



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = -6y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x - 6)^2 + (y - 6)^2 + (z - 6)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 20 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 10$, $BE = 9$.
4. [4 балла] В телегре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарику. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть девять коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$ являются пятым и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| + \left|y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| \leqslant 8$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипotenузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle CBA = 46^\circ$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0.$$

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = -6y + y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} & xy \cdot yz \cdot zx = (-6z + z^2)(-6x + x^2)(-6y + y^2) \\ & (xyz)^2 = z(z-6) \cdot x(x-6) \cdot y(y-6) \\ & (xyz)^2 = xyz(x-6)(y-6)(z-6) \quad | : xyz \end{aligned}$$

Имеем право
делить,
т.к. $x \neq 0$,
 $y \neq 0$,
 $z \neq 0$.

$$xyz = (x-6)(y-6)(z-6)$$

$$(x-6)(y-6)(z-6) - xyz = 0$$

$$(xy - 6x - 6y + 36)(z-6) - xyz = 0.$$

$$\cancel{xyz - 6xz - 6yz + 36z - 6xy + 36x + 36y - 36 \cdot 6 - xyz = 0.} \\ -6xz - 6yz - 6xy + 36z + 36x + 36y = 6 \cdot 36 \quad | : (-6)$$

$$xz + yz + xy - 6z - 6x - 6y = -36.$$

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 12y - 12z + 3 \cdot 36 = \\ = (-6x + x^2) + (-6y + y^2) + (-6z + z^2) - 6x - 6y - 6z + 3 \cdot 36 =$$

$$= yz + zx + xy - 6x - 6y - 6z + 3 \cdot 36 = -36 + 3 \cdot 36 =$$

$$= 2 \cdot 36 = 72.$$

Ответ: 72.

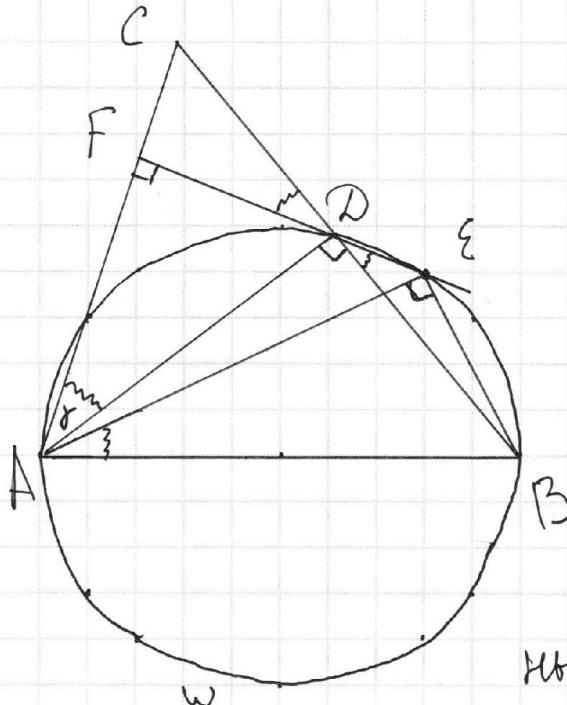
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



Т.к. AB -диаметр, то углы, опирающиеся на него, прямые $\Rightarrow \angle AEB = 90^\circ$

$$\angle ADB = 90^\circ = \angle AEB \Rightarrow \angle ADC = 90^\circ.$$

Тогда $\triangle ADC$ и $\triangle ABE$ - прямоугольные. Т.к. $DF \perp AC$, то $\angle DFC = 90^\circ \Rightarrow \triangle DFC$ -прямоугольный.

