



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Ненулевые числа  $x, y, z$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения  $(x + 3)^2 + (y + 3)^2 + (z + 3)^2$ , если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа  $n$  состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа  $n^3$ ?
3. [5 баллов] Окружность  $\omega$  с диаметром  $AB$  пересекает сторону  $BC$  остроугольного треугольника  $ABC$  в точке  $D$ . Точка  $F$  выбрана на отрезке  $AC$  так, что  $DF \perp AC$ , а  $E$  — точка пересечения отрезка  $DF$  с окружностью  $\omega$ , отличная от  $D$ . Найдите  $AF$ , если  $AC = 10$ ,  $AB = 6$ ,  $BE = 5$ .
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шару. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых корни уравнения  $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$  являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения  $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$  являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура  $\Phi$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют неравенству  $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leq 3$ . Фигуру  $\Phi$  непрерывно повернули вокруг начала координат на угол  $\pi$  против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура  $\Phi$  при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе  $BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  выбраны точки  $P$  и  $Q$  так, что  $AB = BP$ ,  $AC = CQ$ . Внутри треугольника  $ABC$  выбрана точка  $D$ , для которой  $DP = DQ$ , а  $\angle PDQ = 90^\circ$ . Найдите  $\angle DBC$ , если известно, что  $\angle DCB = 20^\circ$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1.

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ xz = 3y + y^2 \\ yz = 3x + x^2 \end{cases}$$

Заметим, что если подберем  $(x; y; z)$ , то подберем и любую перестановку этой тройки чисел.

Если среди  $x, y, z$  все числа равны, то  $\begin{cases} x^2 = 3x + x^2 \\ x^2 = 3x + x^2 \\ x^2 = 3x + x^2 \end{cases} \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x = 0$ , противоречие с условием.

Если среди  $x, y, z$  два числа совп., оставшееся не равно им.

Пусть  $x = y$  Ф.О.О.:  $\begin{cases} x^2 = z^2 + 3z \\ xz = x^2 + 3x \\ xz = x^2 + 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = z^2 + 3z \\ xz = x^2 + 3x \end{cases} \Rightarrow xz = z^2 + 3z + 3x \Rightarrow$

$\Rightarrow x(z-3) = z^2 + 3z$ . При  $z=3$ :  $x \cdot 0 = 18$  - такого действ. числа.

При  $z \neq 3$ :  $x = \frac{z^2 + 3z}{z-3} \Rightarrow \frac{(z^2 + 3z)^2}{(z-3)^2} = \frac{(z^2 + 3z)(z-3)^2}{(z-3)^2} \Leftrightarrow \frac{(z^2 + 3z)(z^2 + 3z - z^2 - 6z - 9)}{(z-3)^2}$

$= 0 \Leftrightarrow \frac{z(z+3)(4z-9)}{(z-3)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{(z+3) \cdot z \cdot (z-1) \cdot (-1)}{(z-3)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} z=3, x=y=0 - \text{не подходит} \\ z=0 - \text{не подходит} \\ z=1, x=y = \frac{4}{-2} = -2. \end{cases}$

$(-2; -2; 1)$  ~~и все перестановки~~ подп.

Проверка:  $\begin{cases} x=1+3 \\ -2 = -6+4 \\ -2 = -6+1 \end{cases}$  - подп.  $\Leftrightarrow (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 = 1^2 + 1^2 + 4^2 = 18$ .

Заметим, что при перестановке чисел в тройке знак.

$(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2$  - все изл. нечетны.

Если среди  $x, y, z$  нет совп. чисел:

Возьмем наибольшее из чис Ф.О.О. Пусть это  $x$ , тогда

$x^2 + 3x = \frac{x \cdot x}{y} > 4z \Rightarrow x^2 + 3x > 4z \Rightarrow$  при различных  $x, y$  и  $z$  не может.

