



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 15$, $BE = 10$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$ являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$ являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| + \left|y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leq 6$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle DBC = 35^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

Число из 25000 девятых можно представить в виде

$$n = 10^{25000} - 1 \quad \text{тогда}$$

$$n^3 = (10^{25000} - 1)^3 = 10^{75000} - 3 \cdot 10^{50000} + 3 \cdot 10^{25000} - 1.$$

$$10^{75000} + 3 \cdot 10^{25000} = \underbrace{10 \dots 030 \dots 0}_{49999} \quad \underbrace{25000}$$

Вспомогательное число. Ближайший меньший разряд 10^{25000} , где есть 3 единицы. $\Rightarrow$ из него будет заимствован десяток в след. разряд, из 10 будет заимствован десяток в след. разряд, и т.д. 90 единиц, где $10 - 1 = 9 \Rightarrow$ при вычитании еще 1 последние 25000 цифр станут девятками, первая останется.

$$10^{75000} + 3 \cdot 10^{25000} - 1 = \underbrace{10 \dots 029 \dots 9}_{49999} \quad \underbrace{25000}$$

При вычитании из полученного числа $3 \cdot 10^{50000}$ первые 50000 цифр не изменяются, т.е. из них вычитается 0, первая единица изменится (будет заимствован десяток) первые $75000 - 50000 - 1 = 24999$ цифр ~~так~~ станут девятками (из каждого десятика будет вычитаться один десяток в след. разряд), 25000-я цифра будет $10 - 3 = 7$. Итого,

$$n^3 = \underbrace{9 \dots 970 \dots 029 \dots 9}_{24999} \quad \underbrace{24999} \quad \underbrace{25000}, \quad \text{в этом числе}$$

$$24999 + 25000 = 49999 \text{ девятых.}$$

Ответ: 49999 девятых.

Orbitem: $\delta F = \frac{100}{9}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1/4

Обозначим вероятность выигрыша в начале P_1 и в конце — P_2 . Пусть имеется n коробок, тогда:

Всего исходов в первом слуге. $C_n^5 = \frac{n!}{5! \cdot (n-5)!}$

Положительных исходов (3 коробки выбраны единств. образом, остальные 2 из $n-3$) в 1 слуге:

$$C_{n-3}^2 = \frac{(n-3)!}{2! \cdot (n-5)!}$$

Итого:

$$P_1 = \frac{C_n^5 \cdot C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{\frac{(n-3)!}{2! \cdot (n-5)!}}{\frac{n!}{5! \cdot (n-5)!}} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (n-3)!}{n!}$$

Всего исходов во втором слуге. $C_n^8 = \frac{n!}{8! \cdot (n-8)!}$

Положительных исходов (оположн. 3 коробки единств. образом, ост. 5 — из $n-3$) во 2-м слуге:

$$C_{n-3}^5 = \frac{(n-3)!}{5! \cdot (n-8)!}$$

Итого:

$$P_2 = \frac{C_{n-3}^5}{C_n^8} = \frac{\frac{(n-3)!}{5! \cdot (n-8)!}}{\frac{n!}{8! \cdot (n-8)!}} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot (n-3)!}{n!}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot (n-3)!}{8! \cdot (n-8)!}}{\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (n-3)!}{n!}} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3} = 5,6$$

Ответ: в 5,6 раз.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решение первой задачи

Допустим, арифм. прогрессия, членами которой являются корни уравнений — $b_1, b_2, \dots, b_n$, её разность d , n — номер члена прогрессии, тогда
 корни первого ур-я — $b_4 = b_1 + d(4-1) = b_1 + 3d$ и $b_5 = b_1 + d(5-1) = b_1 + 4d$
 корни второго ур-я: $b_2 = b_1 + d(2-1) = b_1 + d$ и $b_7 = b_1 + d(7-1) = b_1 + 6d$
 но $b_4 + 3d + b_1 + 4d = b_4 + b_5 = b_1 + 3d + b_1 + 4d = 2b_1 + 7d = b_1 + d + b_1 + 6d = b_2 + b_7$.
 Пусть корни 1-го ур-я — $x_1 = b_4$ и $x_2 = b_5$, 2-го ур-я — $x_3 = b_2$ и $x_4 = b_7$, тогда

