



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 15$, $BE = 10$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$ являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$ являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| + \left|y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leq 6$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle DBC = 35^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = uz + z^2 \\ yz = ux + x^2 \\ zx = uy + u^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xyz = z^2(z+u) \\ xyz = x^2(x+u) \\ xyz = y^2(y+u) \end{cases} \Rightarrow$$

$$z^2(z+u) = x^2(x+u) = y^2(y+u)$$

~~Или можно считать, что~~

$$\Rightarrow z^4(z+u)^2 = x^4(x+u)^2 = y^4(y+u)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (z+u)^2 = \left(\frac{x}{z}\right)^4 (x+u)^2, (y+u)^2 = \left(\frac{x}{y}\right)^4 (x+u)^2 \Rightarrow$$

$$(x+u)^2 + (y+u)^2 + (z+u)^2 = (x+u)^2 \left(\left(\frac{x}{z}\right)^4 + \left(\frac{x}{y}\right)^4 + 1 \right) =$$

=



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = \underbrace{9999 \dots 9}_{25.000} \geq \underbrace{100 \dots 0}_{25.000} - 1$$

$$P/M \quad n^3 = \left(\underbrace{1000 \dots 0}_{25.000} - 1 \right)^3 = \underbrace{100 \dots 0}_{25.000}^{(1)} - \underbrace{300 \dots 00}_{50.000}^{(2)} + \underbrace{300 \dots 0}_{25.000}^{(3)} - 1$$

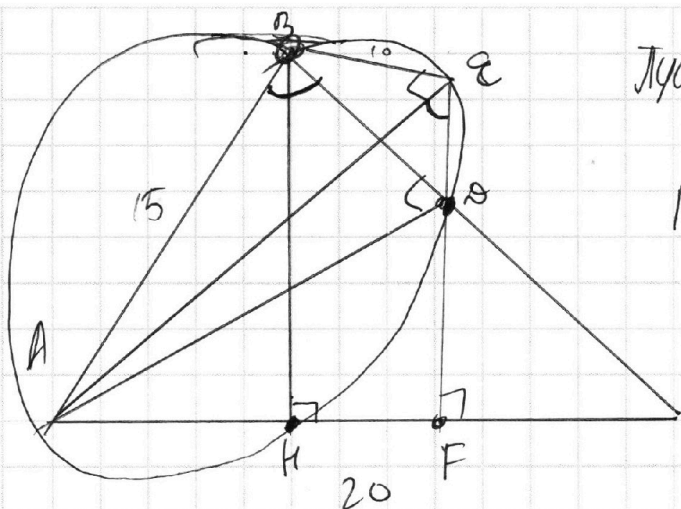
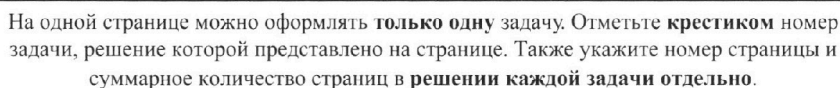
$$= \underbrace{99 \dots 9970 \dots 0}_{25.000} \underbrace{29 \dots 99}_{25.000} \Rightarrow \text{в } n^3 \text{ содержится } 50.000 \text{ десятков}$$

$$\begin{array}{r} (1) \quad \underbrace{1000 \dots 00}_{300 \dots 000} \\ \hline \underbrace{9 \dots 99700 \dots 00}_{25.000} \quad \underbrace{}_{50.000} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (2) \quad \underbrace{99 \dots 99700 \dots 00}_{30 \dots 000} \underbrace{00 \dots 00}_{30 \dots 000} \\ \hline \underbrace{99 \dots 99700 \dots 030 \dots 000}_{50.000} \end{array} \quad \begin{array}{l} 39 \text{ и } 6 \\ 25.000 \\ \text{тысяч} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (3) \quad \underbrace{99 \dots 99700 \dots 030 \dots 00}_1 \\ \hline \underbrace{99 \dots 9970 \dots 029 \dots 99} \end{array}$$

Ответ: 50,000 десятков





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☒6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2 - a^3}{3} = 0$; Обозначим корни этого ур-ня как a_4 и a_5 .

