



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2, \\ yz = -2x + x^2, \\ zx = -2y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 30 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 8$, $BE = 6$.
4. [4 балла] В теленгре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть семь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$ являются четвертым и девятым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| + \left|x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| \leq 4$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle BCA = 50^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} yz = -2x + x^2 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} xz = -2y + y^2 & (3) \end{cases}$$

~~Доказать, что все числа попарно различны~~

Заметим, что $x=y=z$ невозможно. Предположим противное, тогда $x^2 = -2x + x^2 \Leftrightarrow -2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, но числа ненулевые.

Поэтому какие-то 2 числа различны. Пусть, без ограничения общности, $x \neq y$. Тогда поделим (2) на (3). Так можно сделать, т.к. числа ненулевые, а все слагаемые из систем уравнений не равны нулю.

$$\text{Получим равенство } \frac{y}{x} = \frac{-2x + x^2}{-2y + y^2} \Leftrightarrow -2y^2 + y^3 = -2x^2 + x^3 \Leftrightarrow x^3 - y^3 - 2(x^2 - y^2) = 0$$

(1) по ПСУ

$$(x-y)(x^2 + y^2 + xy) - 2(x-y)(x+y) = 0$$

$$(x-y)(x^2 + y^2 + xy - 2x - 2y) = 0$$

(т.к. $x \neq y$)

$$x^2 + y^2 + xy - 2x - 2y = 0 \quad (4)$$

Сложим (2) и (3): $yz + xz = -2x - 2y + x^2 + y^2$. Подставим это в (4): $xy + yz + xz = 0 \quad (5)$

Сложим (1), (2), (3): $xy + yz + xz = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z \stackrel{\text{по ПСУ}}{=} (x+y+z)^2 - 2x - 2y - 2z - 2xy - 2yz - 2xz$
 $(x+y+z)^2 - 2(x+y+z) = 0 \Leftrightarrow (x+y+z)(x+y+z-2) = 0$ (по (5))



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

⇓

$$x+y+z=0 \text{ или } x+y+z=2.$$

Но если $x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2=2(x+y+z)=0 \Rightarrow x=y=z=0$, ~~но такое решение~~
 $\nearrow$ не удовлетворяет условию.

$$\text{Поэтому } (x+y+z)=2$$

$$\text{Рассмотрим } (x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=x^2+y^2+z^2-4x-4y-4z+12=(x+y+z)^2-4(x+y+z)+12+$$

$$+4xy+4yz+4xz+2(xy+yz+xz)=4-8+12=8. \text{ П. Р. } \textcircled{D} \text{ решение существует,}$$

$\nearrow$ по (5)

Это означает существование, и оно естественно, как было показано в решении.

Ответ: 8.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2

Заметим, что $n = 10^{30001} - 1$, поэтому $n^3 = (10^{30001} - 1)^3 = 10^{90003} - 3 \cdot 10^{60002} + 3 \cdot 10^{30001} - 1$,
по формуле разности

а у нашего числа почитаем, сколько девяток десятичной записи:

из числа $10^{90003} - 1 = \underbrace{99 \dots 9}_{90003}$ вычтем $\underbrace{300 \dots 0}_{60002}$, получим $\underbrace{99 \dots 9}_{30000} \underbrace{699 \dots 9}_{60002}$.

Затем к нему прибавим $\underbrace{300 \dots 0}_{30001}$, получим $\underbrace{99 \dots 9}_{30000} \underbrace{400 \dots 0}_{30000} \underbrace{299 \dots 9}_{30001}$.

А у нашего числа $30000 + 30001 = 60001$ девяток.

