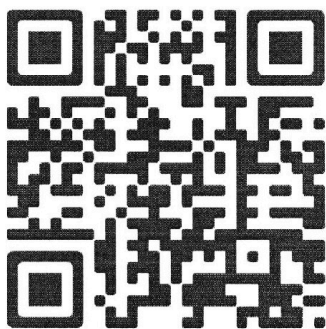
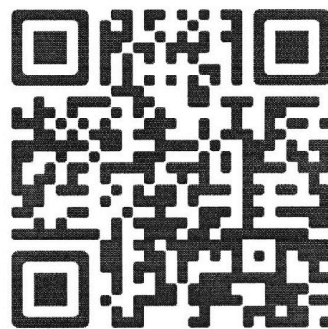




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leq 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

н1 продолжение

подставим $y = -(2x+3)$ в первое уравнение

получим систему: $-x(2x+3) = 3x + x^2 \Rightarrow$

$$-2x^2 - 3x = 3x + x^2 \Rightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x^2 + 2x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 & \text{нет по условию} \\ x=-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = -2 \Rightarrow z = -2 \Rightarrow \text{из } 2x + y + 3 = 0 \quad y = -(2x+3) =$$

$$= -(2 \cdot (-2) + 3) = -(-4 + 3) = -(-1) = 1 \Rightarrow$$

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = 1^2 + 4^2 + 1^2 = 1 + 16 + 1 = 18$$

Решим систему с условием 15):

$$x + y + z = -3 \Rightarrow z = -(x + y + 3) \Rightarrow \text{система имеет вид:}$$

$$\begin{cases} xy = (x+y+3)^2 - 3(x+y+3) \\ -y(x+y+3) = 3x + x^2 \\ -x(x+y+3) = 3y + y^2 \end{cases} \quad \begin{cases} xy = x^2 + y^2 + 6xy + 6x + 6y + 9 - 3x - 3y - 3 \\ -xy - y^2 - 3y = 3x + x^2 \\ -xy - x^2 - 3x = 3y + y^2 \end{cases}$$

вычтем из (1) (2):

$$-y^2 + x^2 - 3y + 3x = 3x - 3y$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 6y + 6z - 3x - 3y = 0 \\ x^2 + y^2 + 3x + 3y + xy = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 3y + 6z - 3x = 0 \\ x^2 + y^2 + xy + 3x + 3y = 0 \end{cases}$$

$$3y + 6z - 3x - 3x - 3y = 0 \Rightarrow$$

$$6z - 6x = 0 \Rightarrow x = z \quad \text{— это условие 4}$$

а решая систему с условием 4 получим

$$x = -2, z = -2, y = 1 \quad \text{и} \quad (x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = 18$$

$\Rightarrow$ если такие x, y, z действительно решения исходной системы, то $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = 18$ является единственным ответом:

$$\begin{cases} -2 = -6 + 4 \\ -2 = -6 + 4 \\ +1 = 3 + 1 \end{cases} \quad \text{— подставили}$$

и получили истину

Ответ: 18



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1 $x \neq 0 \quad y \neq 0 \quad z \neq 0$

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 & (1) \\ yz = 3x + x^2 & (2) \\ xz = 3y + y^2 & (3) \end{cases}$$

(1)-(2) вычитаем из (1) (2)

$$\begin{aligned} xy - yz &= 3z - 3x + z^2 - x^2 \\ y(x-z) &= 3(z-x) + (z-x)(z+x) \\ y(x-z) &= (z-x)(3+x+z) \end{aligned}$$

$$y(x-z) + (x-z)(3+x+z) = 0$$

$$(x-z)(x+y+z+3) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = z & (4) \\ x+y+z+3=0 & (5) \end{cases}$$

Решаем систему с условием (4)

$$\begin{cases} xy = 3x + x^2 \\ yx = 3x + x^2 \\ x^2 = 3y + y^2 \end{cases} \text{ одинаковые} \quad \begin{cases} xy = 3x + x^2 & (6) \\ x^2 = 3y + y^2 & (7) \end{cases}$$

вычитаем из (6) (7):

$$xy - x^2 = 3(x-y) + (x-y)(x+y) \Rightarrow x(y-x) = (x-y)(x+y+3)$$

$$x(y-x) + (y-x)(x+y+3) = 0 \Rightarrow (y-x)(2x+y+3) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = x & (8) \\ 2x+y+3=0 & (9) \end{cases}$$

Решаем систему с условием (8) и (9)

$$x=y=z \Rightarrow \text{из первого (1)} \quad x^2 = 3x + x^2 \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x=0$$

с условием (9) и (4)

$$\begin{cases} 2x+y+3=0 \\ x=z \end{cases} \text{ - вот эти условия}$$

из полученных уравнений этой системы

$$y = -2x - 3 = -(2x+3)$$

$$\begin{cases} xy = 3x + x^2 \\ yx = 3x + x^2 \\ x^2 = 3y + y^2 \\ x=z \\ \cancel{2x+y+3=0} \end{cases} \text{ одинаковые}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2

Рассмотрим умножение «в столбик»

$$n = \overline{99 \dots 9}_{40000}$$

$$n^2 = \begin{array}{r} \times \overline{999 \dots 999}_8 \\ \hline \overline{999 \dots 999}_8 \\ 8999 \dots 991 \\ 89999 \dots 91 \\ 899999 \dots 1 \\ \hline \overline{89 \dots 9991}_{1001} \end{array}$$

