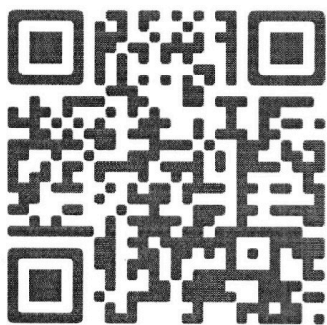




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шару. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leq 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
4 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 1

$[x \neq 0; y \neq 0; z \neq 0]$

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases}$$

$$x = \frac{3z + z^2}{y} = \frac{3y + y^2}{z}$$

$$3z^2 + z^3 = 3y^2 + y^3$$

$$\begin{cases} z + 3 = \frac{xy}{z} \\ y + 3 = \frac{xz}{y} \\ x + 3 = \frac{yz}{x} \end{cases}$$

$$(y - z)(y^2 + yz + z^2) + 3(y - z)(y + z) = 0$$

$$y = z \text{ или } y^2 + yz + z^2 + 3y + 3z = 0 \quad (*)$$

$$\begin{cases} (z + 3)^2 = \frac{x^2 y^2}{z^2} \\ (y + 3)^2 = \frac{x^2 z^2}{y^2} \\ (x + 3)^2 = \frac{y^2 z^2}{x^2} \end{cases}$$

Заметим, что все 3 числа не могут

быть полностью равны, ведь тогда $z^2 = 3z + z^2$

$z = 0$, что
быть не может

Если $x = y$:

$$\begin{cases} y^2 = 3z + z^2 \\ yz = 3y + y^2 \\ z = \frac{3y + y^2}{y} = 3 + y \Leftrightarrow y = z - 3 \end{cases}$$

$$y^2 = 3(3 + y) + (3 + y)^2$$

$$y^2 - 6y + 9 = 3z + z^2$$

$$9z = 9$$

$$z = 1; y = -2; x = -2$$

$$(x + 3)^2 + (y + 3)^2 + (z + 3)^2 = 1 + 1 + 4^2 = 18. \text{ В силу}$$

симметрии ~~любая~~ есть найдется пара равных чисел, то искомого выражения всегда будет 18.

Растеишем уравнение со звёздочкой: (*)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
5 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} y^2 + yz + z^2 + 3y + 3z = 0 \\ 2(y^2 + yx + x^2 + 3y + 3x) = 0 \end{cases}$$

← это верно в силу симметрии

$$z^2 - x^2 + 3(z - x) + y(z - x) = 0$$

$$(z - x)(z + x + 3 + y) = 0$$

$$z = x$$

(верно)

т.е. мы

имеем корни,

которые мы найдем

различиями x, y, z

$$x + y + z = -3$$

$$x + 3 = -y - z$$

$$y + 3 = -x - z$$

$$z + 3 = -x - y$$

$$+ \begin{cases} y^2 + yz + z^2 + 3y + 3z = 0 \\ y^2 + yx + x^2 + 3y + 3x = 0 \\ x^2 + xz + z^2 + 3x + 3z = 0 \end{cases}$$

$$2(x^2 + y^2 + z^2) + xy + yz + xz + 3(x + y + z) = 0$$

$$2(x^2 + y^2 + z^2) + xy + yz + xz = 18$$

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 9$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz = \frac{18 + 9}{3} = 9$$

$$(x + 3)^2 + (y + 3)^2 + (z + 3)^2 = x^2 + y^2 + 2xy + x^2 + z^2 + 2xz + y^2 + z^2 + 2yz =$$

$$= 2(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz) = 2 \cdot 9 = 18$$

Значит данное выражение всегда равно 18

Ответ: 18

Т.к. $\angle ADB$ опир. на диаметр, то $\angle ADB = 90^\circ$ и $\angle ADC = 180^\circ - \angle ADB = 90^\circ$
 $AF^2 = AF \cdot FC$ в прямиуг. $\triangle AFC$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N4

Пусть изначально x коробок, $x > 6$

кол-во способов выбрать 5 коробок из x — это $C_x^5 = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}$. Пусть человек выбрал эти 5

нужные коробки, тогда посчитаем кол-во способов выбрать 2 оставшиеся $C_{x-3}^2 = \frac{(x-3)(x-4)}{2 \cdot 1}$

Тогда это и будет кол-вом способов выбрать так 5 коробок, чтобы в них оказалось 3 нужных.