Ответ: 60001



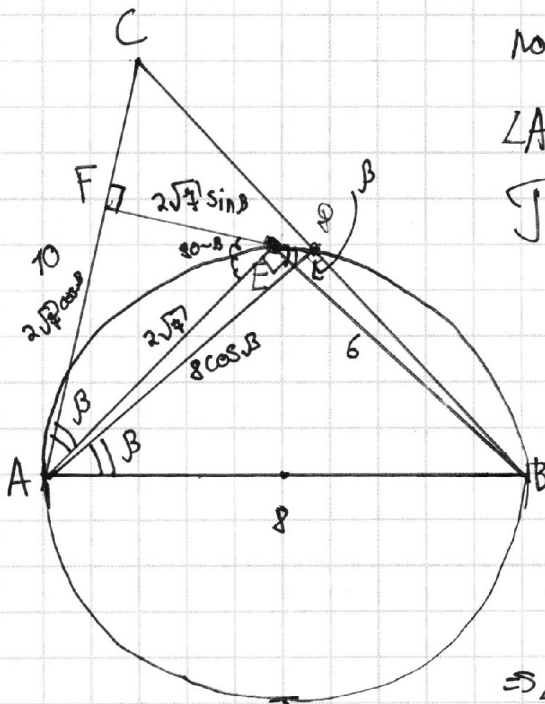
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3



по свойству касательной к в-ву окружности

$$\angle AEB = \angle APB = 90^\circ$$

Пусть $\angle CAE = \beta$. Тогда $\angle FEA = 90 - \beta$ по т.

о сумме углов т-ка в т-ке AFE

$$\angle BEP + \angle AEB + \angle FEA = 180^\circ, \text{ т.е. введем}$$

образован развернутый угол. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle BEP + 90^\circ + 90 - \beta = 180^\circ \Rightarrow \angle BEP = \beta \Rightarrow$$

$\Rightarrow \angle PAB = \beta$ как опирающиеся на одну и ту

же хорду в $\odot$ и соответствующие отрезки относительно к-ей в одной плоскости с $\angle BEP$.

$$\text{по т. Пифагора в т-ке AEB} \quad AE^2 + BE^2 = AB^2 \Rightarrow AE = \sqrt{64 - 36} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

$$\text{из т-ка AFE (прямоугольный)} \quad FE = 2\sqrt{7} \sin \beta \text{ и } AF = 2\sqrt{7} \cos \beta$$

$$\text{из прямоугольного т-ка APB} \quad AP = 8 \cos \beta$$

По св-ву высоты прямоугольного т-ка в т-ке APC и высоте PF

$$AP^2 = AF \cdot AC \Rightarrow 64 \cos^2 \beta = 20\sqrt{7} \cos \beta \Rightarrow \cos \beta = \frac{20\sqrt{7}}{64} = \frac{5\sqrt{7}}{16} \Rightarrow AF = 2\sqrt{7} \cos \beta =$$

$$= 2\sqrt{7} \cdot \frac{5\sqrt{7}}{16} = \frac{35}{8}$$

Ответ: $\frac{35}{8}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4

Пусть у водителя n коробок. После его хода в каких-то трёх
 оказываются шары. ~~Посчитаем~~ Вероятность



выбора исковых шаров как отношение исковых шаров
количество всех шаров.

В первом случае выбрать пять коробок из n элементов C_n^5
 способами, это есть все способы сделать выбор. Исковых все
 способов C_{n-3}^2 : 2 шарика фиксированы, их выбор обязателен.

Дополнительно к ним надо добавить 2 шарика из $n-3$ оставшихся.

Во втором случае выбрать 4 коробки из n элементов C_n^4 способами,
 это есть все способы сделать выбор. Исковых способов C_{n-3}^4 : 3

шарика фиксированы, их выбор обязателен. Дополнительно к ним
 надо добавить 4 из $n-3$ оставшихся.

Поэтому вероятности в первом случае η_1 и во втором η_2 соответственно:

$$\eta_1 = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}$$

$$\eta_2 = \frac{C_{n-3}^4}{C_n^4}$$

$$\text{Искомое отношение } \frac{\eta_2}{\eta_1} = \frac{C_{n-3}^4 C_n^5}{C_n^4 C_{n-3}^2} \stackrel{\text{по формуле } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}}{=} \frac{(n-3)! \cdot n!}{4! \cdot 5! (n-4)! (n-3)!} = \frac{2! \cdot 4!}{4! \cdot 5!} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5} = \frac{2}{5}$$

Ответ: $\frac{2}{5}$.