По г. Виета:

$$a_4 + a_5 = a^2 - a. \quad (1)$$

2) $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$; Обозначим корни этого ур-ня как a_2 и a_7 ;

По г. Виета:

$$a_2 + a_7 = \frac{a^3 - a^2}{2} \quad (2)$$

П.к. $a_2 = a_1 + d$; $a_7 = a_1 + 6d$; $a_4 = a_1 + 3d$; $a_5 = a_1 + 4d$, (где d — разность арифмет. прогресс, которые образуют

(корни), то
$$\left. \begin{aligned} a_2 + a_7 &= 2a_1 + 7d \\ a_4 + a_5 &= 2a_1 + 7d \end{aligned} \right\} \Rightarrow (1) \Leftrightarrow (2):$$

$$\begin{aligned} a^2 - a &= \frac{a^3 - a^2}{2} \\ 2a(a - 1) &= a^2(a - 1) \\ (a - 1)(a^2 - 2a) &= 0 \\ a(a - 1)(a - 2) &= 0 \\ \left[\begin{aligned} a &= 0 \\ a &= 1 \\ a &= 2 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

а) $a = 0$, тогда в первом ур-ни:

$$x^2 - 0x + \frac{2 - 0}{3} = 0$$

$$x^2 + \frac{2}{3} = 0 \quad x \in \emptyset$$

б) $a = 1$, аналогично, в I-ом ур-ни $x^2 - 0x + \frac{2 - 1}{3} = 0$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + \frac{1}{3} = 0 \quad x \in \emptyset$$

б) $a=2$, в II-ом ур-ии

$$x^2 + x^2 - (4-2)x + \frac{2-8}{3} = 0$$

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 1 + 2 = 3 \Rightarrow a_{4,5} = 1 \pm \sqrt{3}. \text{ Пусть } a_4 = 1 - \sqrt{3}, a_5 = 1 + \sqrt{3},$$

$$\text{тогда } d = 1 + \sqrt{3} - 1 + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

Проверим же II-ое ур-ие

$$2x^2 - (8-4)x - 2 \cdot 64 - 16 - 4 = 0$$

$$2x^2 - 4x - 128 - 20 = 0$$

$$x^2 - 2x - 74 = 0$$

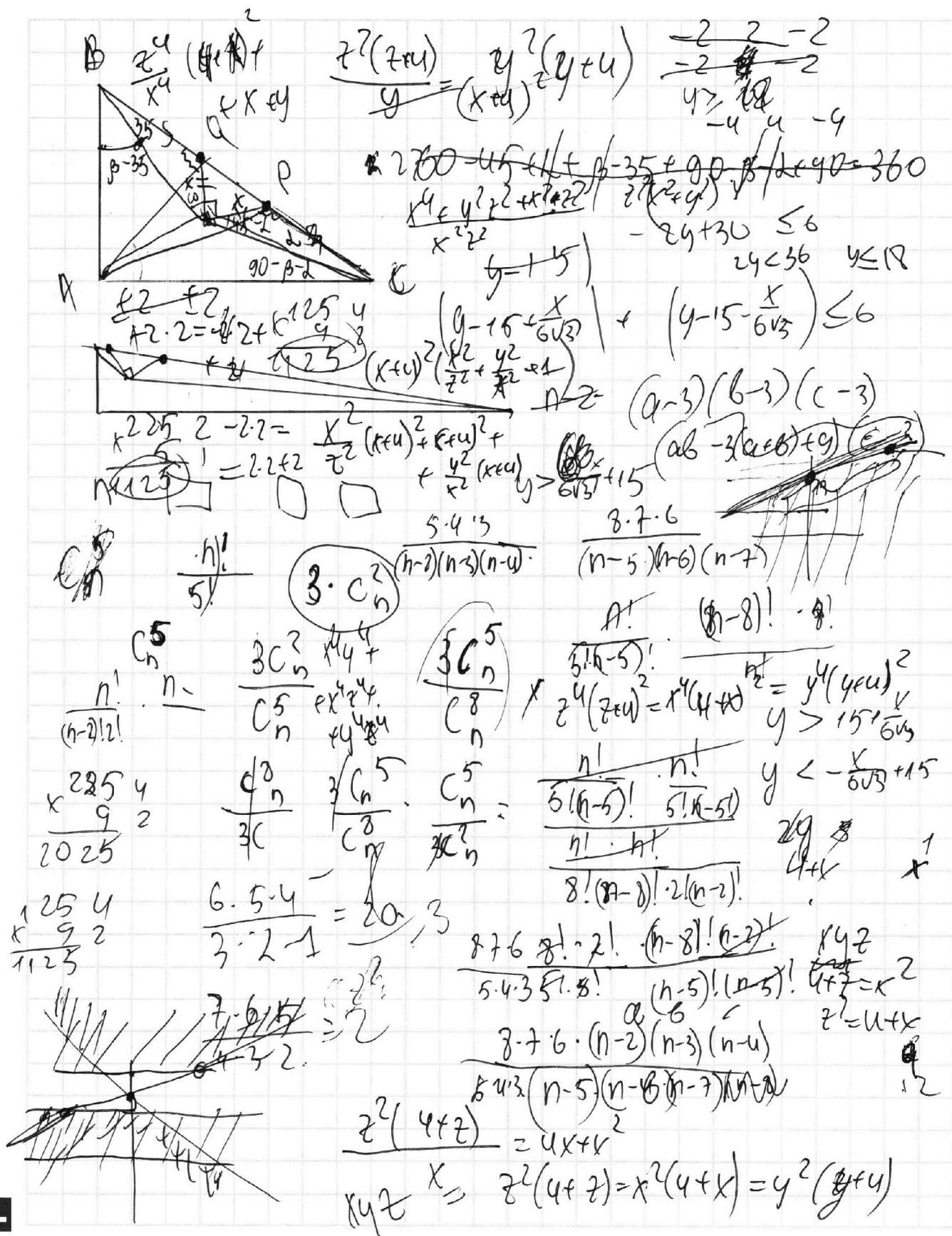
$$\frac{D}{4} = 1 + 74 = 75, \quad a_{2,7} = 1 \pm \sqrt{75}; \text{ пусть } a_2 = 1 - 5\sqrt{3}, a_7 = 1 + 5\sqrt{3},$$

