



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = -6y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 20 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 10$, $BE = 9$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарик. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть девять коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$ являются пятым и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| + \left|y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| \leq 8$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle CBA = 46^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2 \\ yz = -6x + x^2 \\ zx = -6y + y^2 \end{cases}$$

$$x, y, z \neq 0 \Rightarrow$$

$$\frac{yz}{zx} = \frac{-6x + x^2}{-6y + y^2} \Rightarrow x^2(x-6) = y^2(y-6) \quad x^3 - 6x = y^3 - 6y$$

$$x^3 - 6x^2 - y^3 + 6y^2 = 0$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) - 6(x-y)(x+y) = 0$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2 - 6(x+y)) = 0$$

$$\begin{cases} x = y \\ x^2 + xy + y^2 - 6(x+y) = 0 \end{cases}$$

$$1) x = y$$

$$xz = -6x + x^2 \Rightarrow z = x - 6 = y - 6$$

$$xy = z(z-6) \Rightarrow x^2 = (x-6)(x-12) = x^2 - 18x + 72 \Rightarrow 18x = 72 \Rightarrow x = y = 4 \Rightarrow z = -2$$

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 \text{ находим:}$$

$$4 \cdot 4 = -6 \cdot (-2) + (-2)^2 = 16$$

$$4 \cdot (-2) = -6 \cdot 4 + 4^2 = -8 \Rightarrow (x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = (4-6)^2 + (4-6)^2 + (-2-6)^2$$

$$4 \cdot (-2) = -6 \cdot 4 + 4^2 = -8$$

$$= 2^2 + 2^2 + 8^2 = 72$$

$$2) x^2 + xy + y^2 - 6(x+y) = 0$$

$$x^2 + x \underbrace{(y-6)}_{\frac{z}{x}} + y^2 - 6y = x^2 + x^2 \cdot \frac{z}{y} + 2x = 0 \quad : x \neq 0 \Rightarrow$$

$$x + \frac{xz}{y} + z = 0$$

$$xy + xz + yz = 0 \Rightarrow xy + xz + yz = 0$$

$$2. \text{ перемножим все 3 уравнения:}$$

$$x^2 y^2 z^2 = x(x-6) y(y-6) (z-2) \cdot (-2-6)$$

$$xyz = (x-6)(y-6)(z-6)$$

$$xyz = xyz - 6(xy + yz + zx) + 36(x+y+z) - 216$$

$$6(xy + yz + zx)$$

$$6(xy + yz + zx) = 36(x+y+z) - 216 = 0 \Rightarrow x+y+z = 6$$

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = \text{Сложим все уравнения: } xy + yz + zx = x^2 + y^2 + z^2 - 6(x+y+z) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 36$$

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 12(x+y+z) + 108 = 36 - 12 \cdot 6 + 108 = 72$$

$$\text{Ответ: } (x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = 72$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

десятичная запись числа n состоит из 20001 девяток $\Rightarrow$

$$n = \underbrace{999 \dots 99}_{20001 \text{ цифр}} = 10^{20001} - 1$$

$$n^3 = (10^{20001} - 1)^3 = 10^{60003} - 1 - 3 \cdot 10^{40002} + 3 \cdot 10^{20001}$$

число $10^{60003} - 1$ — $\underbrace{999 \dots 99}_{60003}$, если вычесть из него $3 \cdot 10^{40002}$, то мы

получим число $\underbrace{999 \dots 9}_{20000} \underbrace{699 \dots 99}_{40002}$. А когда будем прибавлять $3 \cdot 10^{20001}$, то

из-за увеличения порядка девяток с номера $60003 - 20001 = 40002$ начнут меняться и 0 ($\leftarrow 40002$ здесь цифра нули идет из проп. в.у. девяток, а потому, на 40002 упрямой в числе одиннадцатые, т.е. в тысячные). И так будет происходить до тех пор, пока в, т.к. $6+1=7$ и дальше шестерки девяток так и остаются девятыми $\Rightarrow$ число будет следующим:

$$\underbrace{999 \dots 99}_{20000} \underbrace{700 \dots 0}_{20001} \underbrace{0299 \dots 99}_{20001} \Rightarrow$$

всего девяток будет $20000 + 20001 = 40001$.