Заметим, что $n = \overline{99 \dots 9}_{40000} = 10^{40000} - 1$

$$n^2 = (10^{40000} - 1)^2 = 10^{120000} - 3 \cdot 10^{80000} + 3 \cdot 10^{40000} - 1 =$$

по формуле куба равняется

$$10^{120000} - 3 \cdot 10^{80000} = \underbrace{100 \dots 0}_{120000} - \underbrace{3000 \dots 0}_{80000} = \underbrace{99 \dots 97000}_{39998} \underbrace{0}_{80000}$$

у вычитания «столбиком» нет последних 80000 оставшихся нулей, получается число с 119999 разрядами, где первые 39998 — «9», затем одна «7» и затем 40000 нулей.

$$\underbrace{999 \dots 97000}_{39998} \underbrace{0}_{80000} + 3 \cdot 10^{40000} = \underbrace{99 \dots 9700}_{39998} \underbrace{0}_{39999} \underbrace{3000}_{40000}$$

$$+ \underbrace{99 \dots 970000}_{30 \dots 000}$$

$$\hline \underbrace{99 \dots 9700}_{39998} \underbrace{0300}_{39999} \underbrace{0}_{40000}$$

$$n^2 = \underbrace{999 \dots 97000}_{39998} \underbrace{0}_{39999} \underbrace{3000}_{40000} \underbrace{0}_1$$

$$\hline \underbrace{99 \dots 9700}_{39998} \underbrace{0299}_{40000} \underbrace{9}$$

Итого получится $39998 + 40000$
= 79998

Ответ: 79998



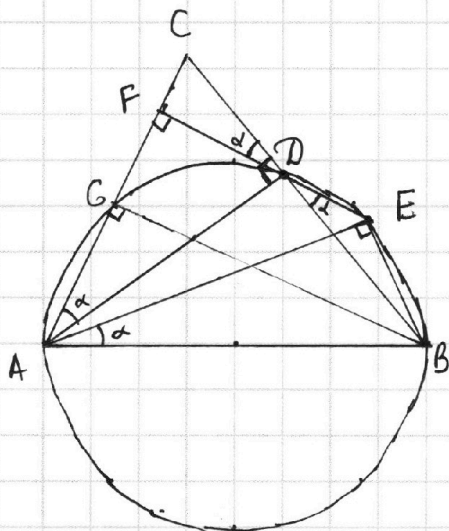
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3



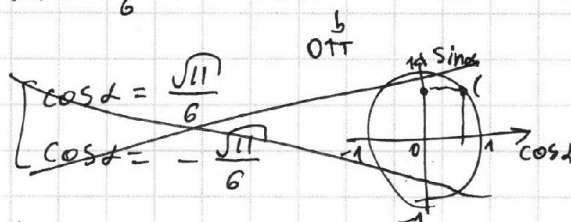
Решение: пусть ω пересекает AC в точке G. Из AB — диаметр ω следует $\angle AGB = \angle ADB = \angle AEB = 90^\circ \Rightarrow \angle ADC = 90^\circ$ т.к.

BC — прямая, по т. о. опираясь на $\triangle AFD$ и $\angle FAD = \angle$, то т.к. по условию $FD \perp AC$, то $\angle FDA = 90^\circ - \angle \Rightarrow \angle FDC = \angle$ и $\angle ADC = 90^\circ \Rightarrow \angle BDE = \angle FDC = \angle$ (вертикальные)

В $\triangle AEB$ $\frac{1}{2} BE = \angle BDE = \angle EAB = \angle \Rightarrow \sin \angle = \frac{BE}{AB} = \frac{5}{6}$ и $\triangle AEB$

Из $\triangle AFD$ и $\triangle ACD$: $\cos \angle = \frac{AD}{AC} = \frac{AD}{10} \Rightarrow AD = 10 \cdot \cos \angle (1)$

$\sin \angle = \frac{5}{6} \Rightarrow \cos^2 \angle = 1 - \sin^2 \angle = 1 - \frac{25}{36} = \frac{36 - 25}{36} = \frac{11}{36} \Rightarrow$



$\cos^2 \angle = \frac{11}{36}$

Из $\triangle AFD$: $\cos \angle = \frac{AF}{AD} \Rightarrow AF = AD \cdot \cos \angle = 10 \cdot \cos \angle \cdot \cos \angle = 10 \cos^2 \angle = 10 \cdot \frac{11}{36} = 5 \cdot \frac{11}{18} = \frac{55}{18}$ (1)

Отв: $\frac{55}{18}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

н4

о о о о . . о

Пусть всего n порохов:

Рассмотрим вероятность u выигрыша в первом случае: Игрок выигрывает тогда и только тогда когда ~~ровно~~ ровно 3 из 5 порохов содержат марки, остальные 2 нет. То есть при выигрыше ~~ровно~~ 3 порохов с марками должны быть однозначно, а из оставшихся $n-3$ порохов можно выбрать любые две, то можно сделать ровно C_{n-3}^2 способами. Всего исходов - выбрать 5 из n ~~мар~~

порохов - ровно C_n^5 . Рассмотрим вероятность выигрыша во втором случае: Аналогично ровно 3 из 6 порохов с марками берутся однозначно, и оставшиеся 3 из $n-3$ выбираются произвольно. Итого благоприятных исходов C_{n-3}^3 , всего аналогично C_n^6 , итого в 1 случае вероятности

$$P_1 = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}, \text{ во 2: } P_2 = \frac{C_{n-3}^3}{C_n^6}$$

