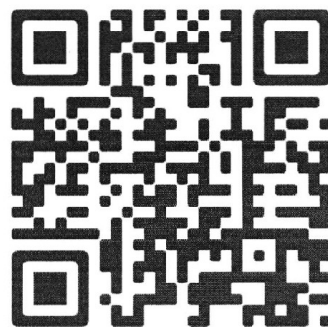




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шару. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leq 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

раскроем скобки в выражении и преобразуем

$$x^2 + 3x + 3 + \dots = x^2 + y^2 + z^2 + 6(x+y+z) + 27 =$$

$$= 3(x+y+z) + xy + yz + zx + 27$$

вычтем лев. член ур-ния

$$z(y-x) = 3(x-y) + (x-y)(x+y)$$

$$(x-y)(3+z+x+y) = 0$$

аналогично с группами переменных ур-ния

если $z+x+y \neq -3$, $x=y=z$, подставив
в ур-ние, получим $x=y=z=0 \Rightarrow x+y+z=-3$

$$yz = 3x + x^2$$

т.к. $y, z, x \in \mathbb{Z}$,

$$zx = 3y + y^2$$

все значения целые
и можно поделить

$$\frac{y}{x} = \frac{(x+3)x}{(y+3)y}$$

$$y^2(y+3) = x^2(x+3)$$

(т.к. $x+3 = -y-z$)

$$y^2(x+z) = x^2(y+z)$$

$$yx(y-x) + z(y-x)(y+x) = 0$$

$$(y-x)(yx + zy + zx) = 0$$

аналогично другим переменным

если $yx + zy + zx \neq 0$, то $x=y=z$,

противор. по условию $\Rightarrow$

$$xy + yz + zx = 0, \text{ исконое выражение} =$$

$$= 3 \cdot (-3) + 0 + 27 = 18 \quad \text{Ответ: } 18$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N4

~~полное количество вариантов можно считать, если можно не считать~~

пусть всего городов n
способов выехать, беря 5 (без учета порядка):

$$\frac{(n-3)(n-4)}{2} = C_{n-3}^2$$

беря 6:

$$\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{6} = C_{n-3}^3$$

всего вариантов взять 5 (без учета порядка):

$$C_n^5, \text{ ~~если~~ взять 6: } C_n^6$$

исполним отношение:

$$\frac{C_{n-3}^3}{C_n^6} : \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} =$$

$$= \frac{C_{n-3}^3}{C_{n-3}^2} \cdot \frac{C_n^5}{C_n^6} = \frac{n-5}{3} \cdot \frac{n \cdot \dots \cdot (n-4)}{5!} \cdot \frac{6!}{n \cdot \dots \cdot (n-5)} =$$
$$= \frac{n-5}{3} \cdot 6 \cdot \frac{1}{n-5} = \frac{6}{3} = 2$$

Ответ: 2 раза



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

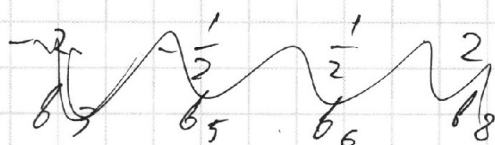
СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

2) ($a = 1$)

$$x^2 - 4 = 0 \quad (x_1 = 2 \quad x_2 = -2)$$

$$4x^2 - 1 = 0 \quad (x_1 = \frac{1}{2} \quad x_2 = -\frac{1}{2})$$



$-\frac{1}{2}$ -2 2 $\frac{1}{2}$ - очевидно, не
решения

Ответ: $\emptyset$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N5

$$2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = a^4(2 - a^2) - 2(2 - a^2) =$$

$$= (a^4 - 2)(2 - a^2)$$

3 4 5 6 2 8

суммы должны быть равны
 по св. прогр. прогр. $b_3 + b_8 = b_5 + b_6$,

b : - исконая последовательность)

$$b_5 + b_6 = a^2 - a$$

$$b_3 + b_8 = a^3 - a^2 \quad (\text{пр. Виета})$$

$$a^2 - a = a^3 - a^2$$

$$a(a - 1) = a^2(a - 1)$$

$$(a - 1)(a^2 - a) = 0$$

$$(a - 1)^2 a = 0 \quad \begin{cases} a = 1 \\ a = 0 \end{cases}$$

разберем эти случаи:

1) $(a = 0) \quad x^2 - 5 = 0$

$$4x^2 - 4 = 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} -1 & -\sqrt{5} & 1 & \sqrt{5} & & & \\ -1 & -1 & 1 & 1 & & & \\ b_3 & b_5 & b_6 & b_8 & & & \end{array}$$

- очевидно,
 не прогрессия

но $d = b_6 - b_5 = 2, \quad b_8 - b_6 = 2d = 2$
 противоречие

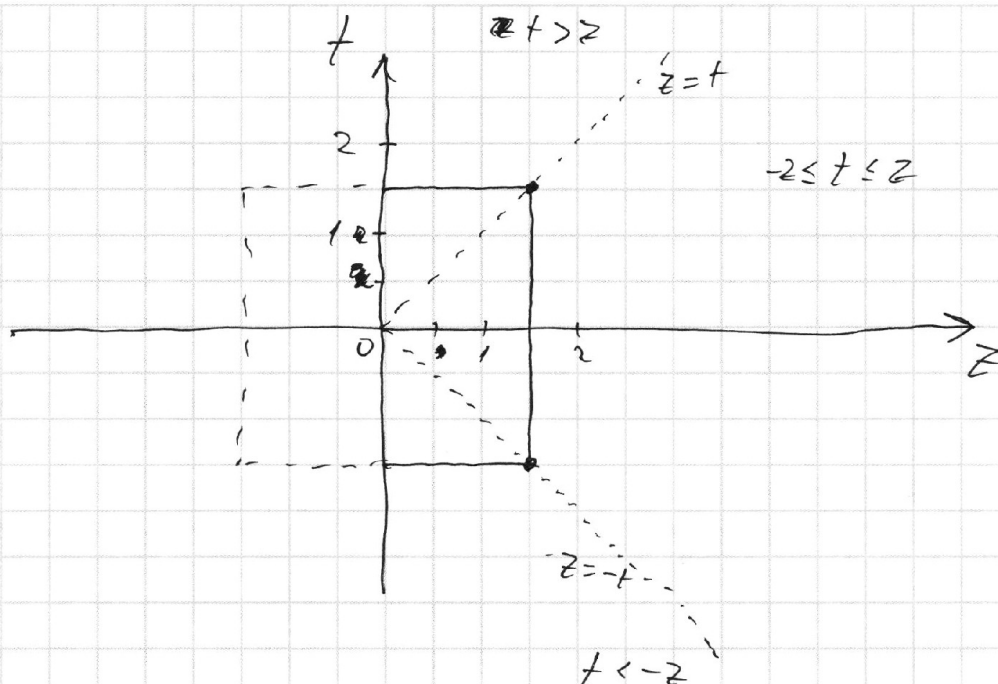


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



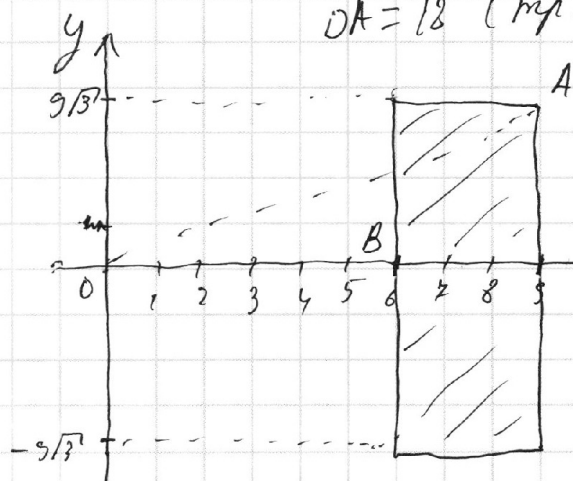
при $z \leq 0$ условие не меняется
(т.е. фигура симметрична отн. оси t)

Запишем в квадрате

в коорд $y(x)$ фигура свивается

на $\frac{15}{2}$ влево и расширится в $6\sqrt{3}$ раз
(по верт.)