Ответ: 40001

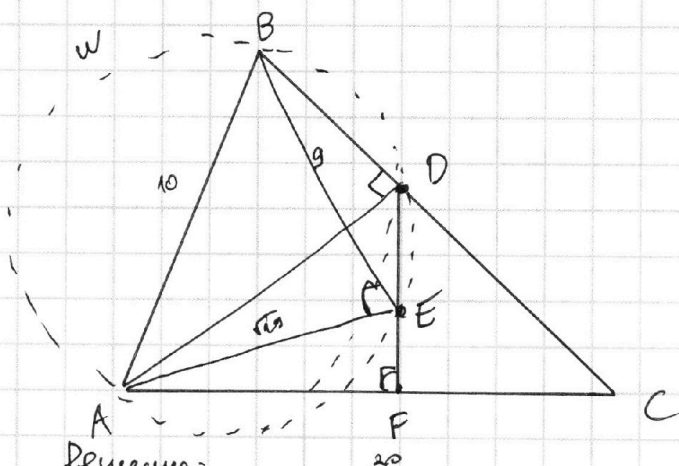


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано:

остр. $\triangle ABC$; остр-тв w с диаметром AB
 $w \cap BC = D$ ($D \neq B$)

$DE \perp AC$

$w \cap DE = E$ ($D \neq E$)

или $AC = 20$

$AB = 10$

$BE = 9$

Найти:

AF - ?

Решение:

1) остр-тв w с диаметром AB - гиселетр остр-тв $w \Rightarrow \angle APB = \angle AEB = 90^\circ \Rightarrow$

$\triangle AEB$ - прямоугол. $\Rightarrow$ Т. Пифагора:

$$AB^2 = AE^2 + BE^2 \Rightarrow AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{10^2 - 9^2} = \sqrt{19}$$

2) $ABDE$ - вписанный $\Rightarrow \angle BAE + \angle BDE = 180^\circ$

$$\angle BDE = 90^\circ \quad \angle ADB + \angle ADE = 90^\circ + \angle ADE \Rightarrow \angle BAE + \angle ADE = 90^\circ$$

3) Рассм. $\triangle ADF$: $DF \perp AC \Rightarrow \angle AFD = 90^\circ \Rightarrow \triangle AFD$ - прямоугол. $\Rightarrow$
 $\angle DAF + \angle ADE = 90^\circ \Rightarrow \angle DAF = \angle BAE \Rightarrow \cos \angle BAE = \cos \angle DAF = \frac{\sqrt{19}}{10}$

4) Рассм. $\triangle ADC$: $\angle ADC = 90^\circ \Rightarrow \triangle ADC$ - прямоугол. $\Rightarrow AD^2 = AF \cdot AC$

$$\cos \angle DAF = \frac{AF}{AD} = \frac{\sqrt{19}}{10} \Rightarrow AD = \frac{10}{\sqrt{19}} AF \quad \Rightarrow$$

$$AD^2 = AF \cdot AC \Leftrightarrow AF^2 \cdot \frac{100}{19} = AF \cdot AC \Rightarrow AF = AC \cdot \frac{19}{100} = 20 \cdot \frac{19}{100} = \frac{19}{5} = 3,8$$

Ответ: $AF = 3,8$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Вероятность выигрыша — отношение кол-ва выигрышных ситуаций к кол-ву всевозможных ситуаций.

Чтобы победить, игроку надо взять k коробок так, чтобы среди них были 3 шарика, т.е. кол-во ~~выигрышных~~ выигрышных ситуаций — когда 3 шарика из n коробок есть, а оставшиеся $k-3$ можно брать как угодно. А эти $k-3$ коробки ^{выбираются} берутся из $n-3$ коробок; поэтому кол-во выигрышных ситуаций — $C_{n-3}^{k-3} = \frac{(n-3)!}{(k-3)!(n-k)!}$. А всего ситуаций $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \Rightarrow$

$$\text{вероятность: } \frac{C_{n-3}^{k-3}}{C_n^k} = \frac{\frac{(n-3)!}{(k-3)!(n-k)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = \frac{(n-3)! \cdot k!}{(k-3)! \cdot n!}$$

Сначала $k=7$, тогда $\Rightarrow$ вероятность увеличилась в:

$$\frac{\frac{(n-3)! \cdot 9!}{(9-3)! \cdot n!}}{\frac{(n-3)! \cdot 5!}{(5-3)! \cdot n!}} = \frac{2! \cdot 9!}{6! \cdot 5!} = \frac{2^2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{42}{5} = 8,4 \text{ раз}$$

Ответ: вер-ть возросла в 8,4 раз



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

☐

2

☐

3

☐

4

☐

5

☒

6

☐

7

☐

СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$x_4 - x_2 = \frac{5 + 3\sqrt{29}}{2} - \frac{5 + \sqrt{29}}{2} = \sqrt{29}$$

$$x_2 - x_1 = \frac{5 + \sqrt{29}}{2} - \frac{5 - \sqrt{29}}{2} = \sqrt{29} \Rightarrow a = 5 \text{ не подходит}$$

$$x_1 - x_3 = \frac{5 - \sqrt{29}}{2} - \frac{5 - 3\sqrt{29}}{2} = \sqrt{29}$$

ответ: $a = 5$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть исходная арифм. прогрессия = ~~$\{b_n\}$~~ . И ~~корректируем уравнение~~ введем числа ~~b_1, b_2~~ , а ~~второго~~ ~~b_5, b_8~~ .
 чтобы условие выполнялось, необходимо чтобы ~~$b_6 + b_7 = b_5 + b_8$~~