Пусть $\angle CAD = \gamma$. Тогда ~~по т.к.~~

~~по т.к.~~ $\triangle ACD$ -прямоугольный

такой, то $\angle DAC + \angle CAD = 90^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle ACD = 90^\circ - \angle CAD = 90^\circ - \gamma. \text{ Т.к. } \triangle CDF \text{-прямоугольный,}$$

$$\text{то } \angle CDF + \angle DCF = 90^\circ \Rightarrow \angle FDC = 90^\circ - \angle DCF = 90^\circ - (90^\circ - \gamma) = \gamma.$$

$\angle CDF = \angle EDB = \gamma$, как вертикальные. $\angle BDE = \angle BAE = \gamma$,
т.к. $\angle BDE$ и $\angle BAE$ опираются на одну дугу \overarc{BE} . ~~по т.к.~~

$\triangle CDF$, $\triangle ABE$, $\triangle ACD$ -прямоугольные, то:

$$б \triangle ABE \sin \angle BAE = \sin \gamma = \frac{BE}{AB} = \frac{9}{10}; б \triangle ACD \sin \angle DAC = \sin \gamma =$$

$$= \frac{DC}{AC} = \frac{CD}{20} \Rightarrow б \triangle CDF \sin \angle FDC = \sin \gamma = \frac{FC}{DC}.$$

$$\sin \gamma = \frac{9}{10} = \frac{CD}{20} \Rightarrow CD = 18, \sin \gamma = \frac{FC}{DC} = \frac{FC}{18} \Rightarrow FC = 18 \cdot \sin \gamma = 18 \cdot 0,9 =$$

$$= 16,2. AC = AF + FC \Rightarrow AF = AC - FC = 20 - 16,2 = 3,8.$$

Ответ: 3,8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть n - число коробок в Теленгире.

Пусть А - событие, при котором игрок указав на 5 коробок, выигрывает. Пусть В - событие, при котором игрок, указав на 9 коробок, выигрывает. $P(A)$ - вероятность события А, $P(B)$ - вероятность события В. №9, т.к. игрока не просто не способен открыть 9 коробок.

C_n^5 - способов выбрать 5 коробок из имеющихся.

C_n^9 - способов выбирать 9 коробок из имеющихся.

~~Удаляем способ выбора 5 коробок из имеющихся~~

Способ выиграть, указав на 5 коробок, все равно, что способ выбрать 5 коробок, в ~~из~~ трех из которых меньше по числу, из имеющихся коробок, всё равно, что ~~способ~~ способ выбрать 2 коробки из тех, в которых нет шариков,

$$\text{т.е. } C_{n-3}^2.$$

Аналогично,

Способ выиграть, указав на 9 коробок, все равно, что способ выбрать $9-3=6$ коробок, из тех, в которых нет шариков, т.е. C_{n-3}^6 .

$$\text{Тогда } P(A) = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{(n-3)!}{2!(n-5)!} : \frac{n!}{5!(n-5)!} = \frac{(n-3)!}{2 \cdot (n-5)!} \cdot \frac{5! (n-5)!}{n(n-1)(n-2)(n-3)!}$$

$$= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{n(n-1)(n-2)}, \quad P(B) = \frac{C_{n-3}^6}{C_n^9} = \frac{(n-3)!}{6!(n-9)!} \cdot \frac{(n-9)! \cdot 9!}{(n-3)! \cdot n(n-1)(n-2)} =$$

$$= \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{n(n-1)(n-2)}$$

Тогда вероятность выигрыша игрока увеличивается в $\frac{P(B)}{P(A)}$

$$\text{т.е. } 6 \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{n(n-1)(n-2)} : \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{n(n-1)(n-2)} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{42}{5} = 8,4 \text{ раза.}$$

Тогда вероятность выигрыша игрока увеличивается в $6 \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{n(n-1)(n-2)}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

~~Задача № 8.4. Решение задачи № 8.4.~~

Ответ: 6 8,4 раза.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - (Q^2 - 4Q)x + Q^2 - 6Q + 4 = 0$, x_3 и x_4 — корни уравнения $5x^2 - (Q^3 - 4Q^2)x - 2Q^3 - 8Q^2 - 15 = 0$. Тогда по теореме Виетта:

$$\begin{cases} x_1 x_2 = Q^2 - 6Q + 4, \\ x_1 + x_2 = Q^2 - 4Q \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 x_4 = -\frac{2Q^3 + 6Q + 15}{5}, \\ x_3 + x_4 = \frac{Q^3 - 4Q^2}{5} \end{cases}$$