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4$$

По теореме Виета:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-(-(\alpha^2 - \alpha))}{1} = \alpha^2 - \alpha \\ x_3 + x_4 &= \frac{-(-(\alpha^3 - \alpha^2))}{2} = \frac{\alpha^3 - \alpha^2}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - \alpha = \frac{\alpha^3 - \alpha^2}{2}$$

$$2\alpha^2 - 2\alpha = \alpha^3 - \alpha^2$$

$$\alpha^3 - 3\alpha^2 + 2\alpha = 0$$

$$\alpha(\alpha^2 - 3\alpha + 2) = 0$$

$$\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \text{ или } \alpha = 1 \text{ или } \alpha = 2$$

Проверим эти значения α , подставив в ур-я

При $\alpha = 0$:

$$1\text{-е ур-е: } x^2 + \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 = -\frac{2}{3} - \text{ур-е корней не имеет} \Rightarrow \alpha \neq 0$$

При $\alpha = 1$:

$$1\text{-е ур-е: } x^2 + \frac{1}{3} = 0$$

$$x^2 = -\frac{1}{3} - \text{ур-е корней не имеет} \Rightarrow \alpha \neq 1$$

При $\alpha = 2$:

$$1\text{-е ур-е: } x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 - \sqrt{3}, x_2 = 1 + \sqrt{3}$$

$$2\text{-е ур-е: } \left. \begin{aligned} 2x^2 - 4x - 14 = 0 \\ x^2 - 2x - 7 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_3 = 1 - 5\sqrt{3}, x_4 = 1 + 5\sqrt{3} \Rightarrow \text{это}$$

ища даёт, явл. необходимыми членами арифм. прогр. $\Rightarrow \alpha = 2$

Ответ: $\alpha = 2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 6

Переберём все возможные комбинации раскрытия модулей:

1) При $y \leq 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}$ и $y \leq 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}$:

$$-y + 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} - y + 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \leq 6$$

$$-2y + 30 \leq 6$$

$$y - 15 \geq -3$$

$$y \geq 12$$

2) При $y \leq 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}$ и $y \geq 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}$:

$$-y + 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} + y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \leq 6$$

$$-\frac{2x}{6\sqrt{3}} \leq 6 \Rightarrow \frac{x}{3\sqrt{3}} \geq -3 \Rightarrow x \geq -18\sqrt{3}$$

3) При $y \geq 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}$ и $y \leq 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}$:

$$y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} - y + 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \leq 6$$

$$\frac{x}{3\sqrt{3}} \leq 6 \Rightarrow x \leq 18\sqrt{3}$$

4) При $y \geq 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}$ и $y \geq 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}$:

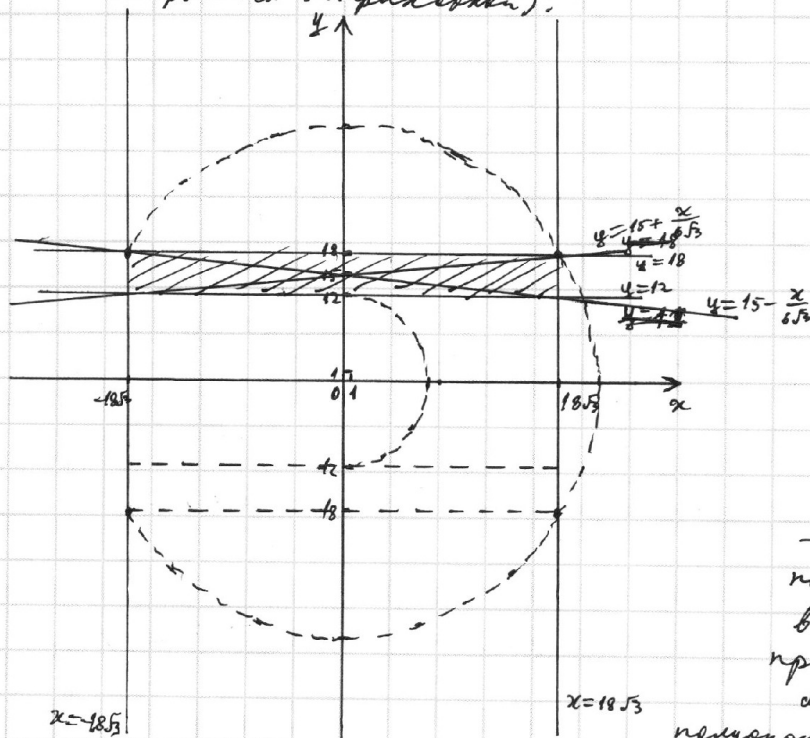
$$y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} + y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \leq 6$$

$$2y - 30 \leq 6$$

$$y - 15 \leq 3$$

$$y \leq 18$$

Итак, область фигуры Φ на координатной плоскости (сплошными линиями обозначены границы, её ограничивающие, и сама область фигуры заштрихована):



Фигура Φ — прямоугольник, ограниченный границами $y=12$, $y=18$, $x=18\sqrt{3}$ и $x=-18\sqrt{3}$ с вершинами в точках $(-18\sqrt{3}; 18)$, $(18\sqrt{3}; 18)$, $(18\sqrt{3}; 12)$ и $(-18\sqrt{3}; 12)$. Кроме того, по окружности на π от начала координат, которая описана вокруг полуокружности с центром в $(0; 0) \Rightarrow$ замечательная при проверке область будет ограничена точкой полуокружностью с минимальными

и максимальными радиусами, а также точ. и концы полуокружностей. Фигуры Φ . Минимальная и макс. координ. точек фигуры — $(0; 12)$, она описана полуокр. с мин. радиусом 12. Наиболее удален от нач. координ. точки $(-18\sqrt{3}; 18)$ и $(18\sqrt{3}; 18)$. Минимальная полуокруж. — это радиус $\sqrt{18^2 + 18^2} = \sqrt{18^2 \cdot 2} = 18 \cdot \sqrt{2} = 25.45$ км/ч.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Нарисуем эти окружности, а также конечное множество фигур. Для простоты построений воспользуемся тем, что повернем на π отн. почти равносторонний треугольник отн. этой линии. На рисунке пунктиром обозначим радиальные полуокр. и конеч. часть фигур.

Площадь множества M — площадь большого ~~внутреннего~~ ^{внешнего} круга за вычетом сегмента, «отрезанного» прямой $x = -18\sqrt{3}$, радиусы — линия с вершинами $(-18\sqrt{3}; 12)$, $(0; 12)$, $(0; -12)$ и $(-18\sqrt{3}; -12)$ и ~~маленького~~ ^{внешнего} полуокружности.

~~Итак площадь R -радиуса большого круга, r -радиуса $R=36$, $r=12$)~~

$$S_{\pi} = \pi R^2 =$$

Пусть $\angle$ — угол между норм. из начала коорд. на точки $(-18\sqrt{3}; -18)$ и $(-18\sqrt{3}; 18)$, тогда площадь «отрезанной» сегмента $S_x = \frac{\angle}{2\pi} \cdot \pi R^2 = 2 \cdot \frac{18 \cdot 18\sqrt{3}}{2} = \frac{\angle R^2}{2} = 18 \cdot 18\sqrt{3}$, где $R=36$ — радиус большого круга.

$$\tan \frac{\angle}{2} = \frac{12}{18\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$\tan\left(\frac{\angle}{2}\right) = \frac{18}{18\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\angle}{2} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \angle = \frac{\pi}{3}$$