Нужно найти $\frac{P_2}{P_1} = \frac{C_{n-3}^3}{C_n^6} \cdot \frac{C_n^5}{C_{n-3}^2} = \frac{C_{n-3}^3}{C_{n-3}^2} \cdot \frac{C_n^5}{C_n^6}$

$$C_{n-3}^3 = \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{6} \quad (3! = 6) \quad \text{По св-ву числа сочетаний можно записать:}$$

$$C_{n-3}^2 = \frac{(n-3)(n-4)}{2} \quad C_n^5 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}$$

$$C_n^6 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{6!}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

n ч про да тене : под став ля ем : ~~Р₂~~

$$\left\{ \frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{8 \cdot 3}}{\frac{(n-3)(n-4)}{2}} \cdot \frac{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{6! \cdot 6}} = \frac{n-5}{3} \cdot \frac{6}{n-5} = \frac{6}{3} = 2 \right\}$$

! Заметим, что в процессе сокращения дробей мы делили на $n-3, n-4, n-5, n-2, n-1, n$, значит $n \neq 0, n \neq 1, n \neq 2, n \neq 3, n \neq 4, n \neq 5$ — действительно, иначе во втором алгебре игра не могла бы вестись в городе, значит $n \geq 6$

Ответ: 2



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
4 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

15 продолжение:

Возможны перестановки корней разности $\Rightarrow$
 $a=0$ не подходит $\Rightarrow$ Проверим $a=4$

Первое уравнение: $x^2 - 12x - 1 = 0$

Второе уравнение: $4x^2 - 48x + 2 \cdot 4^4 + 2 \cdot 4^2 - 4^6 - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$$\cancel{12x} x^2 - 12x + 2 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4 - 4^5 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 12x - 889 = 0$$

Первое уравнение:

$$D = 144 + 4 = 148 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{12 + \sqrt{148}}{2} \\ x = \frac{12 - \sqrt{148}}{2} \end{cases}$$

Пусть $x_1 = \frac{12 + \sqrt{148}}{2}$, $x_2 = \frac{12 - \sqrt{148}}{2} \Rightarrow y$ (0):

$$\begin{cases} \frac{12 + \sqrt{148}}{2} = 6 + 4d \\ \frac{12 - \sqrt{148}}{2} = 6 + 5d \end{cases} \Rightarrow \text{вычитая } y \text{ первое второе:}$$

$$\frac{12 + \sqrt{148} - 12 - \sqrt{148}}{2} = -d \Rightarrow$$

$$d = -\sqrt{148}, \text{ подставляя}$$

в первое уравнение получаем

$$\frac{12 + \sqrt{148}}{2} = 6 - 4\sqrt{148} \Rightarrow 2 \cdot 6 - 8\sqrt{148} = 12 + \sqrt{148} \Rightarrow$$

$$2 \cdot 6 = 9\sqrt{148} + 12 \Rightarrow 6 = \frac{9}{2}\sqrt{148} + 6$$

$$d = -\sqrt{148}$$

Если же $x_1 = \frac{12 - \sqrt{148}}{2}$, $x_2 = \frac{12 + \sqrt{148}}{2} \Rightarrow y$ (0):

$$\begin{cases} \frac{12 - \sqrt{148}}{2} = 6 + 4d \\ \frac{12 + \sqrt{148}}{2} = 6 + 5d \end{cases} \Rightarrow \text{вычитая } y \text{ первое второе:}$$

$$\frac{12 - \sqrt{148} - 12 - \sqrt{148}}{2} = -d \Rightarrow d = \sqrt{148}$$

подставляя в первое уравнение получаем:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N5 продолжение:

при $a=1$ все прогрессии получились
различными при всех значениях

перестановкам корней $\Rightarrow a=1$ не подходит:

Проверим случай $a=0$:

Первое уравнение: $x^2 - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{5} \\ x = -\sqrt{5} \end{cases}$

Второе уравнение: $4x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

Пусть $x_1 = \sqrt{5}$, $x_2 = -\sqrt{5} \Rightarrow$ у (0):

$$\begin{cases} \sqrt{5} = b + 4d \\ -\sqrt{5} = b + 5d \end{cases} \Rightarrow \text{вычитая у первого уравнения второе } 2\sqrt{5} = -d, \text{ подставляя в первое } \sqrt{5} = b - 8\sqrt{5} \Rightarrow b = 9\sqrt{5}$$

Пусть $x_2 = -\sqrt{5}$, $x_1 = \sqrt{5} \Rightarrow$ у (0):

$$\begin{cases} -\sqrt{5} = b + 4d \\ \sqrt{5} = b + 5d \end{cases} \Rightarrow \text{вычитая у первого второе } -2\sqrt{5} = -d \Rightarrow d = 2\sqrt{5} \Rightarrow \text{подставляя в первое: } -\sqrt{5} = b + 8\sqrt{5} \Rightarrow b = -9\sqrt{5}$$

Пусть $x_3 = 1$, $x_4 = -1 \Rightarrow$ у (0): $d = 2\sqrt{5}$

$$\begin{cases} 1 = b + 2d \\ -1 = b + 7d \end{cases} \Rightarrow \text{вычитая у первого второе: } 2 = -5d \Rightarrow d = -\frac{2}{5} \Rightarrow \text{подставляя в первое } 1 = b - \frac{4}{5} \Rightarrow b = \frac{5}{5} + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}$$