Ответ: 18.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2.

$$n = \underbrace{999\dots 99}_{40000} = 10^{40000} - 1$$

Обозначим  $k$  зад  $40000$ , тогда  $n = 10^k - 1$ ,  $n^3 = (10^k - 1)^3 = 10^{3k} - 3 \cdot 10^{2k} + 3 \cdot 10^k - 1$

$$10^{3k} = \underbrace{1000\dots 00}_{3k}, \quad 3 \cdot 10^{2k} = \underbrace{3000\dots 00}_{2k}, \quad 10^{3k} - 3 \cdot 10^{2k} = \underbrace{999\dots 97000\dots 0}_{k-1 \quad 2k}$$

$$3 \cdot 10^k = \underbrace{3000\dots 00}_k, \quad 3 \cdot 10^k - 1 = \underbrace{29999\dots 99}_{k-1}$$

~~10^{3k} - 3 \cdot 10^{2k} + 3 \cdot 10^k - 1~~ Тут заметим  $10^{3k} - 3 \cdot 10^{2k}$  и  $3 \cdot 10^k - 1$  т.е.  $k-1$  и  $2k$ , то

последние  $k-1$  нулей (таких чисел  $3 \cdot 10^k - 1$ ,  $10^{3k} - 3 \cdot 10^{2k} + 3 \cdot 10^k - 1 =$

$$= \underbrace{999\dots 997000\dots 00}_{k-1} \underbrace{29999\dots 99}_{k-1} \underbrace{99}_{k}$$

Итого девяток -  $k-1 + k = 2k-1 = 79999$

Ответ: 79999



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

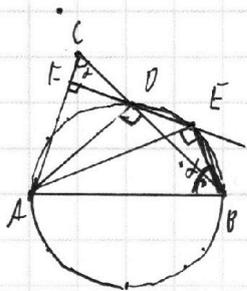
СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 3.

Дано:

$\triangle ABC$  - о/у  $\triangle$   
 $\omega$  - оокр., пос-  
 трена на  $AB$ ,  
 как по условию.  
 $BC \cap \omega = D, DE$  -  
 перпенд. к  $AC$ ,  
 $DE \cap \omega = E$   
 $AC = 10, AB = 6$ ,  
 $BE = 5$



1) Пусть  $\angle ACB = \alpha$ , тогда в н/у  $\triangle OFC$   $\angle FOC = 90^\circ - \alpha$  (по св-ву н/у  $\triangle$ ).

Найти:  
 $AE$

2)  $\angle COF = \angle BOE = 90^\circ - \alpha$  (как вертикальные углы).

3)  $\angle AOB = 90^\circ$  (т.к.  $AB$  - диаметр, т.  $O$  - ц.к., по ТМТЦ окружности)

4)  $\angle AOE = \angle AOB + \angle BOE = 90^\circ + 90^\circ - \alpha = 180^\circ - \alpha$ , т.т.к. т.  $A, O, E, B \in \omega$

~~$\triangle AOE$~~   
 $\Rightarrow AOE$  - вписанный четырехугол., но св-ву впис. четырехугол.,  $\angle AOE + \angle ABE = 180^\circ \Rightarrow \angle ABE = 180^\circ - \angle AOE = \alpha$

5) Треб.  $AE$ ,  $AB$  - диаметр,  $E \in \omega \Rightarrow \triangle AEB$  - н/у (по ТМТЦ окружности)

$$\cos \angle ABE = \cos \alpha = \frac{BE}{AB} = \frac{5}{6}$$

6)  $\angle COA$  и  $\angle AOB$  смежные углы,  $\angle COA + \angle AOB = 180^\circ \Rightarrow \angle COA = 180^\circ - \angle AOB = 90^\circ$

$$\Rightarrow \triangle AOC - \text{н/у } \triangle, \cos \angle ACO = \cos \alpha = \frac{CO}{AC} \Rightarrow CO = AC \cdot \cos \alpha = 10 \cdot \frac{5}{6} = \frac{50}{6} = \frac{25}{3} = 8 \frac{1}{3}$$

7) Метрические соотношения в н/у  $\triangle$ :  $AC \cdot CF = CO^2 \Rightarrow CF = \frac{CO^2}{AC} = \frac{(\frac{25}{3})^2}{10} = \frac{625}{90}$   
 $= \frac{125}{18} = 6 \frac{17}{18}$     8)  $AC = AF + CF \Rightarrow AF = AC - CF = 10 - 6 \frac{17}{18} = 3 \frac{1}{18}$

Ответ:  $3 \frac{1}{18}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Нч.