Пусть корни первого уравнения - x_1 и x_2 , а второго - x_3 и x_4
 чтобы эти числа удовлетворяли условию, должно выполняться равенство: $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$
 Это так потому, что если x_1 и x_2 - меньшей и большей членами прогрессии, то $x_1 + x_2 = 2b_1 + 11d$,
 а если x_3 и x_4 - меньшей и большей, то $x_3 + x_4 = 2b_1 + 11d$, т.е. b_1 - первый член
 прогрессии, а d - ее разность, т.е. $x_1 + x_2 =$ необходимо, чтобы $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$
 но + не всегда:

$$x_1 + x_2 = a - (- (a^2 - 4a)) = a^2 - 4a$$

$$x_3 + x_4 = -(- (a^2 - 4a^2)) = a^2 - 4a^2$$

$$a^2 - 4a = a^2 - 4a^2$$

$$a(a-4) = a \cdot a(a-4) \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=4 \\ a=5 \end{cases}$$

Проверим полученные a :

1) $a=0$

$$x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0 \Rightarrow x^2 + 4 = 0, \text{ не имеет корней, т.е. } x_1 \text{ и } x_2 \text{ не существуют}$$

не может удовлетворять условию

2) $a=4$

$$x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2 \Rightarrow d = \pm 4$$

$$5x^2 - (a^2 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0 \Rightarrow 5x^2 - 167 = 0 \Rightarrow x_3 = -\sqrt{\frac{167}{5}}, x_4 = \sqrt{\frac{167}{5}}$$

Проверим не равны ли $\pm 4 \Rightarrow a=4$ не подходит

3) $a=5$

$$x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x - 1 = 0$$

$$D = 25 + 4 = 29$$

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{29}}{2}, x_2 = \frac{5 + \sqrt{29}}{2}$$

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{29}}{2}, x_2 = \frac{5 + \sqrt{29}}{2}$$

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{29}}{2}, x_2 = \frac{5 + \sqrt{29}}{2}$$

$$5x^2 - (a^2 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0 \Rightarrow 5x^2 - 25x - 295 = 0$$

$$D = 25 + 4 \cdot 29 = 261$$

$$x_3 = \frac{5 - \sqrt{261}}{2}, x_4 = \frac{5 + \sqrt{261}}{2}$$

$$x_3 = \frac{5 - \sqrt{261}}{2}, x_4 = \frac{5 + \sqrt{261}}{2}$$

$$x^2 - 5x - 59 = 0$$

$$\sqrt{261} = \sqrt{9 \cdot 29} = 3\sqrt{29}$$

Но чтобы числа x_3, x_1, x_2, x_4 являлись последовательными членами арифм. прогрессии, необходимо и достаточно, чтобы $x_4 - x_2 = x_2 - x_1 = x_1 - x_3$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

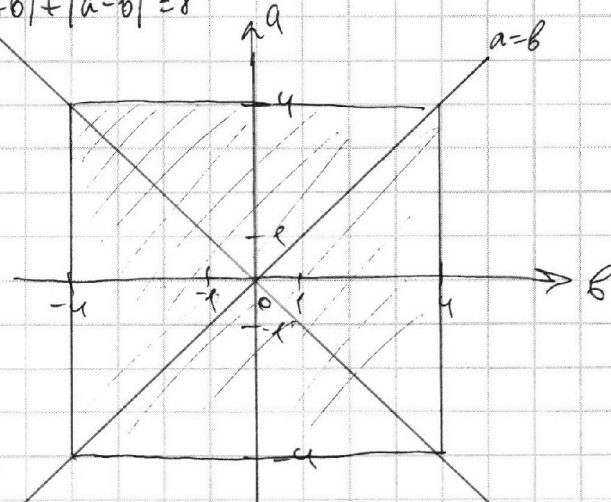
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Построим фигуру Φ в координатах плоскости a, b , где $a = y - 20$; $b = \frac{x}{2\sqrt{3}}$.
 Тогда первое преобразование в $|a+b| + |a-b| \leq 8$
 $|a+b| + |a-b| \leq 8$

$$\begin{cases} a \geq b \\ a \geq -b \\ a+b+a-b \leq 8 \\ a \geq b \\ a \leq -b \\ -a-b+a-b \leq 8 \\ a \leq b \\ a \geq -b \\ a+b-a+b \leq 8 \\ a \leq b \\ a \leq -b \\ -a-b-a+b \leq 8 \end{cases}$$