$OA = 18$ (тр. Пиф.)



после измерения,
отбрасывая ~~остаток~~ остаток
круг, радиуса $OA = 18$
(по тр. Пиф.), $S_{\text{вн}}$

круга радиуса $OB = 6$,
внутри искомая $S =$
 $= \pi (18^2 - 6^2) = 288\pi$
Ответ: 288π



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N6

Построим эту фигуру в координатах

и V , где $U = x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}$,

$V = x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}$

отметим, что $x = \frac{U+V+15}{2}$,

$y = 3\sqrt{3}(U-V)$

замечим, что Φ симметрична относительно x (т.е. замена $y \rightarrow -y$ не меняет выражение)

в связи с этим построим Φ только для $x \geq 0$ и в координатах $t(z)$, где

$z = \frac{y}{6\sqrt{3}}$, $t = x - \frac{15}{2}$

$x+z = \frac{15}{2}$ $|t+z| + |t-z| \leq 3$

симметрично при замене $z \rightarrow -z$

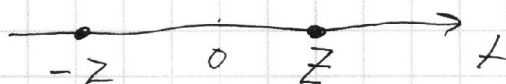
пусть $z \geq 0$

если $t > z$

$2t \leq 3$ $t \leq \frac{3}{2}$

если $-z \leq t \leq z$ $2z \leq 3$ $z \leq \frac{3}{2}$

если $t \leq -z$ $-2t \leq 3$ $t \geq -\frac{3}{2}$



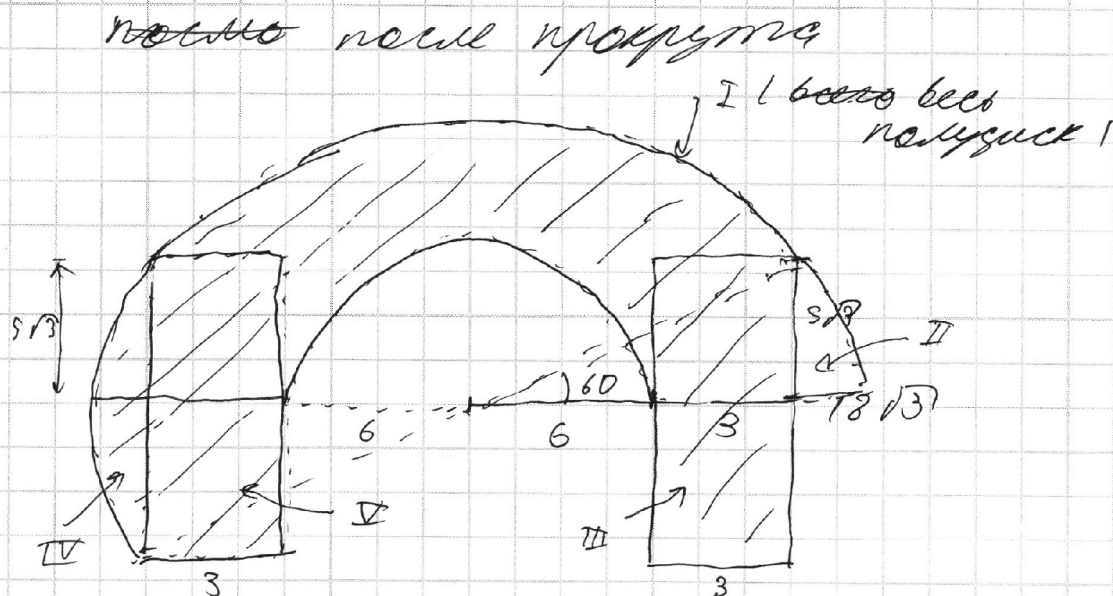


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Замеченная область заштрихована