Пусть $x_3 = -1$, $x_4 = 1 \Rightarrow$ у (0):

$$\begin{cases} -1 = b + 2d \\ 1 = b + 7d \end{cases} \Rightarrow \text{вычитая у первого второе: } -2 = -5d \Rightarrow d = \frac{2}{5} \Rightarrow \text{подставляя в первое } -1 = b + \frac{4}{5} \Rightarrow b = -\frac{1}{5}$$

При $a=0$ опять же все прогрессии при всех



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5 продолжение:

из (0): Пусть $x_1 = 2, x_2 = -2$

тогда $\begin{cases} 2 = b + 4d \\ -2 = b + 5d \end{cases} \Rightarrow$ вычитая из первого второе:

$2 + 2 = -d \Rightarrow d = -4 \Rightarrow$ подстав. в первое

$2 = b - 16 \Rightarrow b = 18$

Рассмотрим второе уравнение:

$4x^2 + 2 + 2 - 1 - 4 = 0 \Rightarrow 4x^2 - 1 = 0 \Rightarrow (2x-1)(2x+1) = 0 \Rightarrow$

$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$ Пусть $x_3 = \frac{1}{2}, x_4 = -\frac{1}{2}$, тогда из (1):

$\begin{cases} \frac{1}{2} = b + 2d \\ -\frac{1}{2} = b + 7d \end{cases} \Rightarrow$ вычитая из первого второе:

$1 = -5d \Rightarrow d = -\frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{2} = b - \frac{2}{5}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{2}{5} = b \Rightarrow \frac{5}{10} + \frac{4}{10} = b = \frac{9}{10}$

первое
уравнение
подставим

Если же $x_1 = -2, x_2 = 2$, то из (0):

$\begin{cases} -2 = b + 4d \\ 2 = b + 5d \end{cases} \Rightarrow$ вычитая из первого второе:

$-4 = -d \Rightarrow d = 4 \Rightarrow$ из первого уравнения

$-2 = b + 16 \Rightarrow b = 18$

Если же $x_3 = -\frac{1}{2}, x_4 = \frac{1}{2}$, то из (1):

$\begin{cases} -\frac{1}{2} = b + 2d \\ \frac{1}{2} = b + 7d \end{cases} \Rightarrow$ вычитая из первого второе получаем:

$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -5d \Rightarrow -1 = -5d \Rightarrow d = \frac{1}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ из первого уравнения системы

$-\frac{1}{2} = b + \frac{2}{5} \Rightarrow b = -\frac{1}{2} - \frac{2}{5} = -\frac{9}{10}$

Заметим, что при $a=1$ все progresses



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5

$$x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$$

Пусть x_1, x_2 — корни этого уравнения.
Необходимы и достаточно условия того, что x_1 и x_2 являются 5-м и 6-м членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии является то, что существуют целые b и d , такие, что

$$(0) \begin{cases} x_1 = b + 4d \\ x_2 = b + 5d \end{cases} \text{ по т Виета: } \begin{cases} x_1 x_2 = a - 5 \\ x_1 + x_2 = a^2 - a \end{cases}$$

$$4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$$

Пусть x_3, x_4 — корни этого уравнения.

Необходимы и... —||— (аналогично)

$$(1) \begin{cases} x_3 = b + 2d \\ x_4 = b + 7d \end{cases} \text{ по т Виета } \begin{cases} x_3 x_4 = \frac{2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4}{4} \\ x_3 + x_4 = \frac{a^3 - a^2}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (b + 4d)(b + 5d) = a - 5 & (1) \\ 2b + 9d = a^2 - a & (2) \\ (b + 2d)(b + 7d) = \frac{2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4}{4} & (3) \\ 2b + 9d = \frac{a^3 - a^2}{4} & (4) \end{cases}$$

Рассмотрим уравнения (2) и (4)

$$\begin{cases} 2b + 9d = a^2 - a \\ 2b + 9d = \frac{a^3 - a^2}{4} \end{cases} \Rightarrow \cancel{a^2 - a} \quad a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{4} \Rightarrow 4(a^2 - a) = a^3 - a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4a(a - 1) = a^2(a - 1) \Rightarrow a^2(a - 1) - 4a(a - 1) = (a - 1)(a^2 - 4a) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 & (5) \\ a = 0 & (6) \\ a = 4 & (7) \end{cases}$$

Проверим случай $a = 1$:
поставим 1-е уравнение:

$$x^2 - (1^2 - 1)x + 1 - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \text{ не подходит}$$

Рассмотрим ~~случаи~~

~~однотности $x_1 = 2$ и $x_2 = -2$, тогда из (0):~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
5 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

25 продолжение:

$$\frac{12 - \sqrt{148}}{2} = b + 4\sqrt{148} \Rightarrow 2b + 8\sqrt{148} = 12 - \sqrt{148} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2b = -9\sqrt{148} + 12 \Rightarrow b = -\frac{9}{2}\sqrt{148} + 6$$

Пусть ~~x₃~~ второе уравнение: $x^2 - 12x - 889 = 0$

$$D = 144 + 4 \cdot 889 = 5 \cdot 5 \cdot 37 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{12 + 5\sqrt{37}}{2} \\ x = \frac{12 - 5\sqrt{37}}{2} \end{cases}$$