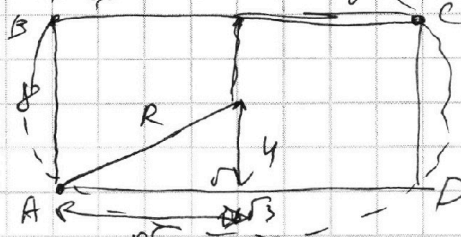
$$\begin{cases} a \geq b \\ a \geq -b \\ a \leq 4 \\ a \geq b \\ a \leq -b \\ b \geq -4 \\ a \leq b \\ a \geq -b \\ b \leq 4 \\ a \leq b \\ a \leq -b \\ a \geq -4 \end{cases}$$



Т.е. фигура Φ в координатах a, b — квадрат со стороной 8. $a = y - 20$, координата y имеет значения от 12 до 28 , то есть сама фигура сдвинута. $b = \frac{x}{2\sqrt{3}}$, т.е. $x = 2\sqrt{3}b$ $\Rightarrow$ в координатах x, y фигура Φ будет прямоугольником со сторонами 8 по y и $8 \cdot 2\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$ по x .

Фигура Φ прямоугольник $\Rightarrow$ описать можно описав окружность (с учетом противонаправленных углов $\pm 90^\circ$)

Найдем R — радиус этой окружности. Т.к. фигура — прямоугольник, то $R^2 = 4^2 + (8\sqrt{3})^2 = 208$
 Отметим вершины прямоугольника A, B, C, D .



Во время поворота они будут двигаться по окружности, т.е. $A \rightarrow C, B \rightarrow D, C \rightarrow A, D \rightarrow B$.

Т.е. ~~прямоугольник~~ ~~преобразуется~~ в фигуру Φ после поворота будет вписан не прямоугольник, что и после, т.е. прямоугольник займет всю возможную площадь, а она равна площади круга радиуса R .
 $S = \pi R^2 = 208\pi$

Ответ: $S(M) = 208\pi$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☐☒

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Также $AD=DP \Rightarrow \triangle ADP$ - равноб. $\Rightarrow \angle DAP = \angle DPA = 22^\circ \Rightarrow \angle DAC = \angle DAP + \angle PAC = 22^\circ + 23^\circ = 45^\circ$

7) Рассмотрим четырехугольник $ADPC$: $\angle DAC = \angle DPC = 45^\circ \Rightarrow ADPC$ - вписанный $\Rightarrow$

$\angle DCB = \angle DAP = 22^\circ$

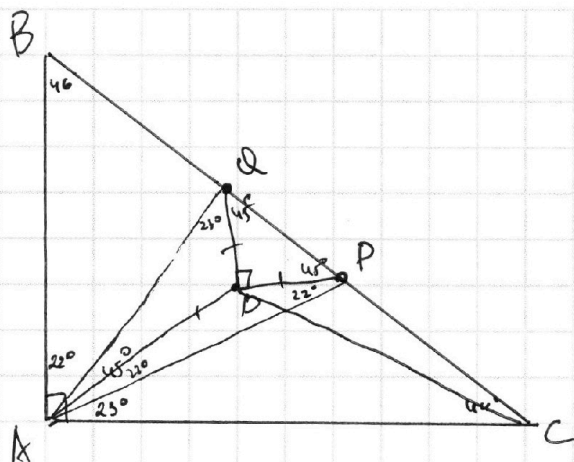
Ответ: $\angle DCB = 22^\circ$



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано:
треугольник ABC; $\angle A = 90^\circ$
 $Q, P \in BC$; $AB = BQ$; $AC = CP$
 $D \in ABC$; $DQ = DP$; $\angle PDQ = 90^\circ$
 $\angle CBA = 46^\circ$
Найти:
 $\angle BCB$

1) $AC = CP$; $AB = BQ$. $BC < AB + AC$ (пер. в. о. н. а.) $\Rightarrow$
 $BC < BQ + CP \Rightarrow$ точка Q принадлежит отрезку BP, а точка P принадлежит отрезку CQ, причем $P \neq Q$.

2) $AB = BQ \Rightarrow \triangle ABQ$ - равноб. (по о. н. а.) $\Rightarrow \angle BAP = \angle BQA = \frac{180^\circ - \angle B}{2} = 67^\circ$.