$\{c_n\}$ — арифметическая прогрессия, d — её знаменатель.

$$c_6 = x_1, c_7 = x_2, c_5 = x_3, c_8 = x_4 \Rightarrow \begin{cases} c_6 c_7 = Q^2 - 6Q + 4, \\ 7 \cdot k \cdot d \neq 0, \text{ т.к. } x_1 \neq x_2, x_3 \neq x_4 \end{cases}$$

$$c_6 + c_7 = c_1 + 5d + c_1 + 6d = 2c_1 + 11d = \begin{cases} c_6 + c_7 = Q^2 - 4Q \\ c_5 + c_8 = -\frac{2Q^3 + 6Q + 15}{5} \\ c_5 + c_8 = \frac{Q^3 - 4Q^2}{5} \end{cases}$$

$$(c_1 + 4d) + (c_1 + 7d) = c_5 + c_8.$$

$$c_6 + c_7 = c_5 + c_8 \Rightarrow Q^2 - 6Q + 4 = \frac{Q^3 - 4Q^2}{5}$$

$$5Q^2 - 30Q + 20 = Q^3 - 4Q^2$$

$$Q^3 + 9Q^2 - 30Q + 20 = 0$$

Заметим, что $Q = 1$ — корень этого уравнения, т.к. $1 + 9 - 30 + 20 = 0 \Rightarrow (Q^3 + 9Q^2 - 30Q + 20) = (Q - 1)(Q^2 + 8Q + m)$

(из следствия теоремы Безу).

В и m — некоторые коэффициенты

$$\begin{array}{r} -Q^3 - 9Q^2 - 30Q + 20 \\ \hline Q^2 - Q^2 \\ -10Q^2 - 30Q \\ \hline 10Q^2 - 10Q \\ -20Q + 20 \\ \hline -20Q + 20 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{Q-1}{Q^2 + 10Q - 20} \\ \Rightarrow Q^2 + 8Q + m = Q^2 + 10Q - 20 \Rightarrow \\ l = 10, m = -20, \text{ т.е.} \end{array}$$

$$Q^3 + 9Q^2 - 30Q + 20 = (Q-1)(Q^2 + 10Q - 20).$$

$$D = 100 + 4 \cdot 20 = 180 = 4 \cdot 9 \cdot 5 = (6\sqrt{5})^2$$

$$Q_1 = \frac{-10 - 6\sqrt{5}}{2} = -5 - 3\sqrt{5}, Q_2 = -5 + 3\sqrt{5}.$$

след

Рассмотрим уравнение $x^2 - (Q^2 - 4Q)x + Q^2 - 6Q + 4 = 0 \Leftrightarrow 5x^2 - (Q^3 - 4Q^2)x - 2Q^3 - 6Q - 15 = 0$; их дискriminанты > 0 , т.к. они уравнения имеют ограничения: два корня различных корней \Rightarrow $(Q^2 - 4Q)^2 - 4(Q^2 - 6Q + 4) = Q^4 - 8Q^3 + 12Q^2 + 24Q - 16 > 0$, $(Q^3 - 4Q^2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (1 - 2Q^3 - 6Q - 15) > 0$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Проверим $a = 1$:

$$1^3 - 8 \cdot 1^3 + 12 \cdot 1^2 + 24 \cdot 1 - 16 = 1 - 8 + 12 + 24 - 16 = 1 > 0,$$

$$(1^3 - 4 \cdot 1^2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-2 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1 - 15) = (1 - 4)^2 + 20(2 + 6 + 15) = \\ = 9 + 40 + 120 + 300 > 0. \Rightarrow a = 1.$$