Пусть $x_3 = \frac{12 + 5\sqrt{37}}{2}$, $x_4 = \frac{12 - 5\sqrt{37}}{2}$, а ~~у~~ (0):

$$\begin{cases} b + 2d = \frac{12 + 5\sqrt{37}}{2} \\ b + 7d = \frac{12 - 5\sqrt{37}}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{вычитая у первого второе:}$$

$$-5d = \frac{12 + 5\sqrt{37}}{2} - \frac{12 - 5\sqrt{37}}{2} = 5\sqrt{37}$$

$$\Rightarrow d = -\sqrt{37} \Rightarrow \text{подставляем}$$

в первое

$$b - 2\sqrt{37} = \frac{12 + 5\sqrt{37}}{2} \Rightarrow 2b - 4\sqrt{37} = 12 + 5\sqrt{37} \Rightarrow$$

$$2b = 9\sqrt{37} + 12 \Rightarrow b = \frac{9}{2}\sqrt{37} + 6$$

$$d = -\sqrt{37}$$

Если же $x_4 = \frac{12 + 5\sqrt{37}}{2}$, $x_3 = \frac{12 - 5\sqrt{37}}{2}$, то

$$\begin{cases} b + 2d = \frac{12 - 5\sqrt{37}}{2} \\ b + 7d = \frac{12 + 5\sqrt{37}}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{вычитая у первого второе:}$$

$$-5d = \frac{12 - 5\sqrt{37}}{2} - \frac{12 + 5\sqrt{37}}{2} \Rightarrow d = \sqrt{37}$$

$$\Rightarrow b + 2\sqrt{37} = \frac{12 - 5\sqrt{37}}{2} \Rightarrow 2b + 4\sqrt{37} = 12 - 5\sqrt{37} \Rightarrow$$

$b = 6 - \frac{9}{2}\sqrt{37}$, при $a=4$ ситуация аналогичная $a=0$ и $a=1 \Rightarrow$ или $a=0$, или $a=1$, или $a=4$ не подходит, т.к. a может



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 6

$$\left| x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| + \left| x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| \leq 3$$

$$1) \begin{cases} x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \geq 0 \\ x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \geq 0 \\ 2x - 15 \leq 3 \end{cases} \begin{cases} \frac{y}{6\sqrt{3}} \geq \frac{15}{2} - x \\ \frac{y}{6\sqrt{3}} \leq x - \frac{15}{2} \\ 2x \leq 18 \end{cases} \begin{cases} y \geq \frac{15}{2} \cdot 6\sqrt{3} - x \cdot 6\sqrt{3} \\ y \leq x \cdot 6\sqrt{3} - \frac{15}{2} \cdot 6\sqrt{3} \\ x \leq 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 45\sqrt{3} - 6x\sqrt{3} \\ y \leq 6x\sqrt{3} - 45\sqrt{3} \\ x \leq 9 \end{cases} \begin{cases} y \geq -6x\sqrt{3} + 45\sqrt{3} \\ y \leq 6x\sqrt{3} - 45\sqrt{3} \\ x \leq 9 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \geq 0 \\ x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \leq 0 \\ \frac{y}{3\sqrt{3}} \leq 3 \end{cases} \begin{cases} \frac{y}{6\sqrt{3}} \geq \frac{15}{2} - x \\ \frac{y}{6\sqrt{3}} \geq x - \frac{15}{2} \\ y \leq 9\sqrt{3} \end{cases} \begin{cases} y \geq 45\sqrt{3} - 6x\sqrt{3} \\ y \geq 6x\sqrt{3} - 45\sqrt{3} \\ y \leq 9\sqrt{3} \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \leq 0 \\ x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \leq 0 \\ -2x + 15 \leq 3 \end{cases} \begin{cases} \frac{y}{6\sqrt{3}} \leq \frac{15}{2} - x \\ y \geq 6x\sqrt{3} - 45\sqrt{3} \\ -2x \leq -12 \end{cases} \begin{cases} y \leq 45\sqrt{3} - 6x\sqrt{3} \\ y \geq 6x\sqrt{3} - 45\sqrt{3} \\ x \geq 6 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \leq 0 \\ x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \geq 0 \\ -\frac{2y}{3\sqrt{3}} \leq 3 \end{cases} \begin{cases} y \leq 45\sqrt{3} - 6x\sqrt{3} \\ y \leq 6x\sqrt{3} - 45\sqrt{3} \\ y \geq -9\sqrt{3} \end{cases}$$

Построим графики фигуры Φ !



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2) $y \leq 9\sqrt{3}$ $\sqrt{6} \times \sqrt{3} = \sqrt{18} \sqrt{3}$
1 прямая :