1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N5

Пусть корни $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 4 = 0$ x_1, x_2 , корни $3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a = 0$ x'_1, x'_2 , каковы-либо члены арифметической прогрессии a_0 , её разность d .
 И пусть x_1 - шестой член, x_2 - седьмой член, x'_1 - четвёртый, x'_2 - девятый член прогрессии. Тогда по ф-ле n -го члена арифметической прогрессии
 $x_1 = a_0 + 5d$; $x_2 = a_0 + 6d$; $\Rightarrow x_1 + x_2 = 2a_0 + 11d$
 $x'_1 = a_0 + 3d$; $x'_2 = a_0 + 8d$; $\Rightarrow x'_1 + x'_2 = 2a_0 + 11d$.
 $\Rightarrow x_1 + x_2 = x'_1 + x'_2 \quad (1)$

По пом. Вспом. для первого и второго квадратного уравнения

соответственно $x_1 + x_2 = a^2 - 2a$; $x'_1 + x'_2 = \frac{a^3 - 2a^2}{3} \Rightarrow \text{по (1)} \quad a^2 - 2a = \frac{a^3 - 2a^2}{3}$

$a(a-2) = \frac{a^3 - 2a^2}{3}$

$a(a-2)(3-a) = 0 \Rightarrow a = 0 \vee a = 1 \vee a = 2$. Проверим, какие из них подходят.
 Если $a = 0$, первое уравнение $x^2 - 4 = 0$ имеет корни $x = \pm 2$. Второе уравнение $3x^2 + 6 = 0$ не имеет решений.

Если $a = 1$, второе уравнение $3x^2 + x + 5 = 0$ не имеет корней, т.к. $\Delta = 1 - 60 = -59 < 0$.

Если $a = 2$, первое уравнение $x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{5}$
 Второе $3x^2 - 26 = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{26}{3}}$
 $x_1 = \sqrt{5}$; $x_2 = -\sqrt{5}$
 $x'_1 = \sqrt{\frac{26}{3}}$; $x'_2 = -\sqrt{\frac{26}{3}}$

Итак

$\Downarrow$

$3a^2 - 6a = a^3 - 2a^2 \Leftrightarrow a^3 - 5a^2 + 6a = 0 \Leftrightarrow a(a^2 - 5a + 6) = 0 \Leftrightarrow a(a-2)(a-3) = 0$

Проверим, какие a подходят.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

если $a=0$,

второе уравнение $3x^2+6=0 \Rightarrow x^2=-2$ ~~не имеет решений~~, поэтому

следующее рассуждение

если $a=2$, первое уравнение $x^2-5=0 \Rightarrow x_2=\pm\sqrt{5}$

второе $3x^2-26=0 \Rightarrow x_2=\pm\sqrt{\frac{26}{3}}$

Получим $x_1=\pm\sqrt{5}$; $x_2=\pm\sqrt{\frac{26}{3}}$

$$\begin{aligned} \text{Получим } \begin{cases} a_0+5d=-\sqrt{5} \\ a_0+6d=\sqrt{5} \end{cases} & \Rightarrow d=2\sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{\frac{26}{3}} = a_0+3d \text{ или } a_0+8d = \\ & = -\sqrt{5} - 2d \text{ или } \sqrt{5} + 2d = \\ & = -5\sqrt{5} \text{ или } 5\sqrt{5}, \text{ что неверно} \end{aligned}$$

Получим $x_1=\sqrt{5}$; $x_2=-\sqrt{5}$

$$\begin{aligned} \text{Получим } \begin{cases} a_0+5d=\sqrt{5} \\ a_0+6d=-\sqrt{5} \end{cases} & \Rightarrow d=-2\sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{\frac{26}{3}} = a_0+3d \text{ или } a_0+8d = \\ & = \sqrt{5} - 2d \text{ или } -\sqrt{5} + 2d = \\ & = 5\sqrt{5} \text{ или } -5\sqrt{5}, \text{ что неверно} \end{aligned}$$