3) $\angle CBA = 46^\circ$; в $\triangle ABC$ - треугольн. $\Rightarrow \angle ACB = 90^\circ - \angle CBA = 44^\circ$.
 $AC = CP \Rightarrow \triangle ACP$ - равноб. $\Rightarrow \angle ACP = \angle CAP = \frac{180^\circ - \angle C}{2} = 68^\circ$

4) $DQ = DP \Rightarrow \triangle DPQ$ - равноб. (по о. н. а.) $\Rightarrow \angle DPQ = \angle DQP = 45^\circ \Rightarrow$
 $\angle APD = \angle APB - \angle DPQ = 67^\circ - 45^\circ = 22^\circ$, следовательно $\angle AQP = 23^\circ$

5) $\angle APB = \angle PAC + \angle ACP$ (св. в. о. н. а.) $\Rightarrow \angle PAC = \angle APB - \angle ACP = 67^\circ - 44^\circ = 23^\circ$,
следовательно $\angle QAB = 23^\circ \Rightarrow$

$\angle PAQ = 90^\circ - 23^\circ - 23^\circ = 44^\circ$, $\angle BAC - \angle BAQ - \angle CAP = 90^\circ - 23^\circ - 23^\circ = 44^\circ$

6) Докажем, что т. D - центр описанной окружности $\triangle APQ$.

Пусть O - центр описанной окружности $\triangle APQ$ и пусть $\angle PAQ = \alpha$

O - центр

$\angle POQ = 2\angle PAQ = 2\alpha$;

$OP = OQ \Rightarrow \triangle OPQ$ - равноб. $\Rightarrow \angle OPQ = \angle OQP = 90^\circ - \alpha$

Пусть т. D - центр описанной окружности. Заметим, что т. к.

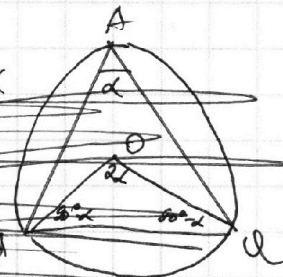
$\angle PAQ = \alpha = 40^\circ$, то $\angle OPQ = \angle OQP = 50^\circ \Rightarrow$ D - та же точка, что и O (т. к. $\angle OPQ = \angle OQP = 50^\circ$)

т. D - точка пересечения медиан т. D - та же точка, что и O (о. н. а. в. о. н. а.)

6) Отметим т. O - центр описанной окружности $\triangle APQ$. По о. н. а. $\angle POQ = 2\angle PAQ = 90^\circ$ и

$PO = OQ \Rightarrow \triangle POQ$ - равноб. $\Rightarrow \angle OPQ = \angle OQP = 45^\circ$. Т. к. углы $\angle APQ = 40^\circ, 67^\circ$ и 68° , то

т. O - внутри $\triangle APQ$, т. е. внутри $\triangle ABC$, так и D, т. е. и т. O, и т. D лежат в одной полуплоскости относительно BC. Докажем, что тогда следует, что т. к. $\angle OPQ = \angle APQ$ и $\angle OQP = \angle AQP$, и O, D лежат в одной полуплоскости относительно BC, то O и D совпадают