Проверим $a = -5 - 3\sqrt{5}$:

$$(-5 - 3\sqrt{5})^3 - 8(-5 - 3\sqrt{5})^2 + 12(-5 - 3\sqrt{5})^2 + 24(-5 - 3\sqrt{5}) - 16 = \\ = (-5 + 3\sqrt{5})^3 + 8\cancel{(-5 + 3\sqrt{5})^2} + 12(-5 + 3\sqrt{5}) - 24(-5 + 3\sqrt{5}) - 16 > 0.$$

$$\Rightarrow a = -5 - 3\sqrt{5}.$$

Проверим $a = -5 + 3\sqrt{5}$:

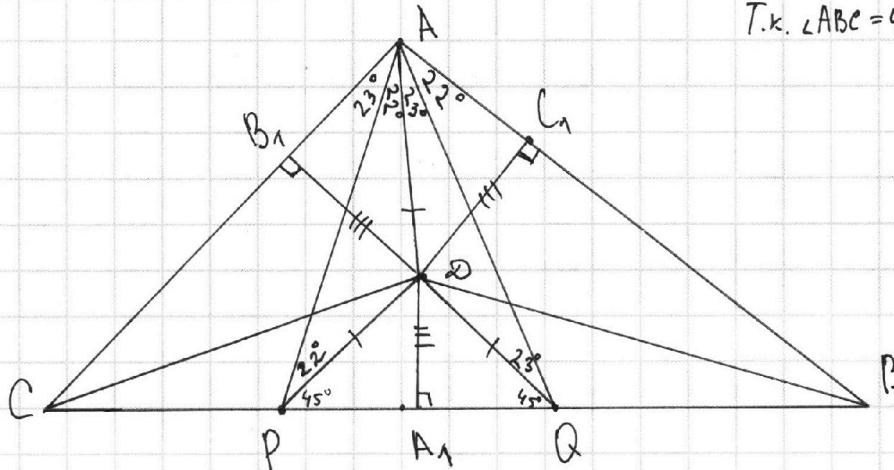
Ответ: 1;

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



т.к. $\angle ABC = 46^\circ$, то $\angle ACB = 180^\circ - 90^\circ - 46^\circ = 44^\circ$

$B \Delta P D Q$

$P D = D Q$ и

$\angle P D Q = 90^\circ \Rightarrow$

~~$\triangle P D Q$ - тупоугольный~~
~~и равнобедренный~~ \Rightarrow
 $\angle D P Q = \angle D Q P =$

$= 45^\circ$. $B \Delta CAQ$ $\frac{AC=CA}{\text{и } b \Delta BAP}$ $BA=BP \Rightarrow \triangle CAQ$ и $\triangle BAP$ - равнобедренные $\Rightarrow \angle APB = \angle PAB = \frac{180^\circ - \angle ABP}{2} = \frac{180^\circ - 46^\circ}{2} = 67^\circ$,
 $\angle CAQ = \angle CQA = \frac{180^\circ - \angle ACQ}{2} = \frac{180^\circ - 44^\circ}{2} = 68^\circ$.

Тогда $\angle APQ = \angle DPQ + \angle ADP \Rightarrow$

$\angle APD = \angle APB - \angle DPQ = 67^\circ - 45^\circ = 22^\circ$. Аналогично, $\angle DQA = 68^\circ - 45^\circ = 23^\circ$.

Пусть O - центр описанной окружности $\triangle PAQ$. Тогда $OA = OP = OQ$ как радиусы $\Rightarrow \triangle OPA$, $\triangle OPQ$, $\triangle OQA$ - равнобедренные $\Rightarrow \angle OPQ = \angle OQP$, $\angle OAP = \angle OPA$, $\angle OAQ = \angle OQA$.

Пусть $\angle OPQ = x$. Тогда $\angle OQP = x$, $\angle APO = \angle APQ - \angle OPQ = 67^\circ - x$, $\angle AQP = \angle AQP - \angle OPQ = 68^\circ - x \Rightarrow \angle PAO = 67^\circ - x$, $\angle QAO = 68^\circ - x \Rightarrow \angle PAQ = \angle PAO + \angle QAO = 67^\circ - x + 68^\circ - x = 135^\circ - 2x = 180^\circ - \angle APQ - \angle AOP = 180^\circ - 67^\circ - 68^\circ = 45^\circ$, $135^\circ - 2x = 45^\circ \Rightarrow x = 45^\circ$. Тогда $\angle OPQ = 45^\circ = \angle OQP$.

