



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 15$, $BE = 10$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$ являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$ являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| + \left|y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leq 6$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle DBC = 35^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = uz + z^2 \\ yz = ux + x^2 \\ zx = uy + u^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xyz = z^2(z+u) \\ xyz = x^2(x+u) \\ xyz = y^2(y+u) \end{cases} \Rightarrow$$

$$z^2(z+u) = x^2(x+u) = y^2(y+u)$$

~~Или можно считать, что~~

$$\Rightarrow z^4(z+u)^2 = x^4(x+u)^2 = y^4(y+u)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (z+u)^2 = \left(\frac{x}{z}\right)^4 (x+u)^2, (y+u)^2 = \left(\frac{x}{y}\right)^4 (x+u)^2 \Rightarrow$$

$$(x+u)^2 + (y+u)^2 + (z+u)^2 = (x+u)^2 \left(\left(\frac{x}{z}\right)^4 + \left(\frac{x}{y}\right)^4 + 1 \right) =$$

=



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = \underbrace{9999 \dots 9}_{25.000} \geq \underbrace{100 \dots 0}_{25.000} - 1$$

$$P/M \quad n^3 = \left(\underbrace{1000 \dots 0}_{25.000} - 1 \right)^3 = \underbrace{100 \dots 0}_{25.000}^{(1)} - \underbrace{300 \dots 00}_{50.000}^{(2)} + \underbrace{300 \dots 0}_{25.000}^{(3)} - 1$$

$$= \underbrace{99 \dots 9970 \dots 0}_{25.000} \underbrace{29 \dots 99}_{25.000} \Rightarrow \text{в } n^3 \text{ сочитается } 50.000 \text{ рублей}$$

$$\begin{array}{r} (1) \quad \underbrace{1000 \dots 00}_{300 \dots 000} \\ \hline \underbrace{9 \dots 99700 \dots 00}_{25.000} \quad \underbrace{}_{50.000} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (2) \quad \underbrace{99 \dots 99700 \dots 00}_{30 \dots 000} \underbrace{00 \dots 00}_{30 \dots 000} \\ \hline \underbrace{99 \dots 99700 \dots 030 \dots 000}_{50.000} \end{array} \quad \begin{array}{l} 39 \text{ руб} \\ 25.000 \text{ рублей} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (3) \quad \underbrace{99 \dots 99700 \dots 030 \dots 00}_1 \\ \hline \underbrace{99 \dots 9970 \dots 029 \dots 99} \end{array}$$

Ответ: 50,000 рублей



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) В мешке с 5 коробками ~~каждой~~^{каждой} всего способов выбрать 5 коробок из n равно C_n^5 , а

случай выигрыша будет если мы выберем три нужные коробки и ещё 2 другие, т.е.

кол-во выигрышей = кол-во способов выбрать 2 коробки из $(n-3)$, т.е. C_{n-3}^2 , тогда $P_1 = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}$.

2) В мешке с 8 коробками ~~каждой~~^{каждой} ~~по~~ ~~одинаково~~.

Благоприятные: (при уже выбраны, т.е. ост $8-3=5$), C_{n-3}^5 ,

а всего C_n^8 , тогда $P_2 = \frac{C_{n-3}^5}{C_n^8}$.

$$P_2/P_1 = \frac{C_{n-3}^5}{C_n^8} \cdot \frac{C_n^5}{C_{n-3}^2} = \frac{\frac{n!(n-3)!}{5!(n-8)!(n-5)!}}{\frac{n!(n-3)!}{8!(n-8)!(n-5)!}} =$$

$$= \frac{8!(n-8)!2!(n-5)!}{5!5!(n-8)!(n-5)!} = \frac{8! \cdot 2!}{5! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6^2}{5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{28}{5} =$$

$$\frac{28}{5} = 5,6$$

Ответ: в 5,6 раз.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☒6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2 - a^3}{3} = 0$; Обозначим корни этого ур-ня как a_4 и a_5 .
По т. Виета:

$$a_4 + a_5 = a^2 - a. \quad (1)$$

2) $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$; Обозначим корни этого ур-ня как a_2 и a_7 ;

По т. Виета:

$$a_2 + a_7 = \frac{a^3 - a^2}{2} \quad (2)$$

П.к. $a_2 = a_1 + d$; $a_7 = a_1 + 6d$; $a_4 = a_1 + 3d$; $a_5 = a_1 + 4d$, (где d — разность арифмет. прогресс, которые образуют корни), то

$$\left. \begin{aligned} a_2 + a_7 &= 2a_1 + 7d \\ a_4 + a_5 &= 2a_1 + 7d \end{aligned} \right\} \Rightarrow (1) \Leftrightarrow (2):$$

$$\begin{aligned} a^2 - a &= \frac{a^3 - a^2}{2} \\ 2a(a - 1) &= a^2(a - 1) \\ (a - 1)(a^2 - 2a) &= 0 \\ a(a - 1)(a - 2) &= 0 \\ \left[\begin{aligned} a &= 0 \\ a &= 1 \\ a &= 2 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