Искомая площадь ($r=12$ — радиус внешнего полуокружности)

$$\begin{aligned} S_M &= \pi R^2 - \frac{\angle R^2}{2} + 18^2\sqrt{3} - 2 \cdot 12 \cdot 18\sqrt{3} - \frac{\pi r^2}{2} = \\ &= \pi R^2 - \frac{\pi R^2}{6} + 18 \cdot 18\sqrt{3} - 24 \cdot 18\sqrt{3} - \frac{\pi r^2}{2} = \frac{5\pi R^2}{6} - 6 \cdot 18\sqrt{3} - \frac{\pi r^2}{2} = \\ &= \frac{5\pi}{6} \cdot 36^2 - 108\sqrt{3} - \frac{\pi \cdot 12^2}{2} = \frac{5\pi}{6} \cdot 216 - 108\sqrt{3} - 72\pi = \\ &= 1080\pi - 108\sqrt{3} - 72\pi = 1008\pi - 108\sqrt{3} \end{aligned}$$

Ответ: $1008\pi - 108\sqrt{3}$

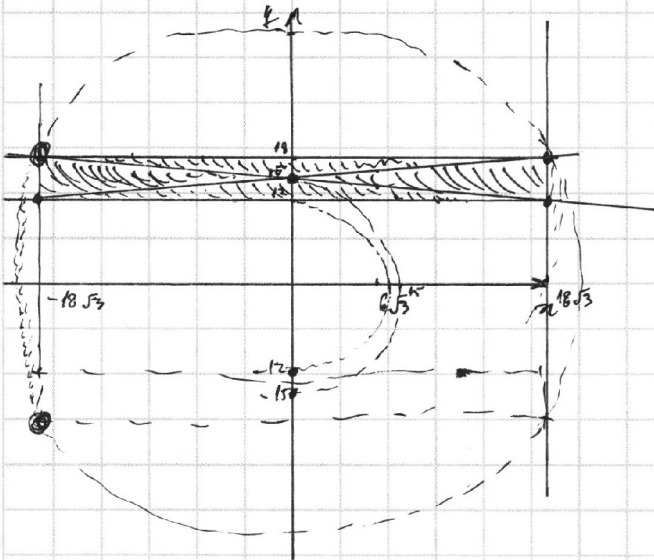


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3} = 1,7 \dots$$

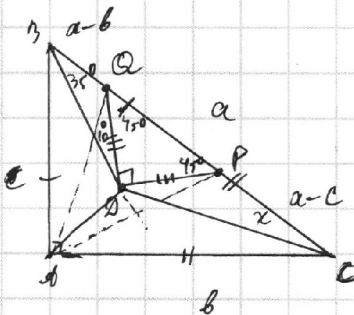
$$1,7 \cdot 18 = 28,9 + 1,7 = 30,6$$

$$6\sqrt{3}$$

$$1,7 \cdot 6 = 6 + 4,2 = 10,2$$

$$\sqrt{18^2 \cdot 3 + 18^2} = \sqrt{18^2 \cdot 2^2} = 18 \cdot 2 = 36$$

$$\frac{14}{2} = 0,7$$



$$\sqrt{\frac{p^2+q^2}{2}} \geq \frac{p+q}{2}$$

$$\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{\sqrt{2}} \geq \frac{p+q}{2}$$