если $a=3$, первое уравнение

$$x^2-3x-1=0 \Rightarrow x_2=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}=\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$\text{второе } 3x^2-9x-234=0 \Rightarrow x^2-3x-49=0 \Rightarrow x_2=\frac{3\pm\sqrt{325}}{2}=\frac{3\pm 5\sqrt{13}}{2}= \\ =\frac{3}{2}\pm\frac{5\sqrt{13}}{2}$$

Если считать, что $a_0=\frac{3}{2}-\frac{11}{2}\sqrt{13}$, получим $d=\sqrt{13}$,

тогда $a_0+5d=\frac{3}{2}-\frac{11}{2}\sqrt{13}+5\sqrt{13}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{13}$ — не подходит

уравнения, тогда $a_0+6d=\frac{3}{2}-\frac{11}{2}\sqrt{13}+6\sqrt{13}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{13}$ — второй корень уравнения



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА

3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

четвёртый член $a+3d = \frac{3}{2} - \frac{10\sqrt{3}}{2} + 3\sqrt{3} = \frac{3}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}$ — один из корней II уравнения,

пятый член $a+4d = \frac{3}{2} - \frac{11\sqrt{3}}{2} + 4\sqrt{3} = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$ — второй корень II уравнения.

Таким образом, подходит только $a=3$

Ответ: $a=3$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N6

Построим φ :

$$\begin{array}{l} \text{Пусть } x \geq 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} \\ x \geq 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} \end{array} \quad + \quad x \geq 10$$

Все модели раскроем положительно, а значит, $x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} + x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} \leq 4$

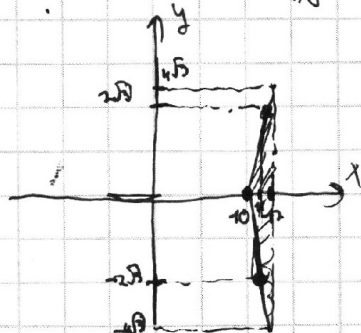
$x \leq 12$ равносильное условие.

$$\text{Построим первые четыре: } \begin{cases} x \geq 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} \\ x \geq 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} \\ x \leq 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 11 \\ y \geq (10 - x)2\sqrt{3} \\ y \leq (x - 10)2\sqrt{3} \end{cases}$$

здесь не надо писать неравенства

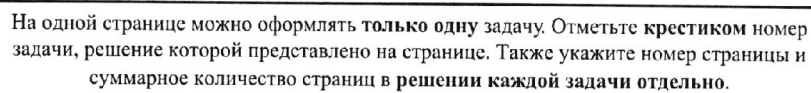
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 12 \\ (x - 10)2\sqrt{3} \geq y \geq (10 - x)2\sqrt{3} \end{cases}$$

↑ "уголок" от 10 до 12 (протяжка области — две прямые, симметричные относительно $x=10$)! Если $x=0$, $y=0$; если $x=11$,



$$2\sqrt{3} \geq y \geq -2\sqrt{3} \quad \text{Вся область}$$

$$x=11, \quad 4\sqrt{3} \geq y \geq -4\sqrt{3}$$



7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

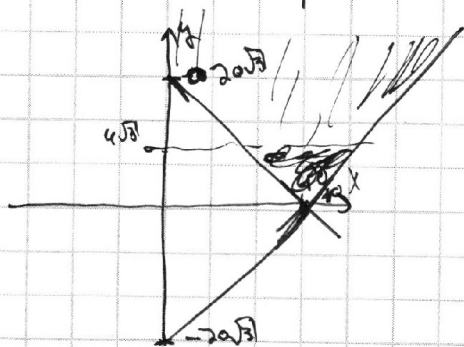
$$\begin{cases} y \geq (10-x) \cdot 2\sqrt{2} \\ y \geq (x-10) \cdot 2\sqrt{2} \end{cases} \quad (\Rightarrow)$$

$y \geq 10 + x$ | 2B
 $x \leq 10$, $y \geq 10 - x$ | 2B-body
 Größe Prozess (10-x)
 Die Größe prozessen antworten
 Kollisions