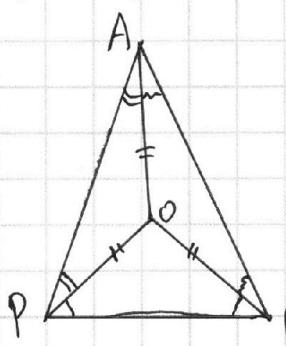
$\triangle POQ = \triangle PDQ$ по II признаку равенства треугольников,

т.к. $PQ = PQ$, $\angle DPQ = 45^\circ = \angle DQP = \angle OPQ = \angle OQP$

Но т.к. $\angle OPQ = \angle OQP$ и PQ - гипотенуза $\triangle POQ$, то сами треугольники тоже совпадают $\Rightarrow O = D$, т.е. D - центр описанной окружности $\triangle APQ$ $\Rightarrow AD = DP = DQ \Rightarrow \triangle ADP$, $\triangle ADQ$ - равнобедренные $\Rightarrow \angle APD = \angle PAD = 22^\circ$, $\angle AQD = \angle DAQ = 23^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle PAQ = \angle PAD + \angle DAQ = 45^\circ \Rightarrow \angle CAP = \angle CAQ - \angle PAQ = 68^\circ - 45^\circ = 23^\circ$, $\angle QAB = \angle PAB - \angle PAQ = 67^\circ - 45^\circ = 22^\circ$. $\angle CAD = \angle CAP + \angle PAD = 45^\circ = \angle DAQ + \angle QAB = \angle DAB \Rightarrow AD$ - биссектриса $\angle BAC$. Опустим перпендикуляры DB_1 , DC_1 , DA_1 из вершины D на AC , AB , BC соответственно.

$B \Delta B_1AD$, $C \Delta C_1AD$, $A \Delta A_1CD$, $\angle B_1AD = 45^\circ$, $\angle DB_1A = 90^\circ \Rightarrow \angle B_1DA = 45^\circ$.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Аналогично, $\angle ACD = 45^\circ$. Тогда $\angle B_1AD = 45^\circ = \angle DAC$, $\angle B_1DA = \angle CDA = 45^\circ$, $DA = DA \Rightarrow \triangle C_1AD \cong \triangle B_1AD$ по II признаку равенства треугольников $\Rightarrow \angle DB_1 = \angle DC_1$.

$\angle PDA_1 = \angle PDA_1 = 90^\circ$, $\angle DPA_1 = 45^\circ \Rightarrow \angle PDA_1 = 45^\circ$.

$\angle PDA_1 = \angle DPA_1 = 45^\circ = \angle B_1AD = \angle B_1DA$, $AD = PD \Rightarrow \triangle B_1AD = \triangle A_1PD$ по II признаку равенства треугольников $\Rightarrow DA_1 = DB_1 = DC_1 \Rightarrow$ точка D равноудалена от сторон $\triangle ABC \Rightarrow D$ - точка пересечения

биссектрис $\triangle ABC \Rightarrow CD$ - биссектриса $\angle ACD \Rightarrow \angle DCB = \frac{\angle ACB}{2} = \frac{44^\circ}{2} = 22^\circ$.

Ответ: 22°

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}| + |y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}| \leq 8$$

При $y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \geq 0$, $y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 0$:

$$y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} - y + 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 8.$$

$$\frac{x}{\sqrt{3}} \leq 8 \Rightarrow x \leq 8\sqrt{3}.$$

При $y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} < 0$, $y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \geq 0$:

$$-y + 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} + y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 8$$

$$-\frac{x}{\sqrt{3}} \leq 8 \quad \text{или} \quad \frac{x}{\sqrt{3}} \geq -8.$$

$$x \geq -8\sqrt{3}.$$

При $y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \geq 0$, $y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \geq 0$:

$$y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} + y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 8.$$