тогда должно быть рав-во: $a_7 = a_2 + 5d$;

$$1 + 5\sqrt{3} = 1 - 5\sqrt{3} + 5 \cdot 2\sqrt{3}$$

$$1 + 5\sqrt{3} = 1 + 5\sqrt{3} \quad \text{верно}$$

ответ: 2.



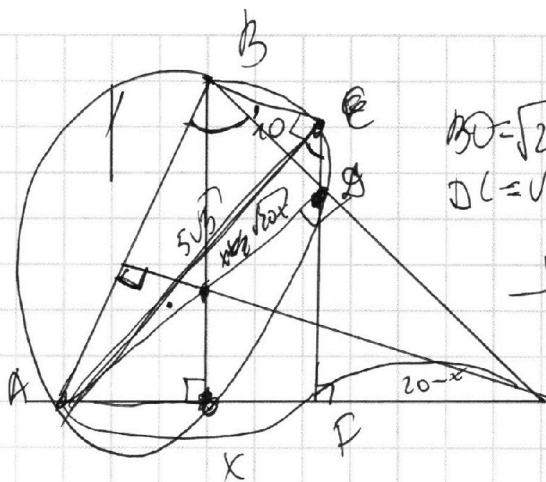


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$BO = \sqrt{225 - 20x}$$

$$DL = \sqrt{400 - 20x}$$

$$\frac{\sqrt{20x}}{\sin \angle} = 15$$

$$\frac{x}{\sin \angle} = ?$$

$$\sin \angle = \frac{x}{5\sqrt{5}}$$

$$\frac{\sqrt{20x}}{15} = \frac{x}{5\sqrt{5}}$$

$$\frac{20x}{15} = \frac{x^2}{125}$$

$$\frac{C_{2n-3}^2}{C_n^5}$$

$$\frac{20x}{\sin^2 \angle} = 225$$

$$\frac{20}{\sin \angle} \cdot \frac{x}{\sin \angle} = \frac{225}{5}$$

$$\frac{C_{n-3}^5}{C_n^8}$$

$$\frac{C_n^5}{C_{n-3}^2}$$

$$\frac{n!(n-3)!}{5!5!}$$

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2 \\ yz = 4x + x^2 \\ zx = 4y + y^2 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 8(zx + xy + yz) + 48$$