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

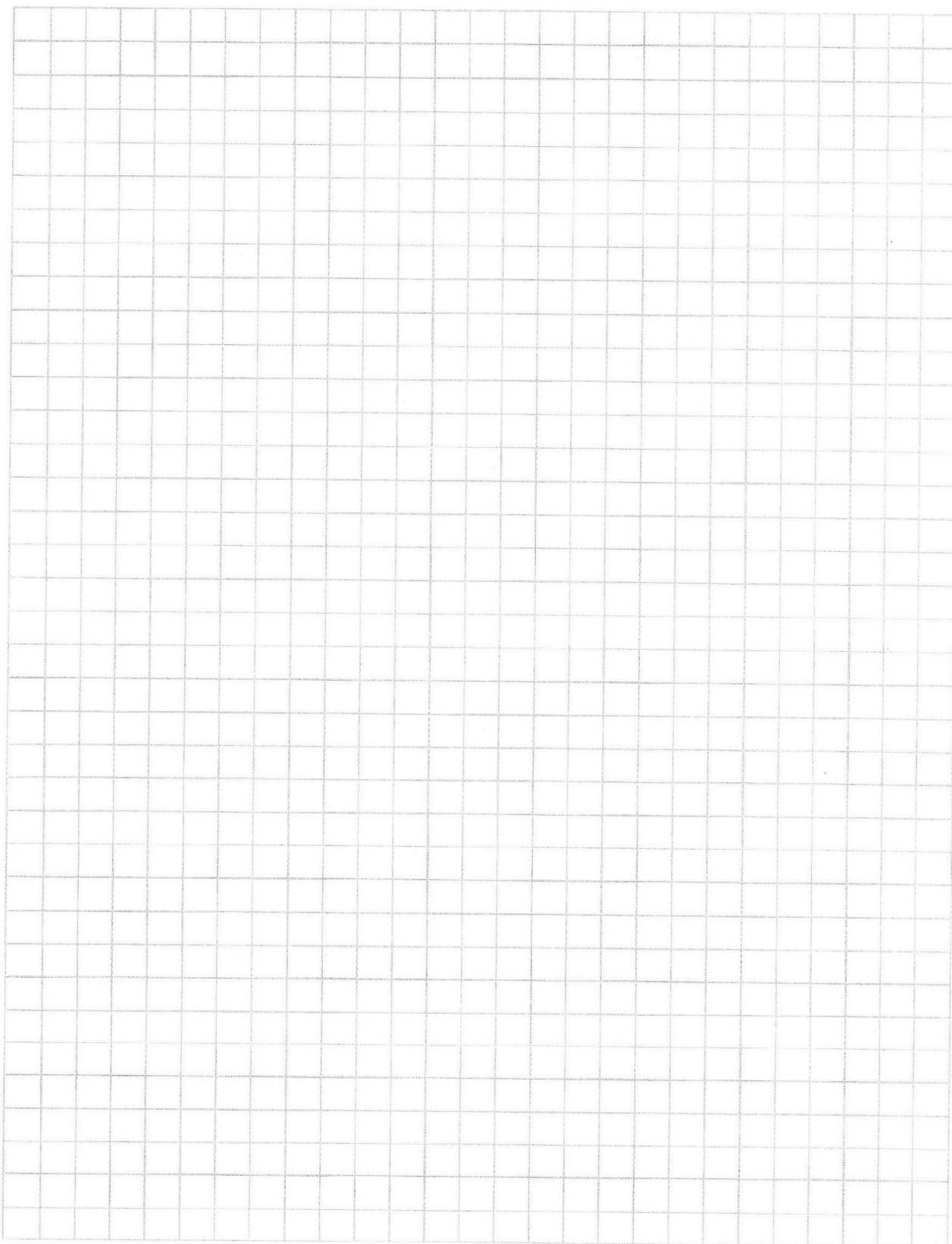
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} xy &= -6z + z^2 & 1 \cdot 2 \\ yz &= -6x + x^2 \\ zx &= -6y + y^2 \end{aligned}$$

$$\frac{(9-3)!}{9!} = \frac{6! \cdot 5! \cdot 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 6}{2! \cdot 9! \cdot 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 9} = \frac{34 \cdot 5}{7 \cdot 8 \cdot 9} = \frac{42}{81} = \frac{14}{27}$$

$$2(x^2 + y^2 + z^2) - 12(x + y + z) + 2(xy + yz + zx)$$

$$\frac{xy}{2} = z - 6$$

$$\frac{yz}{2} = x - 6$$

$$\frac{zx}{2} = y - 6$$

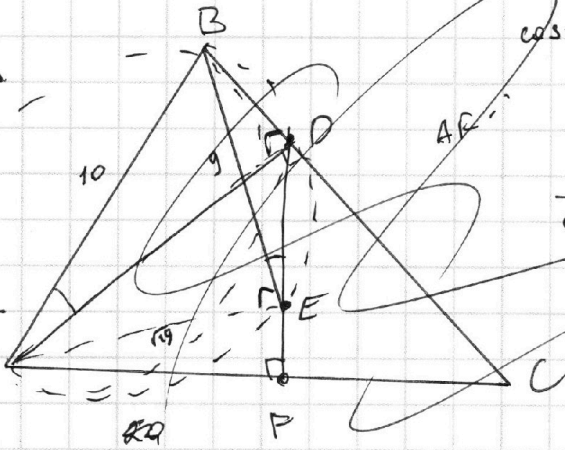
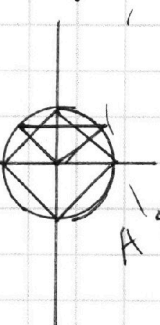
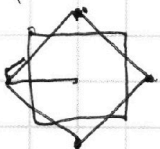
$$\left(\frac{xy}{2}\right)^2 + \left(\frac{yz}{2}\right)^2 + \left(\frac{zx}{2}\right)^2 = \frac{x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2}{2^2} = \frac{x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2}{4}$$

$$S = \pi R^2$$

$$\frac{34 \cdot 5}{7 \cdot 8 \cdot 9} = \frac{42}{81} = \frac{14}{27}$$

$$(10 - 1)^3 = 9^3 = 729$$

N.2.



$$\angle BAE + \angle ADE = 30^\circ$$

$$\angle BAE = \angle DEF$$

$$\cos = \frac{\sqrt{19}}{10}$$

$$AD^2 = AF^2 - AC^2$$

$$\frac{AD^2}{\cos^2} = AF^2 - AC^2$$

$$AF = AC \cdot \cos^2$$

$$AF = \frac{AD}{\cos^2} = \frac{19}{100} = 0.19$$

$$\frac{n!}{C_n^k} = \frac{n!}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = k!(n-k)!$$

h шаров

5 шаров

(1)