$$\frac{c}{\sqrt{2}} \geq \frac{a+b}{2}$$

$$a+b \leq \sqrt{2}c$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

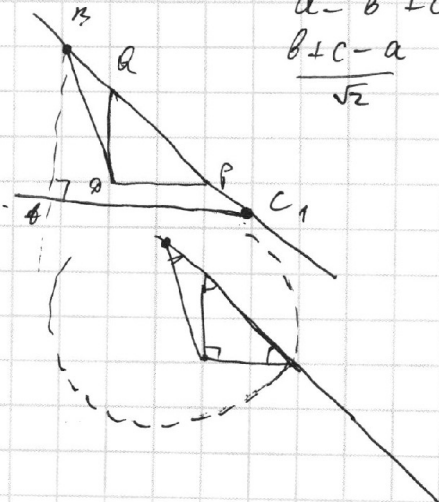
$$\frac{b+c-a}{\sqrt{2}}$$

$$x \rightarrow \frac{b+c-a}{\sqrt{2}}$$

$$x \rightarrow \frac{b}{\sqrt{2}}$$

$$x \rightarrow \frac{b+c-a}{\sqrt{2}}$$

$$135^\circ - x \rightarrow$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

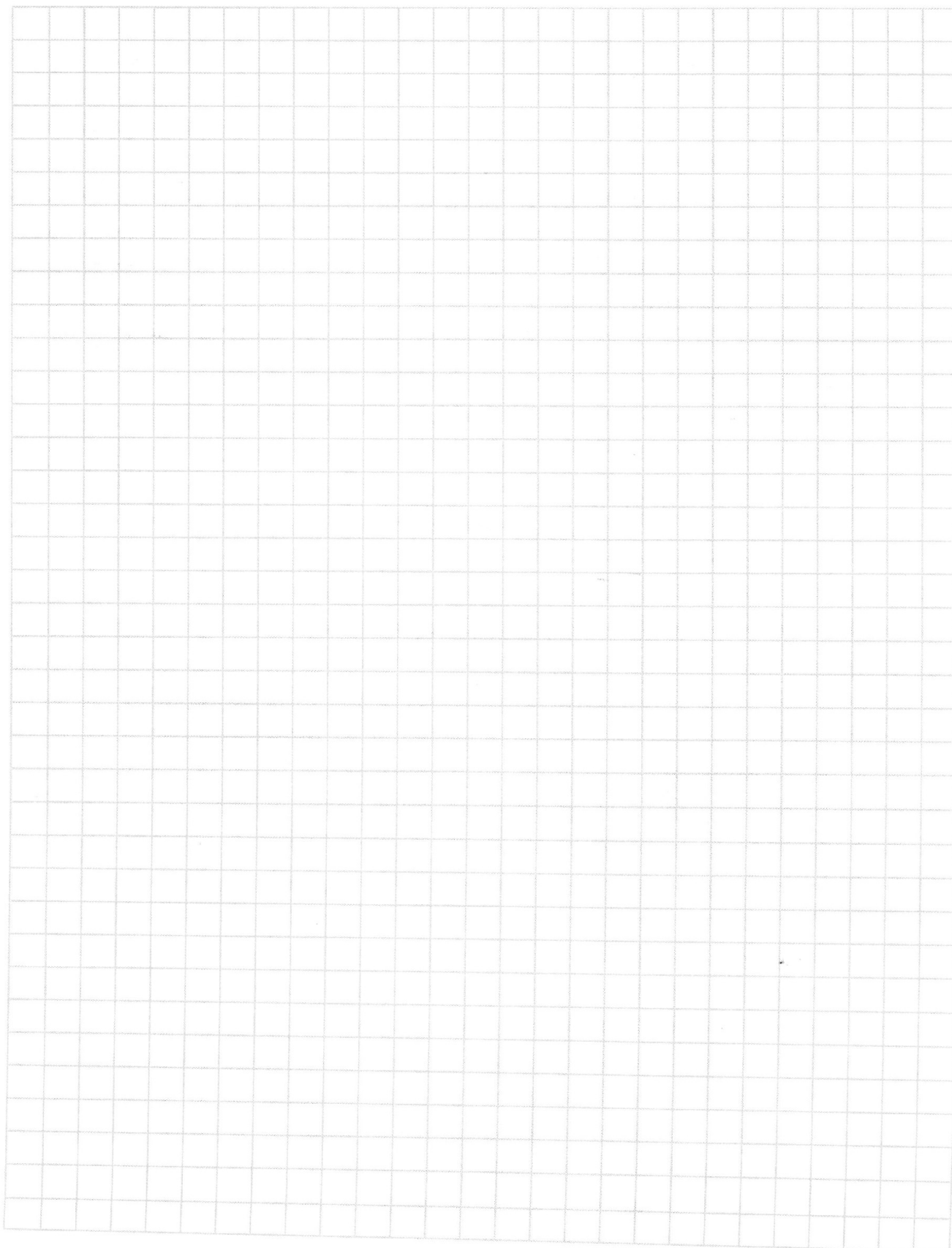
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