$$48 + 2xy + 2yz + 2zx + x^2 + y^2 + z^2$$

$$(z+4)^2 + (x+4)^2 + (y+4)^2$$

$$\begin{aligned} z^2 + xy + 4 &\geq 0 & -8 \\ y^2 + 4 &\geq 0 & -8 \\ z^2 + 4 &\geq 0 & -8 \end{aligned}$$

$$xy + 4z + yz + 4x + zx + 4y + 48 =$$

$$xy + yz + xz - x^2 - y^2 - z^2 = 4x + 4y + 4z$$

$$48 - (x-z)^2 - (x-y)^2 - (y-z)^2$$

$$48 - (x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx)$$

$$\begin{aligned} &\times \frac{28}{5} \quad \times \frac{28}{5} \quad \times \frac{28}{5} \\ &\frac{14}{6} \quad \frac{2}{56} \quad \frac{28}{30} \end{aligned}$$

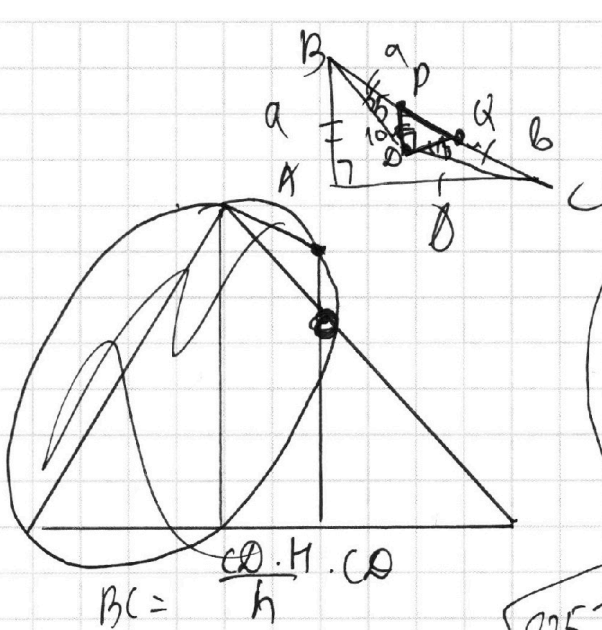


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

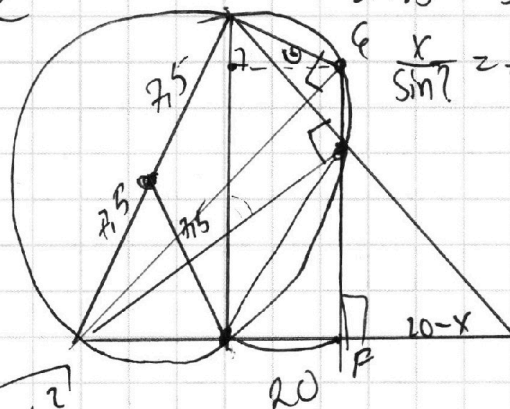
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a-b}{\sqrt{2} \sin \alpha}$$

$$\frac{x}{\sin 35^\circ} = \frac{a}{\sin 10^\circ}$$

$$\frac{x}{\sin 7^\circ} = \frac{b}{\sin 6^\circ}$$

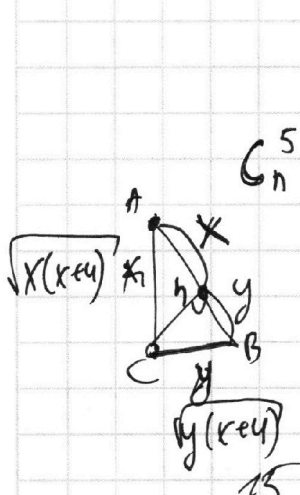


$$\frac{h}{r} = \frac{CD}{BC} n$$

$$20(20-x+y) = \sqrt{225-h^2}$$

$$FE = h - \sqrt{100 - (x - \sqrt{225-h^2})^2}$$

$$= h - \sqrt{100 - x^2 - 225 + h^2 + 2x\sqrt{225-h^2}}$$



$$\frac{3}{n}$$

③

$$\frac{h}{\sqrt{x(x+y)}} = \frac{y}{\sqrt{y(1+x+y)}}$$

$$\frac{h^2}{x(x+y)} = \frac{y^2}{y(1+x+y)}$$

$$\frac{h^2}{x} = y$$

$$\frac{C_n^2}{C_n^3} \cdot \frac{C_n^5}{C_n^2} = \frac{(n-5)! \cdot 5!}{n!}$$

$$\frac{(n-5)! \cdot 8!}{(n-5)! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{(n-5)(n-6)(n-7)}$$