N 6

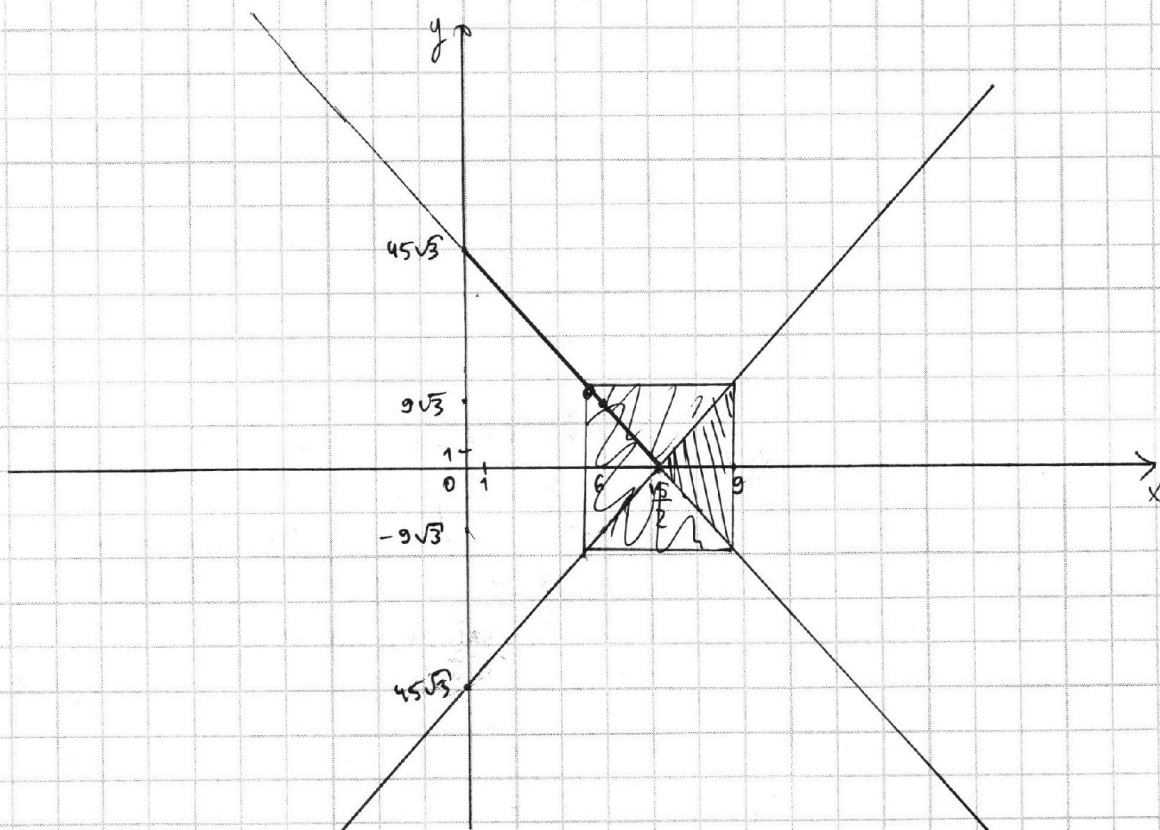
$$y = -6x\sqrt{3} + 45\sqrt{3}$$

$$y = 6x\sqrt{3} - 45\sqrt{3}$$

x	0	6	$\frac{15}{2}$
y	$45\sqrt{3}$	$9\sqrt{3}$	0

x	0	6	$+\frac{15}{2}$
y	$45\sqrt{3}$	$-9\sqrt{3}$	0

со знаком "-"



- 1) система задает тр-и, ограниченной или 2-мя
прямой и прямой $x=9$.
2) система задает