Пусть всего шаров  $n$ , тогда есть ~~вариантов~~  $C_n^3 = \frac{n!}{(n-3)! \cdot 3!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$  возможных вариантов расположения этих шариков.

Пусть представим, что он будет брать по порядку все шарики, но выскрвет только если эти 3 шарика будут среди первых 5, тогда есть  $C_5^3$  возможных вариантов расположения трех шариков среди 5 шариков,

$C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{120}{6 \cdot 2} = 10$ , в этом случае вероятность равна  $\frac{10}{\left(\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\right)} = \frac{60}{n(n-1)(n-2)}$ . В случае, когда он выскрвет из 6 шаро-

век есть  $C_6^3$  вариантов,  $C_6^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{120}{6 \cdot 6} = 20$ , в этом случае вероятность равна  $\left(\frac{20}{\left(\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\right)}\right) = \frac{120}{n(n-1)(n-2)}$

Вероятности увеличилась в  $\frac{120 \cdot n(n-1)(n-2)}{n(n-1)(n-2) \cdot 60} = 2$  раза.

Ответ: в 2 раза.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5.

$n^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ , корни этого ур-ния - 5 и 6 - 2-й и 3-й чл. арифм. прогрессии

$4n^2 - (a^2 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - a = 0$ , корни этого ур-ния - 3 и 8 - 2-й и 3-й чл. арифм. прогрессии.

Пусть эта прогрессия -  $(b_n)$ , где  $d$  - шаг прогрессии, тогда

$b_3 + b_8 = b_5 - 2d + b_6 + 2d = b_5 + b_6 \Rightarrow$  сумма корней первого ур-ния равна сумме корней второго.

По т. Виета в 1-ом ур-нии  $x_1 + x_2 = \frac{-(a^2 - a)}{1} = a^2 - a$ , во 2-ом ур-нии  $x_1 + x_2 =$

$= \frac{-(-a^2 - a^2)}{4} = \frac{a^2 + a^2}{4} = \frac{a^2 - a^2}{4}$ ,  $\frac{a^2 - a^2}{4} = a^2 - a \Leftrightarrow a^2 - a^2 = 4a^2 - 4a \Leftrightarrow 4a^2 - 4a = 0$

$a(a-1)(a-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=1 \\ a=4 \end{cases}$

При  $a=0$ : 1-ое ур-ние:  $n^2 - 5 = 0$ ,  $\begin{cases} n=5 \\ n=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=2\sqrt{5} \\ d=-2\sqrt{5} \end{cases}$  2-ое ур-ние:  $4n^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow n^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n=-1 \\ n=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=0,4 \\ d=-0,4 \end{cases}$ . Возможные разности прогрессии

не совпадают  $\Rightarrow$  при  $a=0$  такого ответа не может.

При  $a=1$ : 1-ое ур-ние:  $n^2 - 4 = 0$   $\Rightarrow \begin{cases} n=2 \\ n=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=4 \\ d=-4 \end{cases}$  2-ое ур-ние:  $4n^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow n^2 - 0,25 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n=0,5 \\ n=-0,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=0,2 \\ d=-0,2 \end{cases}$ . Возможные разности прогрессии не

совпадают  $\Rightarrow$  при  $a=1$  такого ответа не может.