$$2y \leq 48 \quad (\bar{a}-n)^4 = a^4 - 4a^3n - \\ (a-2)^4 = a^4 - 8a^3 + 24a^2 - 32a + 16.$$

$$y \leq 24.$$

$$12a^3 + 56a - 32 = \\ -4(3a^3 + 14a - 8)$$

При $y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} < 0$, $y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} < 0$:

$$-(y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}) - (y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}) \leq 8. \quad \text{или} \quad 2y \leq 12$$

$$-2y \leq -36$$

$$y \geq 18.$$

$$\begin{aligned} x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 &= 0. \\ D = (a^2 - 4a)^2 - 4(a^2 - 6a + 4) &= a^4 - 8a^3 + 16a^2 - 4a^2 + 24a - 16 = a^4 - 8a^3 + 12a^2 + 24a - 16 \geq 0. \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

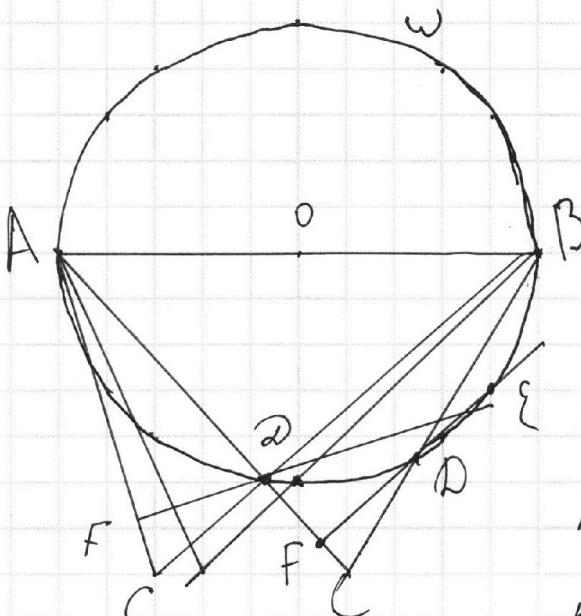


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AC = 20, AB = 10, BE = 9.$$

$$\angle ACB = \frac{\overarc{AB} - \overarc{CD}}{2} = 90^\circ - \frac{\overarc{CD}}{2}$$

$\angle ADB = 90^\circ$, т.к. \overarc{AB} -гусиний \Rightarrow

AD - высота $\triangle ABC$.

$$\angle ABD = \angle AED \quad (\overarc{AD} - \text{односторон})$$

$\triangle AEB \sim \triangle AFD \sim \triangle DCF$.

$\triangle AFE \sim \triangle ADB$.

\overarc{DB} гусиний \Rightarrow $\triangle ABE$

$$AB^2 = AE^2 + EB^2 \Rightarrow$$

$$AE^2 = 100 - 81 = 19 \Rightarrow AE = \sqrt{19}.$$

$$\sin \gamma = \frac{BE}{AB} = \frac{9}{10} = \frac{FC}{CD} = \frac{FD}{AD} = \frac{CD}{AC} = \frac{CD}{20} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CD = 18.$$

$$\begin{aligned} 18 & \\ 9 & \\ 16,2 & \\ 2 & \\ 20 & \\ 6 & \\ 3 & \\ 8 & \end{aligned} \quad \frac{FC}{CD} = \frac{9}{10} = \frac{FC}{18} \Rightarrow FC = \frac{9 \cdot 9 \cdot 2}{10} = \frac{81}{5} = 16,2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 СТРАНИЦА
_ из _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0.$$