$$S = S_{IV} + S_V + S_{III} + S_I - S_{II} = (S_{III} = S_{II})$$

$$= S_{IV} + S_{III} + S_I = \frac{1}{2} \pi (18^2 - 6^2) +$$

$$+ 2 \cdot 3 \cdot 9\sqrt{3} = 144\pi + 54\sqrt{3}$$

$$\text{Ответ: } 144\pi + 54\sqrt{3}$$

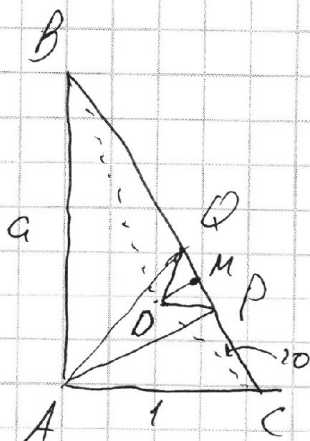


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть сторона $AC = 1$,
 $AB = a$

$BP = a$, $CQ = 1$, $BC = \sqrt{a^2 + 1}$

M - середина PQ .

$$\tan 20^\circ = \frac{DM}{MC} =$$

$$QP = a + 1 - \sqrt{a^2 + 1},$$

$$PC = \sqrt{a^2 + 1} - a, \quad BQ = \sqrt{a^2 + 1} - 1$$

$$\tan 20^\circ = \frac{DM}{MC} = \frac{QP}{2 \cdot (PC + \frac{QP}{2})} = \frac{QP}{2PC + QP} = \frac{a + 1 - \sqrt{a^2 + 1}}{\sqrt{a^2 + 1} - a + 1}$$

$$\sqrt{a^2 + 1} \cdot \tan 20^\circ + \tan 20^\circ (-a + 1) = a + 1 - \sqrt{a^2 + 1}$$

$$\sqrt{a^2 + 1} (\tan 20^\circ + 1) = a + 1 + \tan 20^\circ (a - 1)$$

$$(a^2 + 1) (\tan 20^\circ + 1)^2 = ((1 + \tan 20^\circ) a + (1 - \tan 20^\circ))^2$$

$$a^2 (\tan 20^\circ + 1)^2 + (\tan 20^\circ + 1)^2 = a^2 (1 + \tan 20^\circ)^2 + (1 - \tan 20^\circ)^2 + 2(1 - \tan 20^\circ) a$$

$$\tan 20^\circ + 1 = \frac{1 - 2 \tan 20^\circ + \tan^2 20^\circ + 2(1 - \tan 20^\circ) a}{3 \tan 20^\circ + \tan^2 20^\circ}$$

$$a = \frac{2 \tan 20^\circ}{1 - \tan^2 20^\circ}$$

$$2(1 - \tan^2 20^\circ) a = 4 \tan 20^\circ$$

$$1 - \tan^2 20^\circ a = 2 \tan 20^\circ$$

$$a = \frac{2 \tan 20^\circ}{1 - \tan^2 20^\circ} = \tan(2 \cdot 20^\circ) = \tan 40^\circ$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$a = \tan 40^\circ, \quad a = \tan \angle BCA \text{ по опре}$$