При  $a=4$ : 1-ое ур-ние:  $x^2 - 15x + 11 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=6-\sqrt{37} \\ x=6+\sqrt{37} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=2\sqrt{37} \\ d=-2\sqrt{37} \end{cases}$

2-ое ур-ние:  $4n^2 - 40n + 51 = 0 \Leftrightarrow 4n^2 - 40n + 37 = 0 \Leftrightarrow n^2 - 10n + 9,25 = 0 \Leftrightarrow n^2 - 11n - 88 = 0$

$\frac{D}{4} = 121 + 352 = 473 = 21\sqrt{37} \Rightarrow \begin{cases} n=6-5\sqrt{37} \\ n=6+5\sqrt{37} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=2\sqrt{37} \\ d=-2\sqrt{37} \end{cases}$ . Также можно было найти при прогрессии:

$6 - 9\sqrt{37}; 6 - 3\sqrt{37}; 6 - 5\sqrt{37}; 6 - 7\sqrt{37}; 6 - \sqrt{37}; 6 + \sqrt{37}; 6 + 3\sqrt{37}; 6 + 5\sqrt{37}$  Ответ: 4



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

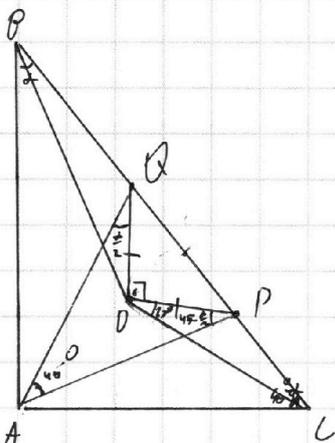
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано:

$\triangle ABC$  - п.ч.д,  
 $BC$  - гипотенуза  
 $P, Q \in PC, AB = BP$   
 $CQ = AC$   
 $D$  - центр вписанной  
 $\triangle ABC, DP \perp DQ$   
 $\angle PDQ = 90^\circ$   
 $\angle DCQ = 20^\circ$



Найти:

$\angle DPC$ ?

1) Если  $P$  и  $Q$  расположены между точками  $B$  -  $D$  -  $Q$  -  $C$ ,  
то  $BP + PC + PQ = BC$ , но  $BP = AB$   $\frac{BC}{2} + \frac{CQ}{2} > BC \Rightarrow$   
 $= AB = AC$

$\Rightarrow$  расположено  $B$  -  $Q$  -  $P$  -  $C$ .

2) П.ч.д  $\triangle ABC$ , тогда  $\angle ACB = 90^\circ$ . П.ч.  $\triangle ABP$  - п.ч.д и  $\triangle ACQ$  - п.ч.д:

$\Rightarrow \angle BAP = \angle PBA = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$ ,  $\angle CAQ = \angle QCA = 45^\circ + \frac{\alpha}{2}$ ,  $\angle BAP + \angle CAQ - \angle PAQ = 90^\circ$

$\Rightarrow 90^\circ = \frac{\alpha}{2} + 45^\circ + \frac{\alpha}{2} - \angle PAQ = 90^\circ \Rightarrow \angle PAQ = 45^\circ$

3)  $\triangle PDQ$  - п.ч.д  $\Rightarrow \angle DQP = \angle DPQ = 45^\circ \Rightarrow \angle AQP = \frac{\alpha}{2}$ ,  $\angle APQ = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$

4)  $\angle DCB = 70^\circ$ ,  $\angle DPC = 175^\circ$  (внеш.  $\angle 45^\circ$ )  $\Rightarrow \angle DPC = 25^\circ$

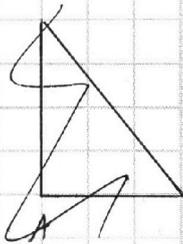


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}| + |x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}| \leq 3$$

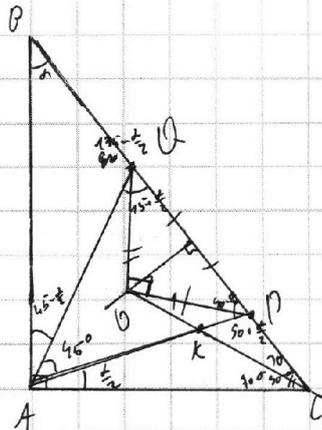
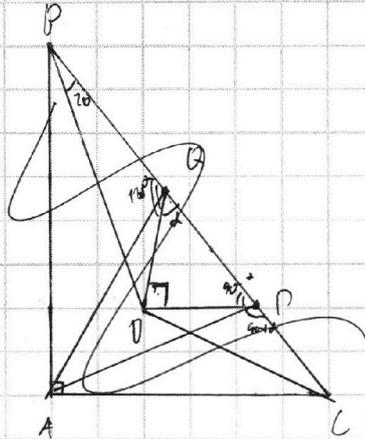
$$\text{Пусть } x > \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}$$