а) $a = 0$, тогда в первом ур-ни:

$$x^2 - 0x + \frac{2 - 0}{3} = 0$$

$$x^2 + \frac{2}{3} = 0 \quad x \in \emptyset$$

б) $a = 1$, аналогично, в I-ом ур-ни $x^2 - 0x + \frac{2 - 1}{3} = 0$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1



2



3



4



5



6



7



СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + \frac{1}{3} = 0 \quad x \in \emptyset$$

в) $u=2$, в II-ом ур-не

$$\cancel{x^2} + x^2 - (4-2)x + \frac{2-8}{3} = 0$$

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 1 + 2 = 3 \Rightarrow a_{4,5} = 1 \pm \sqrt{3}. \text{ Пусть } a_4 = 1 - \sqrt{3}, a_5 = 1 + \sqrt{3},$$

$$\text{тогда } d = 1 + \sqrt{3} - 1 + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

Проверим же II-ое ур-не

$$2x^2 - (8-4)x - 2 \cdot 64 - 16 - 4 = 0$$

$$2x^2 - 4x - 128 - 20 = 0$$

$$x^2 - 2x - 74 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 1 + 74 = 75, \quad a_{2,7} = 1 \pm \sqrt{75}; \text{ пусть } a_2 = 1 - 5\sqrt{3}, a_7 = 1 + 5\sqrt{3},$$

Тогда должно быть: $a_7 = a_2 + 5d;$

$$1 + 5\sqrt{3} = 1 - 5\sqrt{3} + 5 \cdot 2\sqrt{3}$$

$$1 + 5\sqrt{3} = 1 + 5\sqrt{3} \quad \text{верно}$$

ответ: 2.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on a grid background, featuring a geometric diagram and various algebraic and combinatorial calculations.

Geometric Diagram: A triangle with vertices labeled A, B, and C. Point Q is on side AB, and point P is on side AC. A line segment PQ is drawn. Angles are labeled: $\beta - 35^\circ$ at vertex B, $90 - \beta - 2$ at vertex C, and $90 - \beta - 2$ at vertex A. Other labels include $\frac{24}{x^4}$, $x + y$, 2.2 , 2.25 , 4 , 8 , 125 , 20 , 25 , 1125 , 7.6 , 15 , 3.2 , 4 , 12 .

Algebraic Calculations:

- $$\frac{z^2(z+y)}{y} = \frac{y^2(y+x)}{(x+y)^2 y + u}$$
- $$\frac{-2}{-2} \frac{2}{-2} \frac{-2}{-2}$$
- $$270 - 45 + 11 + \beta - 35 + 90 - \beta - 2 = 360$$
- $$\frac{x^4 + y^2 z^2 + x^2 z^2}{x^2 z^2} \sqrt{\frac{2(2+y)}{2(2+y)}} \sqrt{\frac{2(2+y)}{2(2+y)}} = 360$$
- $$-2y + 30 \leq 6$$
- $$24 < 36 \quad y \leq 12$$
- $$\frac{(y-15 + \frac{x}{6\sqrt{3}})}{(y-15 - \frac{x}{6\sqrt{3}})} \leq 6$$
- $$\frac{x^2 z^2}{z^2} \frac{(x+y)^2 + (x+y)^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2} (x+y) > \frac{8}{6\sqrt{3}} + 15$$
- $$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{(n-2)(n-3)(n-4)} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{(n-5)(n-6)(n-7)}$$
- $$\frac{n!}{(n-2)!} \cdot \frac{n!}{(n-5)!} \cdot \frac{n!}{(n-8)!} \cdot \frac{n!}{(n-11)!}$$
- $$\frac{3 \cdot C_n^5}{C_n^5} \cdot \frac{3 \cdot C_n^5}{C_n^5} \cdot \frac{3 \cdot C_n^5}{C_n^5} \cdot \frac{3 \cdot C_n^5}{C_n^5}$$
- $$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20, 3$$
- $$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 8! \cdot 2! \cdot (n-8)! \cdot (n-2)!}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5! \cdot 8! \cdot (n-5)! \cdot (n-5)!}$$
- $$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot (n-2)(n-3)(n-4)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}$$
- $$\frac{z^2(4+z)}{x^2} = 4x + x^2$$
- $$xy \cdot z = z^2(4+z) = x^2(4+x) = y^2(4+y)$$