сочетания

(k=3)

выбор

3 → k-3

A →

из n-3 шаров

всего

$$\frac{C_n^k}{C_{n-3}^{k-3}} = \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{\frac{(n-3)!}{(k-3)!(n-k)!}} = \frac{n!}{(k-3)! \cdot (n-k)!} = \text{верн}$$

$$C_{n-3}^{k-3} = \frac{(n-3)!}{(k-3)! \cdot (n-k)!}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$$

$$1) a_6 + a_7 = 45 + 48$$

$$5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$$

$$a_6 + a_7 = a^2 - 4a$$

$$a_8 + a_9 = \frac{a^3 + 4a^2}{5}$$

$$a^2 - 4a = \frac{a^3 - 4a^2}{5}$$

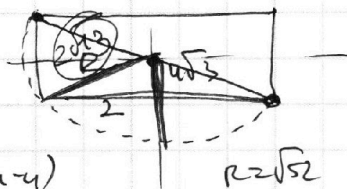
$$a = 0$$

$$a = 4$$

$$a = 5$$

$$a(a-4) = \frac{a^2(a-4)}{5}$$

$$4 + 16 \cdot 3 = 52$$



$$a =$$

$$-128 - 24 - 15$$

$$S = \pi R^2 = 25 + 236 = 261$$

$$= 5280$$

$$-280 - 30 - 15$$

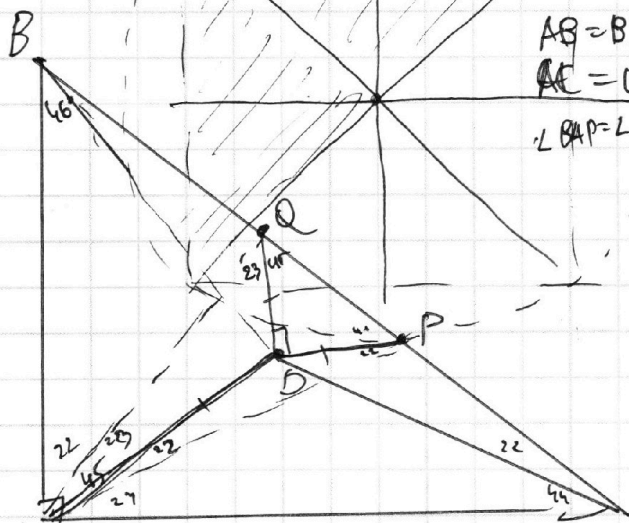
$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{29}}{2}$$

$$x_2 = \frac{5 - \sqrt{29}}{2}$$

$$5 - \sqrt{261} = 152 -$$

$$x_3 = \frac{5 + \sqrt{261}}{2}$$

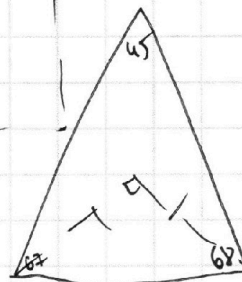
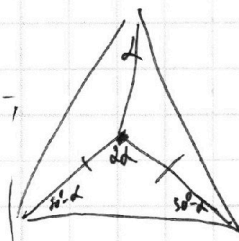
$$x_4 = \frac{5 - \sqrt{261}}{2}$$



$$AB = BP$$

$$AC = 12$$

$$\angle BAP = \angle APB = 67^\circ \Rightarrow \angle BPA = 22^\circ$$



$$D - y. (AQP)$$

$$|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}| + |y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}| \leq 8$$

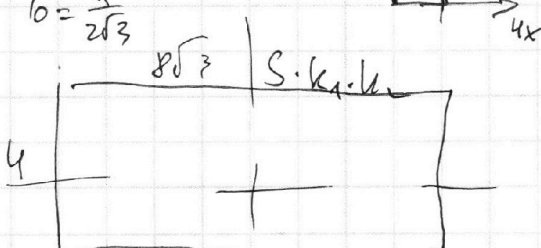
$$(a+b) + |a-b| \leq 8$$

$$ADPC - \text{вн.}$$

$$22^\circ 124$$

$$a = y - 20$$

$$b = \frac{x}{2\sqrt{3}}$$



$$1) a \geq b$$

$$a \leq -b$$

$$a \leq 4$$

$$2) a \geq b$$

$$a \leq -b$$

$$-a - b + a - b$$

$$6 \geq 4$$

$$3) a \leq b$$

$$a \geq -b$$

$$b \leq 4$$

$$4) a \geq b$$

$$a \leq -b$$

$$a \geq 4$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

N.2.

$$(10^{20002} - 1)^3 = 10^{60006} - 1 - 3 \cdot 10^{40004} + 3 \cdot 10^{20002}$$