n коробок

$$C_n^5 = \frac{n!}{5!(n-5)!}$$

$$C_{n-3}^2 = \frac{(n-3)!}{2!(n-5)!}$$

$$P_1 = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} =$$

$$y = 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}$$

$$y = 12$$

$$y = 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}$$

$$x = 18\sqrt{3}$$

$$y = 18$$

$$1) y \leq 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}, y \leq 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}$$

$$-2y + 30 \leq 6$$

$$-y + 15 \leq 3$$

$$-y \leq -12$$

$$y \geq 12$$

$$2) y \leq 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}, y \geq 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}$$

$$-\frac{x}{3\sqrt{3}} \leq 6$$

$$\frac{x}{3\sqrt{3}} \geq -6$$

$$x \geq -18\sqrt{3}$$

$$3) \geq \leq$$

$$\frac{x}{3\sqrt{3}} \leq 6$$

$$x \leq 18\sqrt{3}$$

$$4) \geq \geq$$

$$y - 15 \leq 3$$

$$y \leq 18$$

$$x^2 - (\alpha^2 - \alpha)x + \frac{2 - \alpha^3}{3} = 0$$

$$2x^2 - (\alpha^2 - \alpha^2)x - 2\alpha^6 - 8\alpha - 4 = 0$$

$$x^2 - \alpha(\alpha - 1)x + \frac{2 - \alpha^3}{3} = 0$$

$$2x^2 - \alpha^2(\alpha - 1)x - 2\alpha^6 - 8\alpha - 4 = 0$$

$$D = \alpha^2(\alpha - 1)^2 - \frac{4}{3}(2 - \alpha^3) = \alpha^4 - 2\alpha^3 + \alpha^2 - \frac{8}{3} + \frac{4}{3}\alpha^3 = \alpha^4 - \frac{2}{3}\alpha^3 + \alpha^2 - \frac{8}{3}$$

$$x_1 + x_2 - (x_3 + x_4) = 0$$

$$b_1 + 3d + b_1 + 4d - b_1 - d - b_1 - 6d = 0$$

$$-(\alpha^2 - \alpha) \alpha^2 - \frac{\alpha^3 \alpha^2}{2} = 0$$

$$1) \alpha = 0:$$

$$x^2 + \frac{2}{3} = 0$$

$$x^2 = -\frac{2}{3} \times$$

$$2) \alpha = 1:$$

$$x^2 + \frac{1}{3} = 0$$

$$x^2 = -\frac{1}{3} \times$$

$$3) \alpha = 2:$$

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$2x^2 - 4x - 148$$

$$2\alpha^2 - 2\alpha - \alpha^3 + \alpha^2 = 0$$

$$-\alpha^3 + 3\alpha^2 - 2\alpha = 0$$

$$-\alpha(\alpha^2 - 3\alpha + 2) = 0$$

$$\alpha(\alpha^2 - 3\alpha + 2) = 0$$

$$\alpha = 0$$

$$\alpha = 1$$

$$\alpha = 2$$

$$D = 4 + 8 = 12$$

$$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3} \Rightarrow d = 2\sqrt{3}$$

$$D = 16 + 1184 = 1200$$

$$x = \frac{4 \pm 20\sqrt{3}}{4} = 1 \pm 5\sqrt{3}$$