$$\text{и } x > \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}$$

$$2x - 15 + \frac{2y}{6\sqrt{3}} < 3 \quad | \cdot \sqrt{3}$$

$$\frac{y}{9} < 18\sqrt{3} - 2\sqrt{3}x$$

$$y < 182\sqrt{3} - 18\sqrt{3}x$$



$$\angle PKP = \angle PPA = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

$$\angle CAQ = \angle QAC = 45^\circ + \frac{\alpha}{2}$$

$$\angle PKC = 180^\circ - 20^\circ - 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 70^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

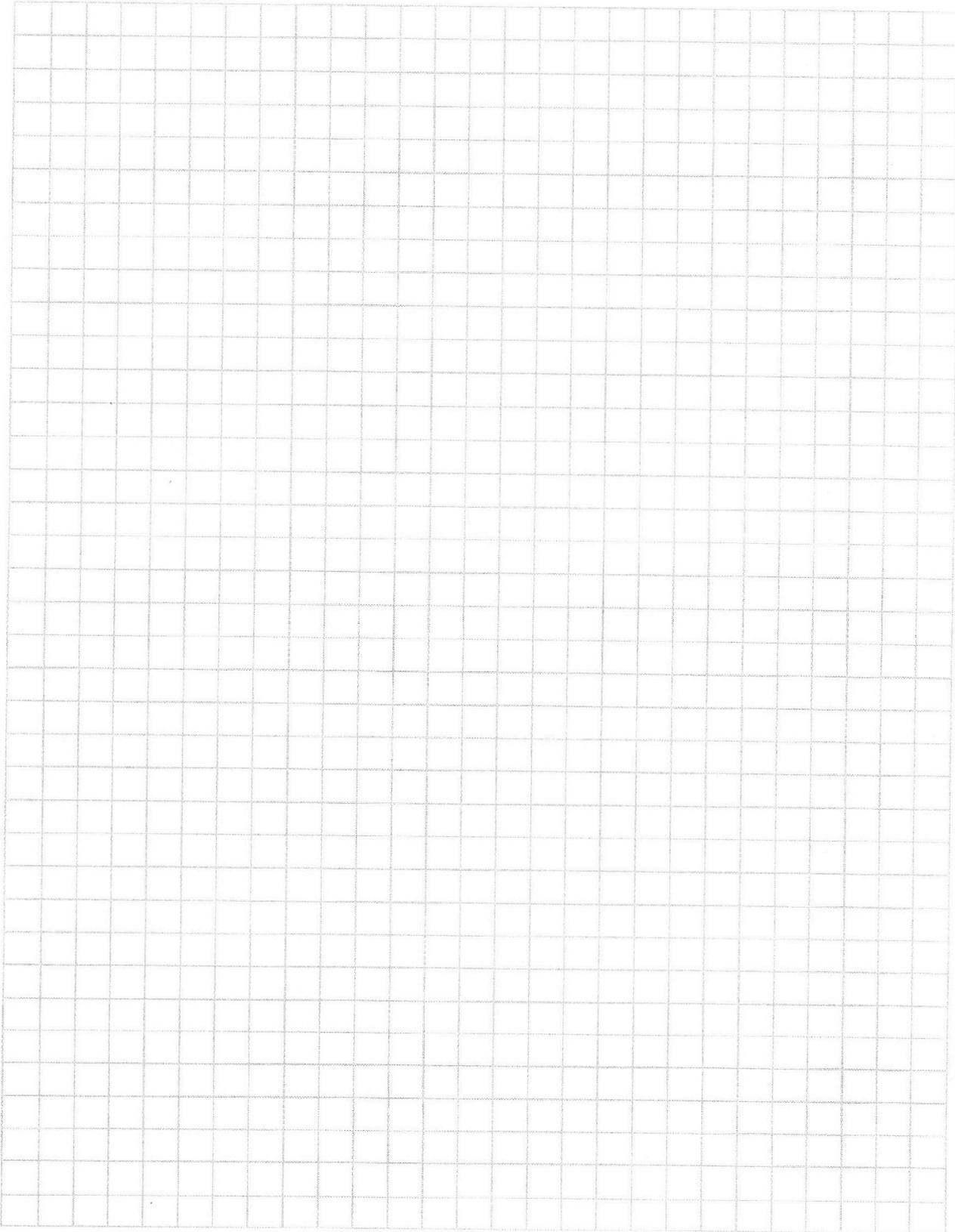


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>						

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

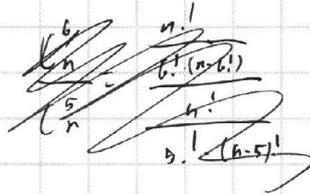
$$(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 = x^2 + 6xy + 4y^2 + 4z^2 + 6yz + 4x^2 + 2z^2 + 6xz + 4y^2 = 2x^2 + 4y^2 + 2z^2 - 2(3x+3y+3z) + 7z$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3xy + 3y^2 + 3z^2 = x^2 + 4y^2 + 2z^2$$

$$k^2 \quad (x+y+z)^2 = A(x+y+z) = x^2 + 2xy + 2xz + 2yz + 2x + 2y + 2z$$

$$x^2 + 4y^2 + 2z^2 + 3x + 3y + 3z = 7z$$

$$x^2 + 4y^2 + 2z^2 + 3x + 3y + 3z = x^2 + 4y^2 + 2z^2$$



$$t = x+y+z = t^2 - 2x \quad t = x+y+z, k_2 \text{ и т.д.}$$

$$t^2 - 2k + 2t = k$$

$$t^2 + 2t = 3k$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6(x+y+z) = t^2 - 2k + 6t + 7z$$

$$t^2 + 6t - 2k + 7z = 3k + 2t - 2k + 7z = k + 3t + 7z$$

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6}$$