Combinatorial Calculations:

- $$\frac{n!}{(n-2)!} \cdot \frac{n!}{(n-5)!} \cdot \frac{n!}{(n-8)!} \cdot \frac{n!}{(n-11)!}$$
- $$\frac{3 \cdot C_n^5}{C_n^5} \cdot \frac{3 \cdot C_n^5}{C_n^5} \cdot \frac{3 \cdot C_n^5}{C_n^5} \cdot \frac{3 \cdot C_n^5}{C_n^5}$$
- $$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20, 3$$
- $$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 8! \cdot 2! \cdot (n-8)! \cdot (n-2)!}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5! \cdot 8! \cdot (n-5)! \cdot (n-5)!}$$
- $$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot (n-2)(n-3)(n-4)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}$$
- $$\frac{z^2(4+z)}{x^2} = 4x + x^2$$
- $$xy \cdot z = z^2(4+z) = x^2(4+x) = y^2(4+y)$$

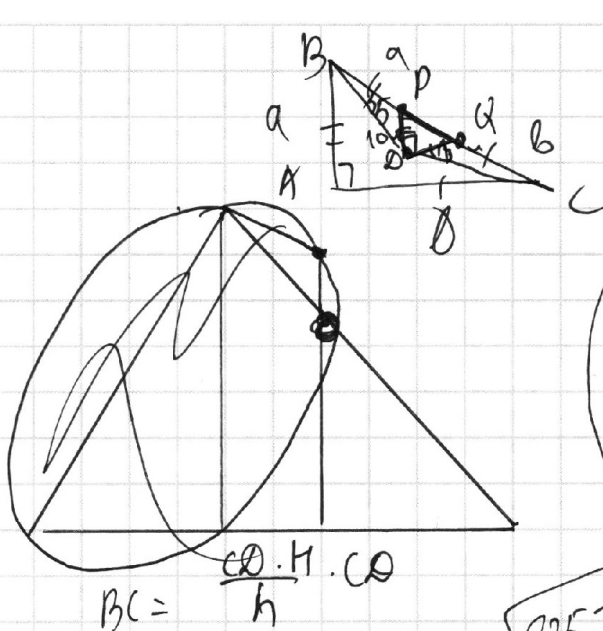


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

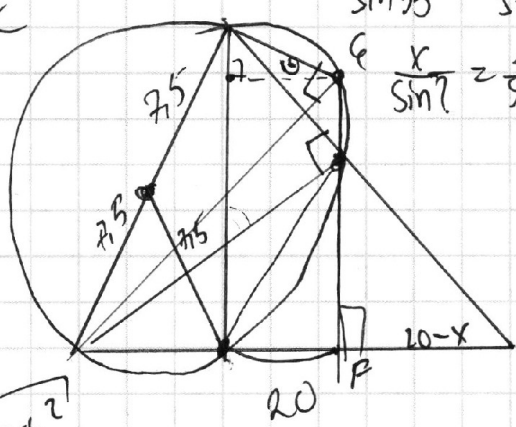
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a-b}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{x}{\sin 35^\circ} = \frac{a}{\sin 10^\circ}$$

$$\frac{x}{\sin 7^\circ} = \frac{b}{\sin \beta}$$

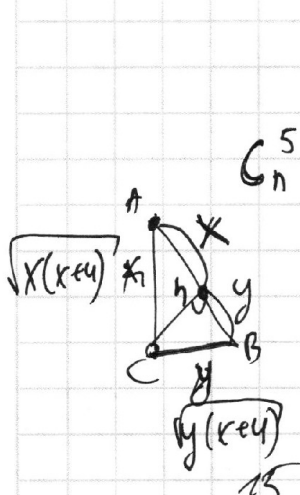


$$\frac{h}{r} = \frac{CD}{rC} n$$

$$20(20-x+y) = \sqrt{225-h^2}$$

$$FE = h - \sqrt{100 - (x - \sqrt{225-h^2})^2}$$

$$= h - \sqrt{100 - x^2 - 225 + h^2 + 2x\sqrt{225-h^2}}$$



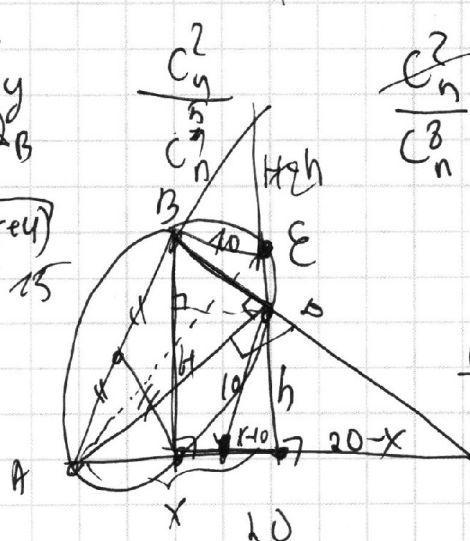
$$\frac{h}{\sqrt{x(x+y)}} = \frac{y}{\sqrt{y(1+x+y)}}$$