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = 6y + y^2. \end{cases}$$

$$xy = z(z-6)$$

$$yz = x(x-6)$$

$$zx = y(y-6)$$

$$\begin{matrix} 81 \\ 9 \\ 729 \end{matrix}$$

$$a = \frac{11 \dots 1}{2000!}$$

$$n = \underbrace{999\dots 9}_{2000!} = 3 \cdot \underbrace{11\dots 1}_{2000!}$$

$$n^3 = 729 \cdot a^3$$

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = x^2 - 12x + 36 + y^2 - 12y + 36 + z^2 - 12z + 36 =$$

$$= xy + yz + zx - 6x - 6y - 6z + 36 \cdot 3 = -36 + 36 \cdot 3 = 72$$

$$x(z-6).$$

$$\begin{cases} 6z = z^2 - xy, \\ 6x = x^2 - yz, \\ 6y = y^2 - zx, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2x^2 + 2xy + y^2 &= xy^2 + 2xz + z^2 - 2z^2 + 2xy + \\ &+ 36 \cdot 3 = -x^2 + 2yz - y^2 + 2xz - z^2 + 2xy + 36 \cdot 3 = \end{aligned}$$

$$=$$

$$\begin{aligned} 9z - &= 89 - x - z + z - h + h \\ 0 = & 9z - z - z - h - h + h + x \end{aligned}$$

$$< 28z + h - z + h - x - 9z + z - x - h - 9 - z - h - x =$$

$$= -h - h + z - z + z - h - h + z - h - z - h = (9 - z)(9 - h)(9 - x)$$

$$(z + h + x)z = (x - h) + (h - z) + (z - x) = (x - h) + (h - z) + (z - x) - 9z + z + h + x =$$

$$= z + z - h + h + h - x + x + z - z$$

$$(z + h + x)z = xz - h + z - x + h - z / \cancel{x}$$

$$S = 9 - 1 = S \cdot 1$$

$$i = \frac{(h)}{xz} + \frac{(x)}{zh} + \frac{(z)}{hx} = 1$$

$$\frac{h}{xz} = 9 - h$$

$$\frac{x}{zh} = 9 - x$$

$$\frac{z}{hx} = 9 - z$$

$$(9 - h)h = xz$$

$$(9 - x)x = zh$$

$$(9 - z)z = hx$$

$$(9 - h)(9 - x) = z$$

$$(9 - z)(9 - h)(9 - x) = zh$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

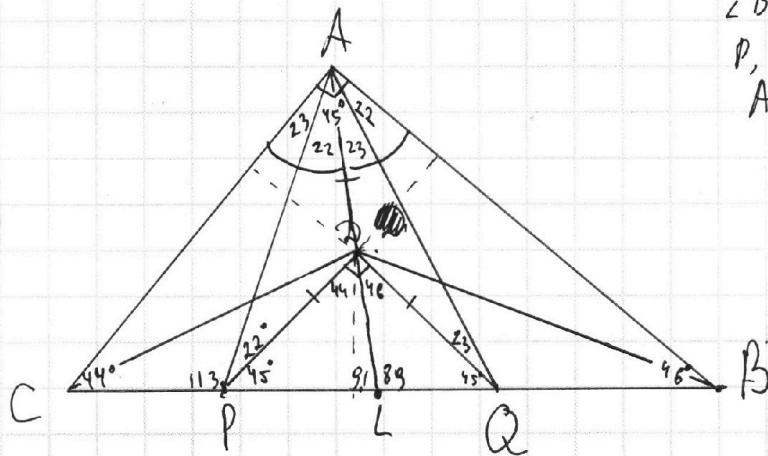
Если $5 < h \leq 9$: $P(A) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{h(h-1)(h-2)}$ $P(B) = 1$.

$$P(B) = \frac{h(h-1)(h-2)}{5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{h(h-1)(h-2)}{60}$$

Если $3 \leq h \leq 5$, то $P(A) = 1$, $P(B) = 1$.

180
46
134/2
12 67
14

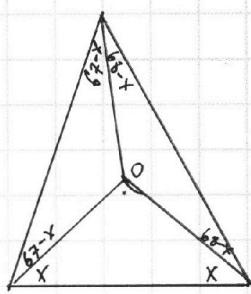
$\angle CBA = 46^\circ$ 136
 $\angle BAC = 90^\circ$
 $P, Q \in BC$
 $AB = BP$
 $AC = CQ$
 $DP = DQ, \angle PDQ = 90^\circ$
 $44 + 23 = 67$
 $180 - 67 =$
 113



$\triangle PDQ$ - тупоугл., $p/\delta.$, $\triangle ABP$ и $\triangle ACQ$ - $p/\delta.$. $\Rightarrow \angle BAP = \angle BPA = \frac{180^\circ - 46^\circ}{2} = 67^\circ$, $\angle CAQ = \angle CQA = \frac{180^\circ - 44^\circ}{2} = 68^\circ \Rightarrow \angle PDQ = \angle CQA - 45^\circ = 68^\circ - 45^\circ = 23^\circ$, $\angle CPD = 22^\circ$.