$$\angle C = 40^\circ$$

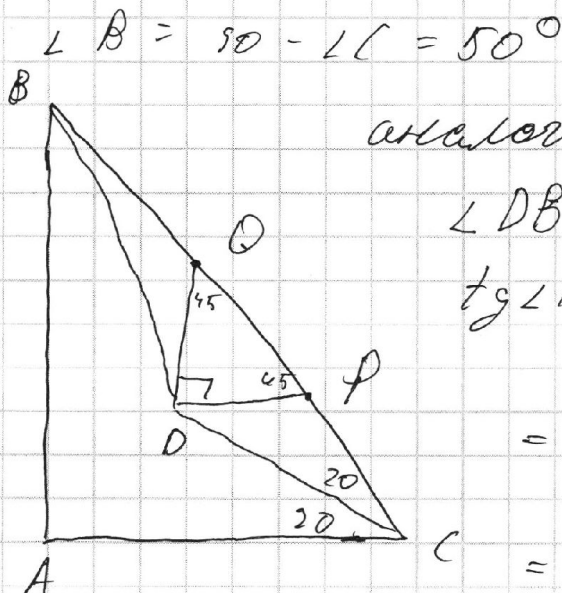


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



аналогично $\angle C$, для $\angle B$

$\angle DBQ$:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \angle DBQ &= \frac{a + 1 - \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 40^\circ}}{\sqrt{a^2 + 1} - 1 + a} \\ &= \frac{\operatorname{tg} 40^\circ + 1 - \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 40^\circ}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 40^\circ} - 1 + \operatorname{tg} 40^\circ} = \\ &= \frac{\operatorname{tg} 40^\circ + 1 - \frac{1}{\cos 40^\circ}}{\frac{1}{\cos 40^\circ} - 1 + \operatorname{tg} 40^\circ} \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \angle DBQ = \frac{\sin 40^\circ + 1 - \cos 40^\circ}{1 - \cos 40^\circ + \sin 40^\circ}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sin 40^\circ + \cos 40^\circ - 1}{\sin 40^\circ - \cos 40^\circ + 1} = \\ &= \frac{\sqrt{2} \sin 85^\circ - 1}{1 - \sqrt{2} \sin 5^\circ} = \frac{\sin 85^\circ - \sin 45^\circ}{\sin 45^\circ - \sin 5^\circ} = \\ &= \frac{\sin(20^\circ) \cos(\frac{65^\circ}{2})}{\sin 20^\circ \cos(25^\circ)} = \frac{\cos 65^\circ}{\cos 25^\circ} = \frac{\cos 31.25^\circ}{\cos 25^\circ} \\ &= \operatorname{tg} 25^\circ \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \angle DBQ = \operatorname{tg} 25^\circ \Rightarrow \angle DBQ = 25^\circ$$