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 10$$

$$\frac{60}{n(n-1)(n-2)}$$

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 20$$

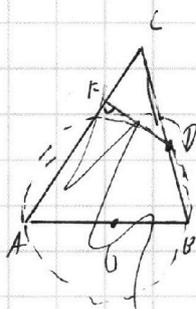
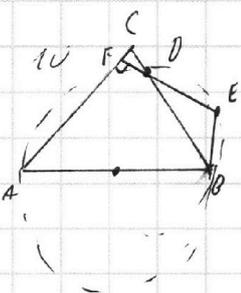
$$\frac{120}{n(n-1)(n-2)}$$

$$n = \frac{99 \dots 01}{10000} = \frac{10^{40000}}{k} - 1$$

$$h^3 = (k-1)^3 = k^3 - 3k^2 + 3k - 1 = 120000 - 3 \cdot 20 + 3 \cdot 10 - 1 = 119999$$

$$10000 \cdot 10^6 - 3 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^2 - 1 = 10000000 - 30000 + 3000 - 1 = 9970000 + 3000 - 1 = 9973000 + 2999 = 9975999$$

~~9970000~~ 9999 977999



$$\binom{7}{5} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{120}{7 \cdot 6} = 10$$

$$\binom{7}{1,2}, \binom{7}{1,3}, \binom{7}{1,4}, \binom{7}{1,5}$$

$$\binom{7}{2,3}, \binom{7}{2,4}, \binom{7}{2,5}, \binom{7}{3,4}, \binom{7}{3,5}$$

$$\binom{7}{4,5} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{720}{6 \cdot 6} = 20$$

$$\frac{3}{n} \cdot \frac{2}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2}$$

$$\frac{n-5}{n} \cdot \frac{n-4}{n-1} = 10$$

$$\frac{n-3}{n} \cdot \frac{n-4}{n-1} \cdot \frac{n-5}{n-2} = 70$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 6x + 4 + y^2 + 6y + 4 + z^2 + 6z + 4 = (x+y+z)^2 + 2xy + 4z + 4y + 2z = k^2 + 4k + 2z = 3t + 4k + 2z$$

$$x^2 + 4y^2 + z^2 + 2x + 2y + 2z = 2x + 4z + 2z + 2y^2 + 2z$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 6x + 6y + 6z = 2xy + 2yz + 2xz + 4x^2 + 4y^2 + 4z^2$$

