые из $a-3$ пустых), а всего вариантов выбрать 6 коробок из a составит C_a^6 . Тогда вероятность победы $P_2 = \frac{C_{a-3}^3}{C_a^6}$.

Требуется найти $\frac{P_2}{P_1}$, равное

$$\begin{aligned} \frac{P_2}{P_1} &= \frac{\frac{C_{a-3}^3}{C_a^6}}{\frac{C_{a-3}^2}{C_a^5}} = \frac{C_{a-3}^3 \cdot C_a^5}{C_{a-3}^2 \cdot C_a^6} = \frac{C_{a-3}^3 \cdot C_a^5}{C_{a-3}^2 \cdot C_a^6} = \frac{(a-3)!}{3! \cdot (a-6)!} \cdot \frac{a!}{5! \cdot (a-5)!} = \frac{2 \cdot 5! \cdot (a-5)! \cdot (a-5)!}{6 \cdot 6! \cdot (a-6)! \cdot (a-6)!} \\ &= \frac{2 \cdot 6!}{6 \cdot 5!} = 2 \end{aligned}$$

Ответ: 2 раза.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть соответствующие корни являются членами последовательности $\{d_i\}$, где $d_1 = 6$, $d_{i+1} = d_i + k$ или $d_i = 6 + k(i-1)$.

Заметим, что $d_5 + d_6 = d_3 + d_8$, т.к. $6 + 4k + 6 + 5k = 6 + 2k + 6 + 7k = 2b + 9k$.

По т. Виета, сумма корней первого трёхчлена равна $a^2 - a$, а второго $\frac{a^3 - a^2}{4}$.

$$\text{Тогда } a(a-1) = \frac{a^2(a-1)}{4},$$

$a(a-1)(4-a) = 0$. Тогда $a = 0$ или $a = 1$ или $a = 4$.

Пусть $f(x) = x^2 - (a^2 - a)x + a - 5$; $g(x) = 4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4$.

~~Если $a = 0$, то~~

~~$x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = x^2 - 5$, корни $\pm\sqrt{5}$~~

~~$g(x)$~~

$$\Delta_f = (a^2 - a)^2 - 4(a - 5) = a^4 - 2a^3 + a^2 - 4a + 20$$

$$\Delta_g = (a^3 - a^2)^2 - 16(2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4) = a^6 - 2a^5 + a^4 - 32a^4 - 32a^2 + 16a^6 + 64 = 17a^6 - 2a^5 - 31a^4 - 32a^2 + 64$$

$\Delta_f > 0$ при $a = 0$, $a = 1$ или $a = 4$ (равен 20, 16 и $4^3 \cdot 2 + 20$ соотв.)

$\Delta_g > 0$ при $a = 0$ и $a = 1$ (равен 64 и $17 - 2 - 31 - 32 + 64 = 16$ соотв.),

при $a = 4$:

$$\Delta_g = (64 - 16)^2 - 16(2 \cdot 4^4 + 2 \cdot 4^2 - 4^6 - 4) = 48^2 - 16(4^4(2 - 16) + 28) =$$

$$= 48^2 + 16 \cdot 78 \cdot 4^4 - 28 > 0$$

~~Тогда каждое из возможных значений a подходит.~~

~~Отв. $\{0; 1; 4\}$.~~

При $a = 0$:

$f(x) = x^2 - 5$, $\alpha_{1,2} = \pm\sqrt{5}$; $g(x) = 4x^2 - 4$, $\beta_{1,2} = \pm 1$. (α_1 и α_2 — корни $f(x)$, β_1 и β_2 — корни $g(x)$).

Не ~~бита~~ подходит, так как $\alpha_1 < \beta_1 < \beta_2 < \alpha_2$,

потому ~~приним~~ что 3-й член последовательности, т.е. β_1 или β_2 , должен быть наибольшим или наименьшим из 4-х чисел.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тип $a=1$

$$f(x) = x^2 - 4, \alpha_1 = -2, \alpha_2 = 2.$$

$$g(x) = 4x^2 - 1, \beta_1 = -\frac{1}{2}, \beta_2 = \frac{1}{2}.$$

Получаем $\alpha_1 < \beta_1 < \beta_2 < \alpha_2$, zero не может быть, как мы видели ранее.

Тип $a=4$:

$$f(x) = x^2 - 12x - 1, \text{ корни } \alpha_1 = 6 - \sqrt{37}, \alpha_2 = 6 + \sqrt{37}$$

$$g(x) = 4x^2 - 48x + 2 \cdot 4^4 + 2 \cdot 4^2 - 4^6 - 4 = 4x^2 - 48x + 4^4(2 - 16) + 28 =$$

$$= 4x^2 - 48x - 14 \cdot 256 + 28 = 4x^2 - 48x - 14(256 - 2) = 4x^2 - 48x - 14 \cdot 254$$

$$\Delta_g = \sqrt{48^2 + 4 \cdot 4 \cdot 14 \cdot 254} = 4\sqrt{12^2 + 14 \cdot 254} = 8\sqrt{6^2 + 7 \cdot 127} =$$

$$= 8\sqrt{925} = 8 \cdot 5\sqrt{37} = 40\sqrt{37}.$$

$$\text{Получа } \beta_1 = \frac{48 - 40\sqrt{37}}{8} = 6 - 5\sqrt{37}, \beta_2 = \frac{48 + 40\sqrt{37}}{8} = 6 + 5\sqrt{37}.$$

Получа $\exists \{d_i\}$, такое что $\beta_1 = d_3, \beta_2 = d_8, \alpha_1 = d_5, \alpha_2 = d_6$.

$$b = 6 - 9\sqrt{37}, k = 2\sqrt{37}, d_i = b + k(i-1).$$

Ответ: $a=4$.