Ответ: 25°

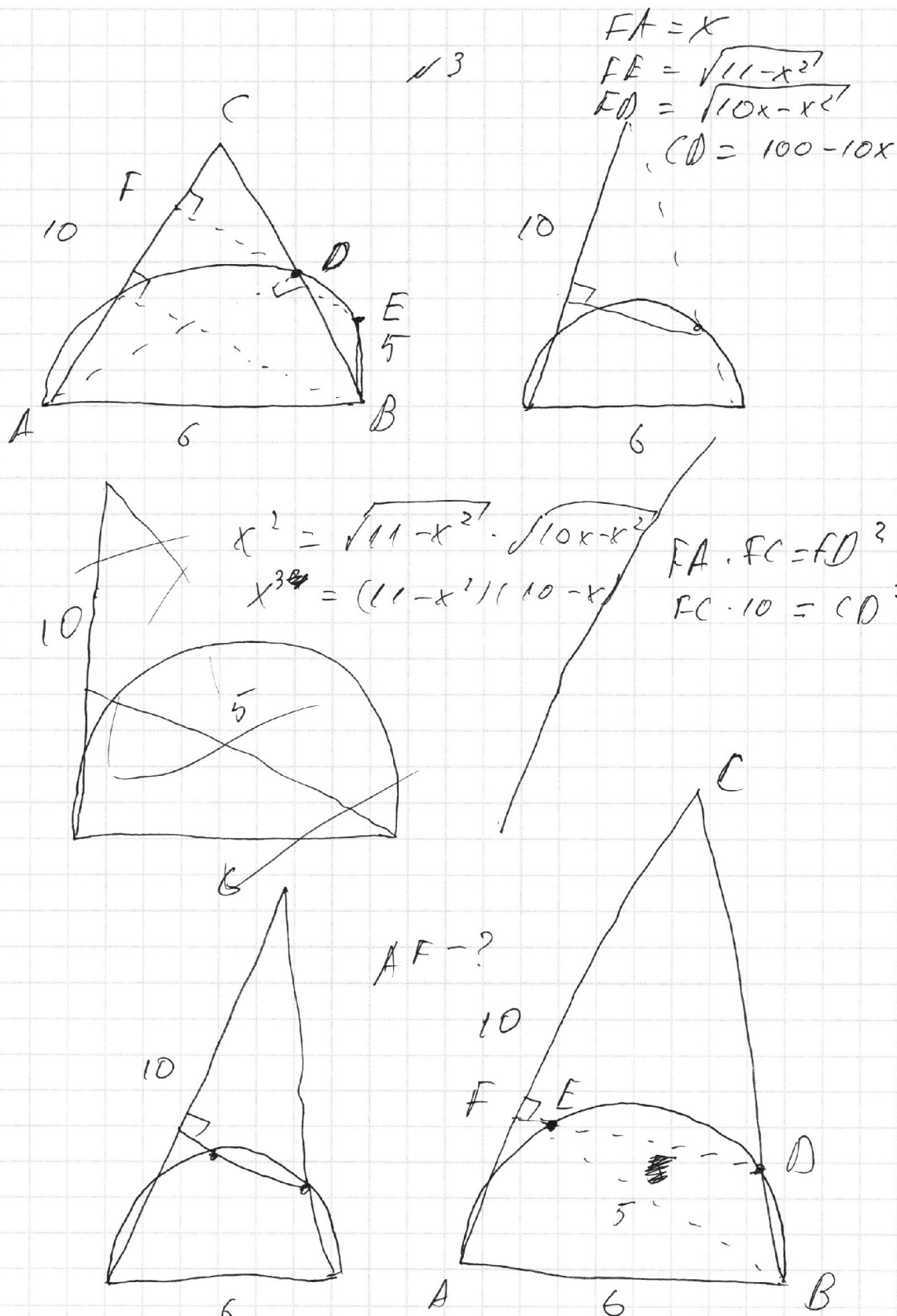


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 &= \frac{a^2 + b^2 - \sqrt{a^2 + b^2} \cdot b}{a^2 + b^2} \\
 &= \frac{a^2 + b^2 + (b-a)^2 - 2(b-a)\sqrt{a^2 + b^2}}{4(a^2 + b^2) - 4\sqrt{a^2 + b^2} \cdot b} \\
 &= \frac{a^2 + b^2 - \sqrt{a^2 + b^2} \cdot b}{a^2 + b^2}
 \end{aligned}$$

$\frac{a^2 + b^2 - \sqrt{a^2 + b^2} \cdot b}{a^2 + b^2} \quad b=1$
 $\frac{1 + a - \sqrt{a^2 + 1}}{a - 1 + \sqrt{a^2 + 1}}$
 $\sqrt{a^2 + 1} = \frac{a + 1 - \frac{1 + a - \sqrt{a^2 + 1}}{a - 1 + \sqrt{a^2 + 1}}}{1 + \frac{1 + a - \sqrt{a^2 + 1}}{a - 1 + \sqrt{a^2 + 1}}}$
 $\frac{1 + a - \sqrt{a^2 + 1}}{a - 1 + \sqrt{a^2 + 1}} = \frac{(1 + a - \sqrt{a^2 + 1})^2}{(1 + a - \sqrt{a^2 + 1})^2 + 2(1 + a - \sqrt{a^2 + 1}) + (a - 1 + \sqrt{a^2 + 1})^2}$

$(1 + \frac{1 + a - \sqrt{a^2 + 1}}{a - 1 + \sqrt{a^2 + 1}})^2 = (1 - \frac{1 + a - \sqrt{a^2 + 1}}{a - 1 + \sqrt{a^2 + 1}})^2 + 2(1 - \frac{1 + a - \sqrt{a^2 + 1}}{a - 1 + \sqrt{a^2 + 1}}) + (a - 1 + \sqrt{a^2 + 1})^2$