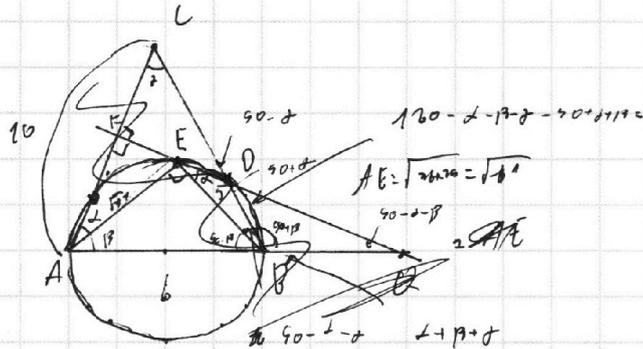
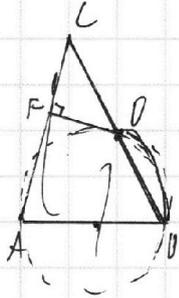
$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6x + 6y + 6z = (x+y+z)^2$$

$$3t + 6k = k^2$$

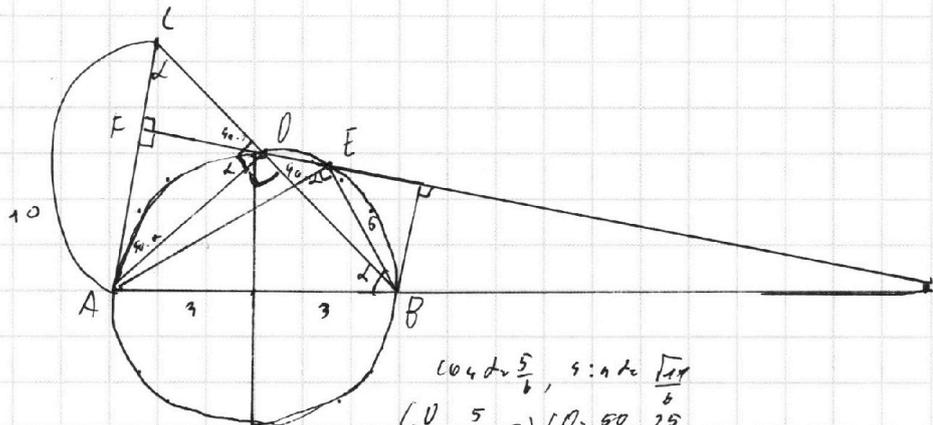
$$3t = k^2 - 6k$$

$$a^2 + b^2$$

$$a^2 + b^2 = a^2 - 7d + 4b^2 + 7d$$



7  
1



$$x^2 - (x^2 - 4)x + x - 5 = 0$$

$$x^2 - 4(x-1)x + x - 5 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (x^2 - 4)^2 - 4(x-5)$$

$$= x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 4x + 20 > 0$$

$$\frac{-6 \pm \sqrt{36}}{2x} = \frac{-6 \pm \sqrt{36}}{2x} = \frac{-6 \pm 6}{2x} = \frac{0}{2x} = 0$$

$$\begin{cases} -2 = x^2 + 4x \\ 1 = b^2 + 6z + a + 2 \\ -4 = b^2 + 4z + a + 6z \\ w = b^2 + 6z \end{cases}$$

$$D_1 = (x^2 - 4)^2 - 4(x-5) = x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 4x + 20 = 17x^6 - 70x^5 + 32x^4 - 37x^3 + 16x^2 + 64 = 0$$