60005 9

$$ggg - 3 \cdot 10^*$$

ggggggggg

ggggg6ggg

6000001

$$3 \cdot 10^{(7)} = 3000$$

ggggggggg
+300

$$xyz^2 = xyz(y-6)(x-6)(z-6)$$

$$xyz = (x-6)(y-6)(z-6)$$

$$xy(xy-6(x+y)+36)(z-6)$$

$$xyz + 36(x+y+z) + 6(x+y+z+xy) - 216$$

$$(xy+yz+zx) = 36 + (x+y+z)$$

$$(x+y+z) = -6$$

$$C_n = \frac{n!}{5!(n-5)!} - \text{букетов } 5$$

$$C_n^3 = \frac{n!}{3!(n-3)!} - \text{карты } 3$$

$$\frac{n!}{9!(n-9)!} = \frac{5 \cdot n!}{2!(n-5)!}$$

$$\frac{5!(n-5)!}{9!(n-9)!}$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots}$$

$$\frac{(n-5)!}{(n-9)!} = \frac{(n-5) \cdot (n-6) \cdot (n-7) \cdot (n-8) \cdot (n-9)}{(n-9) \cdot (n-10) \cdot (n-11) \cdot (n-12) \cdot (n-13)}$$

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6} - \text{сн. бук } 3 \text{ нум}$$

вертб - $\frac{9 \text{ нум}}{6 \text{ букв}} =$

$$4:4: -2$$

$$xy+yz+zx$$

$$4:4: -2$$

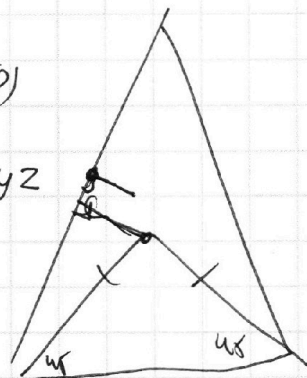
$$4 \cdot 4 \cdot (-2)$$

$$(-2) \cdot (-2) \cdot (-8)$$

$$(x-6)(y-6)(z-6) = (xy-6x-6y+36)(z-6) = xyz$$

x

$$\frac{4 \cdot 2}{5} = 8,4$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2 \\ yz = -6x + x^2 \\ 2x = -6y + y^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x(x-6) = 6(x+y+z) = x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx) \\ 2(x^2 + y^2 + z^2) - 12(x+y+z) - 2(xy + yz + zx) \\ (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 12(x+y+z) \end{cases}$$

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 12(x+y+z) = 2(xy + yz + zx) - x^2 - y^2 - z^2$$

$$\frac{y}{x} = \frac{x(x-6)}{y(y-6)}$$

~~12x~~

$$x^2 + y^2 + z^2 = 36$$

$$x(x-6) + y(y-6) + z(z-6) =$$

$$t = x^2(x-6) = y^2(y-6) = z^2(z-6) \quad x+y+z = 6$$

$$x^3 - 6x^2 - y^3 + 6y^2 = 0$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) - 6(x-y)(x+y) = 0$$

$$\begin{cases} x=y \\ x^2 + xy + y^2 - 6(x+y) = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + xy + y^2 = 6(x+y)$$

$$y^2 - 4y + 36 - 4y^2 + 24y$$

$$(x+y)^2 - 6(x+y) - xy = 0$$

$$-3y^2 + 12y + 36 =$$

$$x^2 + x(y-6) + y^2 - 6y = 0$$

$$0 = (y-6)^2 - 4y(y-6) = (y-6)(y-4y-6) = (y-6)(-3y-6) = -3(y-6)(y+2)$$

$$x-6 = z = y-6$$

$$4 \cdot 4 = 12 + 4$$

$$4 \cdot (-2) = -24 + 16$$

$$x^2 = -6(x-6) + (x-6)^2$$

$$x^2 = -6x + 36 + x^2 - 12x + 36$$

$$\begin{matrix} x=y \\ z=-2 \end{matrix}$$

$$x^2 + xy + y^2 - 6(x+y) = 0$$

$$x = \frac{(y-6) \pm \sqrt{(y-6)(y^2-4)}}{2}$$

$$x = \frac{(y-6) \pm \sqrt{-3(y-6)(y+2)}}{2}$$

$$x^2 + x(y-6) + y(y-6) = 0$$

$$x^2 + (y-6)(x+y) = 0$$

$$x^2 + xy - 6x + (y^2 - 6y)$$

$$x^2 + x^2 \left(\frac{z}{y}\right) + 2x = 0$$

$$x \left(1 + \frac{z}{y}\right) + z = 0$$

$$36 - 12 \cdot 6 + 108 = 72$$

~~12~~

$$xy + yz + zx = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6(x+y+z) = 36$$