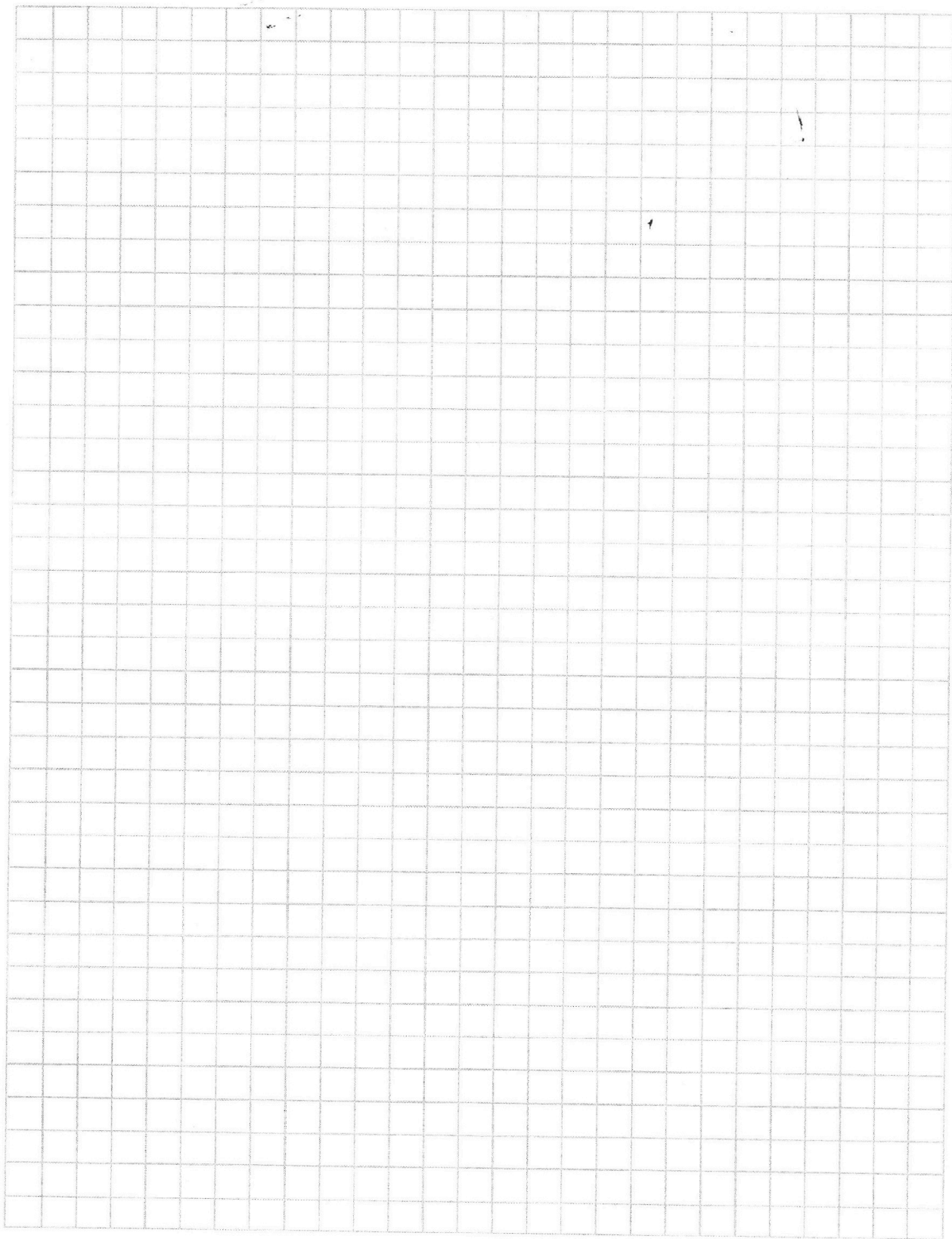


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

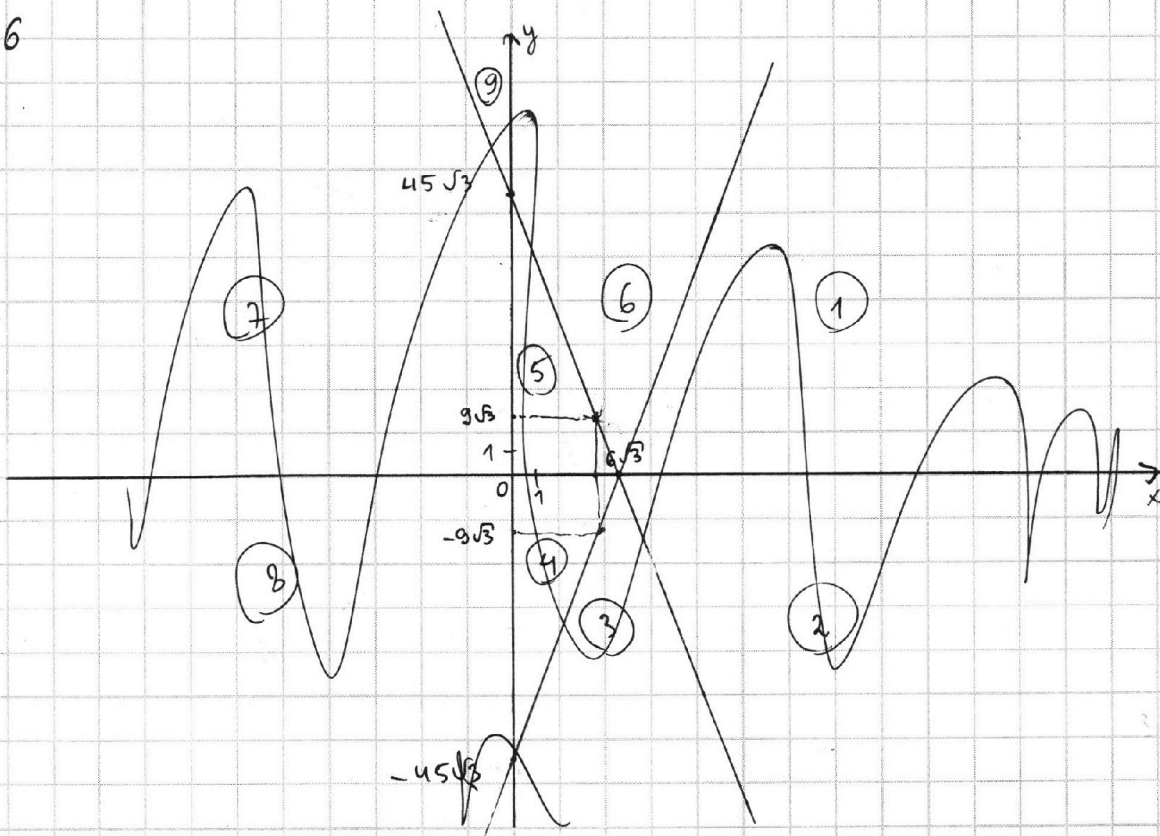
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 6



$$y = -6x^2 + 45\sqrt{3}x$$

$$y = 6x^2 - 45\sqrt{3}x$$

x	0	6\sqrt{3}
y	45\sqrt{3}	9\sqrt{3}

x	0	6\sqrt{3}
y	-45\sqrt{3}	-9\sqrt{3}

симметрия относительно Ox

1) Пусть Ox и 2 прямые (символы) ограничивают 3 области (отмечены в кружках).
т.е. $x \in [0, 6\sqrt{3}]$ в 1 случае и подают
область 1 и 2 только (из неравенств)
то 1 систему имея изобразить на п.т.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7 продолжение:

Теперь пусть O — центр описанной окружности $\triangle AQP$,

тогда $\angle QOP = 2\angle QAP = 90^\circ$, но $\angle QDP = 90^\circ \Rightarrow$