$$\frac{\sqrt{D_1}}{4} = 5 \cdot \sqrt{0}$$

$$D_1 = 4000$$

$$17x^6 - 70x^5 + 32x^4 - 37x^3 + 16x^2 + 64 = 0$$

$$+ 6000$$

$$17x^6 - 70x^5 + 32x^4 - 37x^3 + 16x^2 + 64 = 0$$

$$x^6 - 2x^4 - 7x^3 + 4x^2 = 0 \quad x^2(x^4 - 7x - 2) = (x^2 - 2)(x^4 - 7x - 2)$$

$$\cos \alpha = \frac{5}{8}, \quad \alpha = \arccos \frac{5}{8}$$

$$AO = \sqrt{100 - \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{375}{4}} = \frac{5}{2} \sqrt{15}$$

$$AF \cdot AC = AB^2 \Rightarrow AF = \frac{AB^2}{AC} = \frac{25}{4 \cdot 10} = \frac{5}{8}$$

$$= \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Даны  $a, b, c$  и  $u^2 = a$

$$a^2 - 4a = \frac{a^2 - u^2}{4}$$

$$\frac{a^2 - u^2}{4} = a - u \quad \text{или} \quad a^2 - u^2 = 4a - 4u$$

$$u^2(u-4) = 4u(u-4) \Rightarrow (u-4)(u^2 - 4u) = 0 \quad \text{или} \quad u(u-4)(u-4) = 0$$

$$u^2 - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = \sqrt{4} \\ u = -\sqrt{4} \end{cases} \quad \text{или} \quad u^2 - 4 = 0 \Rightarrow u^2 - 4 = 0 \Rightarrow u = \pm 2$$

$5d = 11d = 0,8$

$$n^2 - 4 = 0 \Rightarrow n = 2$$

$$un^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 0,5 \\ n = -0,5 \end{cases} \quad d = 0,2$$

$$n^2 - 17n + 1 = 0 \quad \frac{D}{4} = k^2 \quad ac = 96 \pm 4\sqrt{32}$$

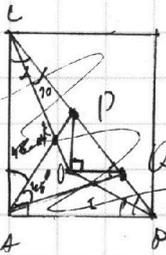
$$\begin{cases} n = 6\sqrt{32} \\ n = 6\sqrt{32} \end{cases}$$

$$4n^2 - 4\sqrt{3}n + 51n + 37 - 4046 - 4 = 0$$

$$4n^2 - 4\sqrt{3}n + 54n - 4000 = 0 \quad n^2 - 42n + 1000 = 0 \quad n^2 - 17n - 889 = 0$$

$$\frac{D}{4} = k^2 \quad ac = 36 + 889 = 925 = 25 \cdot 37 = (5\sqrt{37})^2$$

$$\begin{cases} n = 6 + 5\sqrt{37} \\ n = 6 + 5\sqrt{37} \end{cases}$$



$A(0,0), B(1,0), C(1,1), D(0,1)$

$\angle BAP = 45 - \frac{\alpha}{2}, \angle PAQ = 45 - \frac{\alpha}{2}, \angle QAD = 45 - \frac{\alpha}{2}$   
 $\angle PAQ = \frac{\alpha}{2}$   
 $\angle APQ = 180^\circ - \alpha - 45 + \frac{\alpha}{2} = 135 - \frac{\alpha}{2}$   
 $\angle AQP = 180^\circ - 135 + \frac{\alpha}{2} - 20 = 25 + \frac{\alpha}{2}$

$$n^2 + 4^2 + \sqrt{3}^2 \quad mn + 4n + 3n = n^2 + 4n + 2n \quad \frac{(n+4)^2 - n^2 - 4^2 - 3^2}{2} \quad | \cdot 2$$

$$(n+4+2)^2 - n^2 - 4^2 - 3^2 = 2n^2 + 4n + 2n + 4 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6$$

$$(n+4+2)^2 = 2n^2 + 4n + 2n + 6n + 6 + 6 = 2(n+1)^2 + 2(4+1)^2 + 2(2+1)^2 - 4$$

$$\frac{(n+4+2)^2}{2} + 2 = (n+1)^2 + (4+1)^2 + (2+1)^2$$