Тогда в $\triangle PAQ$ $\angle PAQ = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$.
 O - центр описанной окружности $\triangle APQ$.

$$135 - 2x = 45^\circ \Rightarrow 2x = 90^\circ \Rightarrow x = 45^\circ \Rightarrow O \equiv D.$$



$\angle ACL = 44^\circ$, $\angle CAL = 45^\circ \Rightarrow \triangle CAL \sim \triangle DPL$
 $\angle DPL = 45^\circ$, $\angle PLD = \angle ALC$
 AL - биссектриса $\triangle ABC$ $\angle PDL = 44^\circ$.

$$\frac{AC}{CL} = \frac{AB}{BL}$$

$$9 + 5 + 6 = 20$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0.$$

$$D = (a^2 - 4a)^2 - 4(a^2 - 6a + 4) = a^4 - 8a^3 + 16a^2 - 4a^2 + 24a - 16 =$$

$$= \cancel{a^4} - 8a^3 + 12a^2 + 24a - 16 \geq 0.$$

$$a=2: 16 - 8 \cdot 8 + 12 \cdot 4 + 24 \cdot 2 - 16 = 48 + 48 - 64 > 0.$$

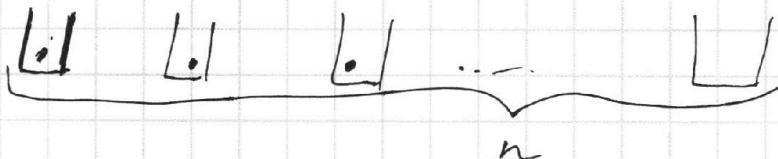
$$16 + 64 + 48 - 48 - 16 = 64$$

$$\cancel{a^2} - 4a$$

$$64 \cdot 4 - 64 \cdot 8 + 3 \cdot 64 + 16 \cdot 6 - 16 = \cancel{16 \cdot 4 + 16 \cdot 8}$$

$$(a^2 + 4a)^2 + a^2 + 4a - 12(a^2 + 2a)$$

$$a^2 - 4a$$



Если $n \geq 10$.

Способов выбирать 5 коробок: C_n^5 .

Способов выбирать 2 коробки в кор. нет шариков: C_{n-3}^2 . (т.е. способов выбирать при первом. выборе)

$$P(A) = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{(n-3)!}{2 \cdot (n-5)!} : \frac{n!}{5! (n-5)!} = \frac{(n-3)!}{2 \cdot (n-5)!} \cdot \frac{5! (n-5)!}{n!} =$$

$$= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{n(n-1)(n-2)}.$$

Способов выбирать 9 кор.: C_n^9

Способов выбирать, выбрав 9 кор., т.е. способов выбирать 6 кор., в кор. нет шариков: $\cancel{C_n^9} \rightarrow C_{n-3}^6$

$$P(B) = \frac{C_{n-3}^6}{C_n^9} = \frac{(n-3)!}{6! (n-9)!} : \frac{n!}{9! (n-9)!} = \frac{(n-3)!}{6! (n-9)!} \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6! (n-9)!}{n!} =$$

$$= \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{n(n-1)(n-2)}.$$

$$\frac{P(B)}{P(A)} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{n(n-1)(n-2)} : \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{n(n-1)(n-2)} = \frac{\cancel{9 \cdot 8 \cdot 7}}{\cancel{5 \cdot 4 \cdot 3}} = \frac{6}{5} = \frac{12}{5} = \boxed{8,4.}$$