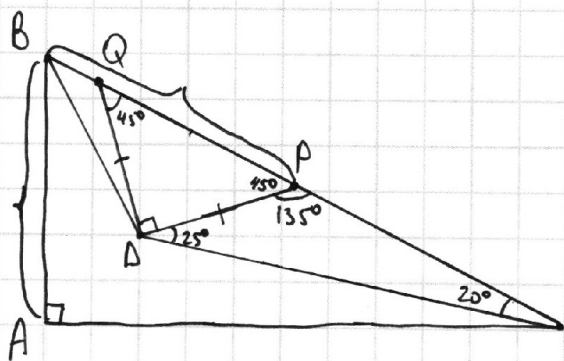


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



① точки B, Q, P, C расположить

в такой последовательности, так как

$AB + AC > BC$ по нер. треугольника.

② $\triangle DPQ$ - прямоугольный и

равнобедренный, тогда $\angle OQP =$

$= \angle DPQ = 45^\circ$. Отсюда $\angle DPC = 180^\circ - \angle DPQ = 135^\circ$, $\angle PDC = 180^\circ - \angle DPC - \angle PCQ = 180^\circ - 135^\circ - 20^\circ = 25^\circ$.

$$\begin{array}{l} x^2 \\ 4 \quad x^2 - 5 \\ 4x^2 - 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} -\sqrt{5} \quad \sqrt{5} \\ \pm 1, \pm \sqrt{5} \end{array}$$

a

$$\Delta = (a^2 - a)^2 - 4(a - 5)$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

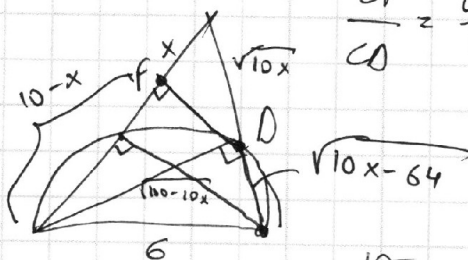
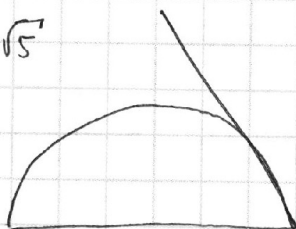
$$-\frac{6}{a}$$

$$a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{4}$$

$$4a(a-1) = a^2(a-1)$$

$$(a-1)(a^2 - 4a) = 0$$

$$a(a-1)(a-4) = 0$$



$$\frac{CF}{CD} = \frac{CD}{10}$$

$$\sqrt{10x - 64}$$

$$10x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒2
☒3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (1) & xy = 3z + z^2 \\ (2) & yz = 3x + x^2 \\ (3) & zx = 3y + y^2 \end{cases}$$

Если хоть одно из $x, y, z = -3$ (пусть, не улавливая общности, $x = -3$), то $yz = 3x + x^2 = 0$, т.е. y или z равны 0, что противоречит условию. Тогда x, y, z не равны -3 .

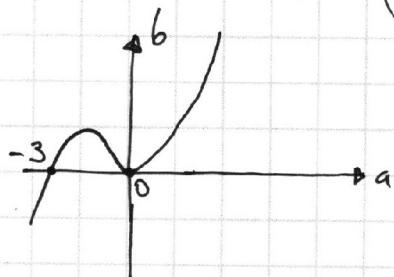
~~Если хоть одно из $x, y, z = -3$ (пусть, не улавливая общности, $x = -3$), то $yz = 3x + x^2 = 0$, т.е. y или z равны 0, что противоречит условию. Тогда x, y, z не равны -3 .~~

~~Если хоть одно из $x, y, z = -3$ (пусть, не улавливая общности, $x = -3$), то $yz = 3x + x^2 = 0$, т.е. y или z равны 0, что противоречит условию. Тогда x, y, z не равны -3 .~~

$$\text{или } x^2(3+x) = z^2(3+z).$$

Аналогично найдем $y^2(3+y) = x^2(3+x)$, т.е.

$y^2(3+y) = x^2(3+x) = z^2(3+z)$. График функции $a^3 + 3a^2$ имеет вид



, т.к. пока $a \geq -3$, то $a^3 + 3a^2 \geq 0$, и корни являются -3 и 0 .

$$x = z = y = 3$$