$O \in$ опис. окруж. $\triangle QOP$, но $O \in$ сер. перу

и QP , т.е. $\triangle QOP$ — п/б прямоугольный с
вершиной угла $O \Rightarrow O \equiv O \Rightarrow OQ = OP = OA$

$OQ = OA \Rightarrow O \in$ сер. перу и AQ , но т.к. $CQ = CA$, то
 $C \in$ сер. перу и $AQ \Rightarrow CO$ — сер. пер. и $AQ \Rightarrow$

т.е. $\triangle ACQ$ — п/б , то $\angle OCQ = \angle OCA = 20^\circ \Rightarrow$ аналогично

$\triangle PBA$: $OP = OA$, $BP = BA \Rightarrow BO$ — сер. пер. и AP

$\Rightarrow$ в $\triangle ABP$ — п/б $\angle OBC = \angle OBA$, а в

$\triangle ABC$ — п/з $\angle PBA = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ \Rightarrow \angle OBC = 25^\circ$,

т.е. $\angle OBC + \angle OBA = 2\angle OBC = \angle PBA$

Ответ: 25°

$\uparrow$ $DP = DQ$ и $\angle PDQ = 90^\circ$ гарантирует, что $\triangle PDQ$ — прямоугольный равнобедренный с вершиной D . Пусть $\angle DQA = \alpha$, $\angle PAC = \beta$. Из симметричных углов при пересечении $\triangle CQA$ с вершиной C $\angle QAP = \angle QAC - \angle PAC = \angle CQA - \beta = 45^\circ + \alpha - \beta \Rightarrow$
 Из симметричных углов при пересечении $\triangle BAP$ — при основании
 (т.к. $\angle DPA = 180^\circ - 90^\circ - \alpha - (45^\circ + \alpha - \beta) = 90^\circ - \alpha - 45^\circ - \alpha + \beta =$
 $= 45^\circ - 2\alpha + \beta$ из $\triangle AQP$) и $\angle BPA = \angle PAB =$
 $= \angle DPA + 45^\circ = 90^\circ - 2\alpha + \beta \Rightarrow \angle QBA = 180^\circ - 2(90^\circ - 2\alpha + \beta) =$
 $= 4\alpha - 2\beta \Rightarrow$ т.к. $\angle BAC = 90^\circ = \angle BAQ + \angle QAP + \angle PAC =$
 $= \angle BAQ + 45^\circ + \alpha \Rightarrow \angle BAQ = 45^\circ - \alpha \Rightarrow$
 но т.о. выведем еще $\triangle ABQ$:
 $\angle AQP = \angle BAQ + \angle QBA \Rightarrow 45^\circ + \alpha = 45^\circ - \alpha + 4\alpha - 2\beta \Rightarrow$
 $2\alpha = 4\alpha - 2\beta \Rightarrow 2\alpha = 2\beta \Rightarrow \alpha = \beta \Rightarrow \angle QAP = 45^\circ$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

Черновик

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ xz = 3y + y^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A &= (x+z)^2 + (y+z)^2 + (z+z)^2 = \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + 6(x+y+z) + 27 = \\ &= xy + yz + zx + 3(x+y+z) + 27 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{cases} 2xy = 6z + 2z^2 \\ 2yz = 6x + 2x^2 \\ 2xz = 6y + 2y^2 \end{cases} &\Rightarrow 2(xy + yz + xz) = 6(x+y+z) + 2(x^2 + y^2 + z^2) = \\ &\Rightarrow A = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz) - 2(x^2 + y^2 + z^2) + 27 \end{aligned}$$

$$= -(x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx) + 27$$

$$x^2 + 3x - yz = 0$$

$$D = 9 + 4yz$$

$$x = \frac{-3 + \sqrt{9 + 4yz}}{2}$$

$$x = \frac{-3 - \sqrt{9 + 4yz}}{2}$$

$$\frac{9999 \dots 9}{40000}$$

$$x^2 + 3x - yz = 0 \Rightarrow x + 3 = \frac{yz}{x}$$

$$\frac{999 \dots 9}{2} \cdot \frac{3x+3}{2} = \frac{yz}{2}$$

Проверка!

$$\ominus \begin{cases} xy - yz = 3z + z^2 - 3x - x^2 \\ y(x-z) = 3(z-x) + (z-x)(z+x) \end{cases}$$

$$y(x-z) = 3(z-x) + (z-x)(z+x)$$

$$y(x-z)$$

$$\begin{cases} xy = 3x + x^2 \\ x^2 = 3y + y^2 \end{cases} \ominus x(y-x) = 3(x-y) + x^2 - y^2$$

$$xy = 3x + 3y + y^2$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$n = \frac{999 \dots 9}{40000}$$

$$n^3 =$$

$$\frac{10000}{9700}$$

$$n^3 = \frac{10000}{9700}$$

$$\frac{9999.999}{9999.999} \cdot \frac{9999.999}{9999.999}$$

$$n = \frac{99 \dots 9}{40000} = 10^{40000} - 1$$

$$n^3 = (10^{40000} - 1)^3 =$$

$$= 10^{120000} - 3 \cdot 10^{40000} (10^{40000} - 1) - 1 =$$

$$= 10^{120000} - 3 \cdot 10^{80000} + 3 \cdot 10^{40000} - 1$$

$$\begin{array}{r} 925 \overline{) 5} \\ \underline{5} \\ 425 \\ \underline{40} \\ 25 \end{array}$$