Depot- bzw. Zwischenlag $x - 10 + \frac{y}{20} - x + 10 + \frac{y}{20} \leq 4$

4545

Төрөлжөө змч нээгдэнэ:



۱



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N4

Пусть $AB=x, AC=y$

$$BP+CQ=BC+PQ$$

или

$$x+y=\sqrt{x^2+y^2}+PQ \Rightarrow PQ=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$$

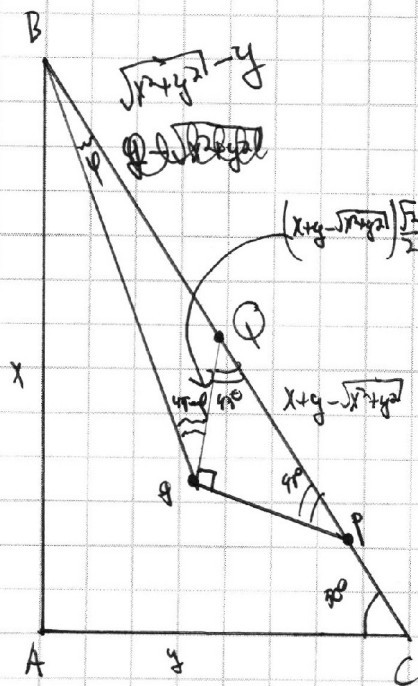
? по т. Пифагора в $\triangle ABC$

PQ - равнобедренный треугольник

т.к. $\angle BPC = 90^\circ$ и $\angle BQC = 90^\circ$ и $\angle BPC = 90^\circ$

$$\angle BPC = 90^\circ \Rightarrow PQ = \frac{(x+y-\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{2}}{2}$$

$$BQ = BP - PQ = x - \frac{(x+y-\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{2}}{2} = \sqrt{x^2+y^2} - y$$



Пусть $\angle BPC = \varphi$. Тогда по т. о. синусов угол $\angle BPC$ в $\triangle BPC$

$$\angle BPC = 45^\circ - \varphi$$

Запишем т. синусов в $\triangle BPC$:

$$\frac{(x+y-\sqrt{x^2+y^2})\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin \varphi} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}-y}{\sin(45^\circ-\varphi)}$$

$y = x \cdot \tan 50^\circ$ из т. Пифагора в $\triangle ABC$. Подставим это:

$$\frac{(x+x \tan 50^\circ - \sqrt{x^2+x^2 \tan^2 50^\circ})\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin \varphi} = \frac{\sqrt{x^2+x^2 \tan^2 50^\circ} - x \tan 50^\circ}{\sin(45^\circ-\varphi)}$$

(сократим обе части на x)

$$\frac{(1+\tan 50^\circ - \sqrt{1+\tan^2 50^\circ})\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin \varphi} = \frac{\sqrt{1+\tan^2 50^\circ} - \tan 50^\circ}{\sin(45^\circ-\varphi)}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Воспользуемся тем, что $1 + \tan^2 2 = \frac{1}{\cos^2 2}$.

$$\frac{(1 + \tan 50^\circ - \frac{1}{\cos 50^\circ}) \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin \varphi} = \frac{\frac{1}{\cos 50^\circ} - \tan 50^\circ}{\sin(45^\circ - \varphi)} \cdot \cos 50^\circ$$

$$\frac{(\cos 50^\circ + \sin 50^\circ - 1) \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin \varphi} = \frac{1 - \sin 50^\circ}{\sin(45^\circ - \varphi)}$$

$$\frac{(\cos 50^\circ + \sin 50^\circ - 1) \sqrt{2}}{2 \sin \varphi} = \frac{1 - \sin 50^\circ}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \varphi - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi}$$

$$\downarrow$$
$$\frac{\cos 50^\circ + \sin 50^\circ - 1}{\sin \varphi} = \frac{2 - 2 \sin 50^\circ}{\cos 45^\circ - \sin 45^\circ}$$