$$\frac{20h}{2} = 10h$$

$$x(20-x) + (20-x)x = 20$$

$$20 \cdot x + (20-x)20 = 20$$

$$20x + 400 - 20x = 20$$

$$(20-x)x = h^2$$

$$\frac{h \cdot (20-x) + h \cdot x}{h} = 20h$$

$$100 - h^2 - x^2 + 20x + 100$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x^2 - (4-2)x - 2 = 0$
 $x^2 - 2x - 2 = 0$
 $\frac{a^3 - a^2}{2} = a^2 \cdot 4$
 $(a-1)(a^2 - 2a) = 0$
 $a(a-1)(a-2) = 0$
 $a = 0, a = 1, a = 2$

25000
 $81(11 \dots 1)$
 25000
 $100^2 - 1 = 10000 - 1 = 9999$
 $100^2 + 1 - 200 = 10000 + 1 - 200 = 9801$
 $9999 \dots 9$
 25000
 $(100 \dots 0 - 1)^3 = 1000000 - 3 \cdot 100 \dots 0 + 3 \cdot 10000 - 1 = 999999$

$x^2 - (2-a)x + \frac{2-a^2}{3} = 0$
 $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^2(a-1) = 0$
 $a^2(a-1) = 2a(a-1)$
 $a(a-1)(a-1) = 0$
 $a = 0, a = 1$
 $x = \frac{1}{3}, x = \frac{1}{3} \pm i\sqrt{\frac{2}{3}}$

$x^2 - a(a-1) + \frac{2-a^2}{3} = 0$
 $2(x^2 - a^2(a-1)x - 2(a^6 + 4a^4 + 2)) = 0$
 $\frac{2-a^3}{3} = a_1 \cdot a_5$
 $2a_1 + 3d = 4d$
 $a_1 + d = a_5$
 $a_1 = 1, d = 1$
 $a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4, a_5 = 5, a_6 = 6, a_7 = 7$
 $x^2 + \frac{2}{3}$
 $a(a-1) = a_1 + 45$
 $2(a^6 + 4a^4 + 2) = a_2 \cdot a_2$
 $a^2(a-1) = a_2 + 47$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

① $\begin{cases} xy = 4z + z^2 \\ yz = 4x + x^2 \\ zx = 4y + y^2 \end{cases}$ $7(4+z)$ $x+4y+z = \frac{xy+yz+zx-z^2-x^2-y^2}{4}$

$(\frac{xy}{z})^2 + (\frac{yz}{x})^2 + (\frac{zx}{y})^2 =$

$\frac{x^2y^2 \cdot x^2}{z^2x^2} + \frac{y^2z^2 \cdot y^2}{x^2y^2} + \frac{z^2x^2 \cdot z^2}{y^2z^2} =$

$\frac{x^4y^2 + y^4z^2 + z^4x^2}{(xyz)^2}$

$(2xy + 2yz + 2zx) = 8z + 2z^2$

$+ 8x + 2x^2 + 8y + 2y^2$

$(x-z)^2 + (x-y)^2 + (y-z)^2 + 8(x+y+z) = 0$

$x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 8y + 8z + 48 = x^2 + y^2 + z^2 + 4$

$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx - z^2 - y^2 - x^2) + 48 = 0$

$= x^2 - y^2 - x^2 - z^2 + 2xy + 2z + 2zy + 48 = 0$

$-(x-y)^2 - (x-z)^2 - (y-z)^2 + 48 = 0$

$8(x+y+z) + 48$

$8(\frac{yz}{x+4} + \frac{xz}{y+4} + \frac{xy}{z+4}) + 48 = xy + yz + zx + 12$

$= xy + yz + zx + 4 + zx + 4 =$

$8(x+y+z) + 36 = xy + yz + zx$

$8(z+4) = 8x + 8y + 8z + 36$

$z^2 - 4z + 4 = 8(x+y) + 40$

$xy + 4z + yz + 4x + 2x + 4y + 48 = 8x + 8y + 8z + 36$

$(y+4)(x+z) \quad xy + yz + xz = 4x + 4y + 4z$

$x^2 + y^2 + z^2 = 0$