$$\frac{h^2}{x(x+y)} = \frac{y^2}{y(x+y)}$$

$$\frac{h^2}{x} = y$$

$$\frac{C_n^2}{C_n^5} \cdot \frac{C_n^5}{C_n^2} = \frac{(n-5)! \cdot 5!}{n!}$$

$$= \frac{(n-5)! \cdot 8!}{(n-5)! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{(n-5)(n-6)(n-7)}$$



$$\frac{20h}{2} = 10h$$

$$x(20-x) + (20-x)x = 20$$

$$20 \cdot x + (20-x)20 = 20$$

$$20x + 400 - 20x =$$

$$(20-x)x = h^2$$

$$100 - h^2 - x^2 + 20x + 100$$

$$\frac{h \cdot (20-x) + h \cdot x}{h} = 20h$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x^2 - (4-2)x - 2 = 0$
 $x^2 - 2x - 2 = 0$
 $\frac{a^3 - a^2}{2} = a^2 \cdot 4$
 $(a-1)(a^2 - 2a) = 0$
 $a(a-1)(a-2) = 0$
 $a = 0, a = 1, a = 2$

25000
 $81(11 \dots 1)$
 25000
 $100^2 - 1 = 10000 - 1 = 9999$
 $100^2 + 1 - 200 = 10000 + 1 - 200 = 9801$
 $9999 \dots 9$
 25000
 $(100 \dots 0 - 1)^3 = 1000000 - 3 \cdot 100 \dots 0 + 3 \cdot 10000 - 1 = 1000000 - 300000 + 30000 - 1 = 700000 - 1 = 699999$

$x^2 - (2-a)x + \frac{2-a^2}{3} = 0$
 $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^2(a-1) = 0$
 $a^2(a-1) = 2a(a-1)$
 $a(a-1)(a-2) = 0$
 $a = 0, a = 1, a = 2$

$x^2 - a(a-1) + \frac{2-a^2}{3} = 0$
 $2(x^2 - a^2(a-1)x - 2(a^6 + 4a^4 + 2)) = 0$
 $\frac{2-a^3}{3} = a_4 \cdot a_5$
 $2a_1 + 3d + 4d$
 $a_1 + d, a_1 + 6d$
 $a(a-1) = a_4 + 45$
 $2(a^6 + 4a^4 + 2) = a_2 \cdot a_2$
 $a^2(a-1) = a_2 + 47$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

① $\begin{cases} xy = 4z + z^2 \\ yz = 4x + x^2 \\ zx = 4y + y^2 \end{cases}$ $7(4+z)$ $xy + yz + zx - z^2x - y^2z$

$$\left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{zx}{y}\right)^2 =$$

$$= \frac{x^2y^2x^2 + y^2z^2y^2 + z^2x^2z^2}{z^2x^2y^2} =$$

$$= \frac{x^4y^2 + y^4z^2 + z^4x^2}{(zxy)^2}$$

$$(x-z)^2 + (x-y)^2 + (y-z)^2 + 8(x+y+z) = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 8y + 8z + 48 = x^2 + y^2 + z^2 + 4$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx - z^2 - y^2 - x^2) + 48 = 0$$

$$= x^2 - y^2 - x^2 - z^2 + 2xy + 2z + 2z + 48 = 0$$

$$= -(x-y)^2 - (x-z)^2 - (y-z)^2 + 48 = 0$$

$$8(x+y+z) + 48$$

$$8\left(\frac{yz}{x+4} + \frac{xz}{y+4} + \frac{xy}{z+4}\right) + 48 = xy + yz + zx + 12$$

$$= xy + yz + zx + 4 = 0$$

$$8(x+y+z) + 36 = xy + yz + zx$$

$$8(z+4) = 8x + 8y + 8z + 36$$

$$z^2 - 4z + 4 = 8(x+y) + 40$$

$$xy + 4z + yz + 4x + 8x + 4y + 48 = 8x + 8y + 8z + 36$$

$$(y+4)(x+z) \quad xy + yz + xz = 4x + 4y + 4z$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