$$\downarrow$$
$$\frac{\cos 45^\circ - \sin 45^\circ}{\sin \varphi} = \frac{2 - 2 \sin 50^\circ}{\cos 50^\circ + \sin 50^\circ - 1}$$

$$\downarrow$$
$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{2 - 2 \sin 50^\circ}{\cos 50^\circ + \sin 50^\circ - 1} + 1 = \frac{2 - 2 \sin 50^\circ + \cos 50^\circ + \sin 50^\circ - 1}{\cos 50^\circ + \sin 50^\circ - 1} = \frac{\cos 50^\circ - \sin 50^\circ + 1}{\cos 50^\circ + \sin 50^\circ - 1}$$

$$\varphi = \arccos \left(\frac{\cos 50^\circ - \sin 50^\circ + 1}{\cos 50^\circ + \sin 50^\circ - 1} \right)$$

$$\text{Ответ: } \arccos \left(\frac{\cos 50^\circ - \sin 50^\circ + 1}{\cos 50^\circ + \sin 50^\circ - 1} \right)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$xy = -2z + z^2$
 $yz = -2x + x^2$
 $xz = -2y + y^2$

$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$
 $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z + 12$
 $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - 2x - 2y - 2z + 10$
 $xy + yz + xz + 12 - 2x - 2y - 2z$
 $2xy - z^2 + 2yz - x^2 - 2xz - y^2 + x$
 $-(x-z)^2 + 2xy + 2yz + 12$
 $\frac{y}{x} = \frac{-2x + x^2}{-2y + y^2}$
 $-2y^2 + y^3 = -2x^2 + x^3$
 $x^3 - y^3 + 2y^2 - 2x^2 = 0$
 $(x-y)(x^2 + y^2 + xy) + 2(y-x)(y+x) = 0$
 $(x-y)(x^2 + y^2 + xy - 2y - 2x) = 0$
 $x^2 + y^2 + xy - 2x = 0$
 $xz + yz + xy = 0$
 $-2x - 2y - 2z + 12$
 $xy - z^2 + yz - x^2 + xz - y^2 + x$
 $-2(x+y+z) + x^2 + y^2 + z^2 = 0$
 $-2(x+y+z) + (x+y+z)^2 = 0$
 $(x+y+z)(x+y+z-2) = 0$

$xy + yz + xz - 2x - 2y - 2z + 12$
 $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z + 12$
 $x^2 = -2x + x^2$
 $xy = -2z + z^2$
 $yz = -2x + x^2$
 $xz = -2y + y^2$

$A F =$
 $\frac{C_{n-3}^4}{C_{n-3}^2}$
 $n = 3$
 $\frac{C_{n-3}^4}{C_{n-3}^2} = \frac{(n-3)(n-4)}{2}$
 $\frac{C_{n-3}^4}{C_{n-3}^2} = \frac{n!}{5!(n-5)!}$
 $\frac{C_{n-3}^4}{C_{n-3}^2} = \frac{(n-6)(n-5)}{12}$
 $\frac{C_{n-3}^4}{C_{n-3}^2} = \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{(n-5)(n-6)}{12}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 4 = 0 \quad x_1, x_2$$

$$x_1 = a_0 + 5d$$

$$x_2 = a_0 + 6d$$

$$1-2=-1 \quad 3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0 \quad x'_1, x'_2$$

$$x'_1 = a_0 + 3d$$

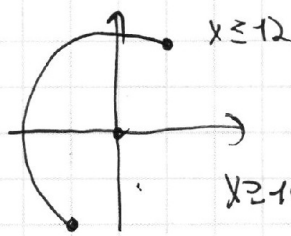
$$x^2 = 0$$

$$1) x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} + x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} \leq 4$$

$$x'_2 = a_0 + 8d$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$x - 10 \leq 2$$



$$a^2 - 2a = 2a_0 + 11d$$

$$a^3 - 2a = 2a_0 + 11d$$

$$a^2(a-2) = a(a-2)$$

$$a(a-2)(a-1) = 0$$

$$x_2 = -1 \pm \sqrt{5}$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$3x^2 + x + 10 + 5 = 0$$

$$-\sqrt{5} = a_0 + 5d$$

$$\sqrt{5} = a_0 + 6d$$

$$2\sqrt{5} = d$$

$$a_0 + 3d = -\sqrt{\frac{26}{3}}$$

$$-3\sqrt{5}$$

$$x^2 - 5 = 0$$

$$x^2 = 5 \quad x = \pm\sqrt{5}$$

$$3x^2 + 6 - 2^5 = 0$$

$$3x^2 - 26 = 0$$

$$x^2 = \frac{26}{3}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{26}{3}}$$

$$a^2 - 2a = \frac{a^3 - 2a^2}{3}$$

$$3a^2 - 6a = a^3 - 2a^2$$

$$a^3$$

$$\frac{a_0 + 3d}{a_0 + 8d} = \frac{\frac{8 - \sqrt{13}}{2}}{\frac{8\sqrt{3}}{243}}$$

$$\frac{23313}{21149}$$

$$\frac{a_0 + 3d}{a_0 + 8d} = \frac{\frac{3 - \sqrt{13}}{2}}{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}$$

$$d = \sqrt{13}$$

$$a_0 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} - \sqrt{13}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{11}{2}\sqrt{13}$$

$$13.52$$

$$4 - 10 + 6$$

$$9 - 15 + 6$$

$$9 + 4.49$$

$$\frac{32.7}{30} \cdot \frac{1}{2.5}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{(\cos 90^\circ + \sin 90^\circ - 1) \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin \varphi} = \frac{1 - \sin 90^\circ}{\sin(45^\circ - \varphi)}$$

$$\frac{(1 - \tan 90^\circ - 1) \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin \varphi} = \frac{1 - \tan 90^\circ}{\sin(45^\circ - \varphi)}$$

$$64 \cos^2 B = 2\sqrt{2} \cos B \cdot 10$$

$$\frac{\sin 2A - \sin 2B}{2} = \frac{2 \sin(\frac{A+B}{2}) \cos(\frac{A-B}{2})}{2}$$

$$\sin 90^\circ - \sin 90^\circ + 1$$

$$\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2 = 2 \sin(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}) \cos(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2})$$

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - y}{\sin(45^\circ - \varphi)} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{2}}{4 \sin \varphi}$$

$$\frac{\sqrt{\tan^2 90^\circ + 1} - 1}{\sin(45^\circ - \varphi)} = \frac{\sqrt{1 + \tan^2 90^\circ} \frac{\sqrt{2}}{2}}{4 \sin \varphi \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\frac{1}{\cos 90^\circ} - 1 = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{4 \cos 90^\circ \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$4 \sin \varphi - 4 \cos 90^\circ \sin \varphi = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \varphi - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi \right) = \cos \varphi - \sin \varphi \quad | : \cos \varphi$$

$$1 - \tan \varphi = 4 \tan \varphi - 4 \cos 90^\circ \tan \varphi$$

$$2\sqrt{2} \sin B \cdot 2\sqrt{2} \sin \varphi \sin E$$

$$28 \sin^2 B + 9E \cdot 2\sqrt{2} \sin B = 28 \cos^2 B$$

$$9E = \frac{14}{2\sqrt{2} \sin B} (\cos^2 B - \sin^2 B)$$

$$\frac{8 \cdot 14 (\cos^2 B - \sin^2 B) + 16\sqrt{2} \sin B}{\sqrt{2} \sin B} = 48 \cos B - 2 \cos^2 \frac{B}{2} \sin \frac{B}{2}$$

$$142 (\cos^2 B - \sin^2 B) + 142 \sin^2 B = 48 \sqrt{2} \sin B \cdot \cos B$$

$$142 \cos^2 B = 48 \sqrt{2} \sin B \cdot \cos B = 24 \sqrt{2} \sin 2B$$

$$\tan B = \frac{142}{48 \sqrt{2}}$$

$$\tan \varphi \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 4 \cos 90^\circ \right) = 1$$

$$1 - \tan \varphi = 4 \tan \varphi - 4 \cos 90^\circ \tan \varphi$$