Вероятность выбрать будет равна $\frac{(x-3)(x-4) \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$
 $= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{x(x-1)(x-2)}$ — вероятность выбрать 30.

Аналогично рассматриваем вероятность выбрать

после. $\frac{C_{x-3}^3}{C_x^6} = \frac{(x-3)(x-4)(x-5) \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{x(x-1)(x-2)}$

$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{x(x-1)(x-2)} - 100\%$

$$y = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 100 \cdot x(x-1)(x-2)}{x(x-1)(x-2) \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = 200\%$$

$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{x(x-1)(x-2)} - 4\%$

Значит ~~вероятность~~ вероятность увеличилась в 2 раза.

Ответ: 2



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$N6 \quad \left| x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| + \left| x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| \leq 3$$

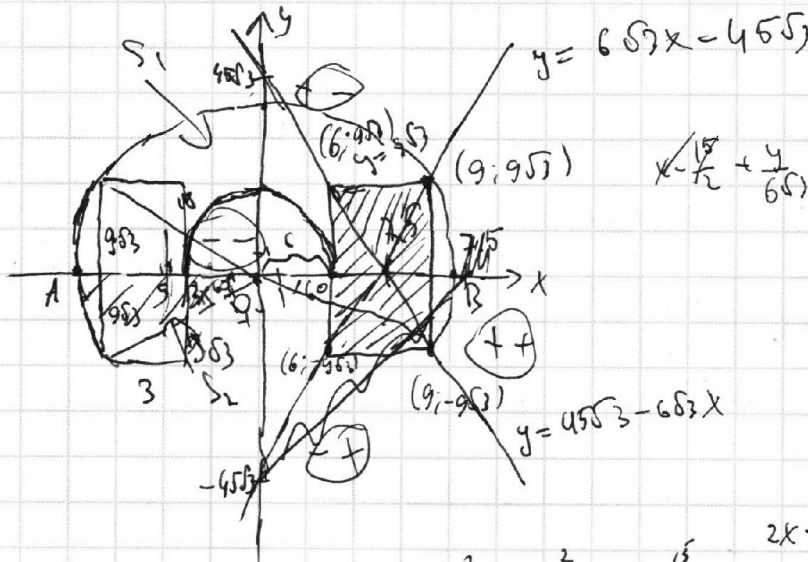
$$x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \geq 0$$

$$y \geq 15\sqrt{3} - 6\sqrt{3}x$$

$$= 45\sqrt{3} - 6\sqrt{3}x \quad \text{Если}$$

$$9x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} = 0 \quad | \cdot 6\sqrt{3}$$

$$y = 6\sqrt{3}x - 45\sqrt{3}$$



$$x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} - x + \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \leq 3$$

$$= \frac{2y}{3\sqrt{3}}$$

$$\frac{2y}{3\sqrt{3}} \geq 3$$

$$y \leq 9\sqrt{3}$$

$$2x - 15 \leq 3$$

$$2x \leq 18$$

$$x \leq 9$$

$$\frac{2}{3} \sqrt{3} = \frac{2}{3} \sqrt{3} x - \frac{15}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{(9\sqrt{3})^2 + 9^2} = \sqrt{9^2 + 9^2} = 9\sqrt{2} = 18 \quad 18 = 24$$

$$x = 9$$

$$-2x + 15 \leq 3$$

$$x \geq 6$$

$$S_1 = 18^2 \pi - 6^2 \pi = 6^2 \pi (3^2 - 1) = 8 \cdot 6^2 \pi$$

$$\frac{9\sqrt{3}}{5} = \sqrt{3} = \tan 60^\circ$$

$$S_2 = \frac{1}{3} \cdot 18^2 \pi$$

$$\text{Ответ: } 8 \cdot 6^2 \pi + \frac{1}{3} 18^2 \pi - 27\sqrt{3}$$

$$S_{\text{max}} = 8 \cdot 6^2 \pi + \frac{1}{3} \cdot 18^2 \pi + 3 \cdot 3\sqrt{3} - 6 \cdot 6\sqrt{3}$$

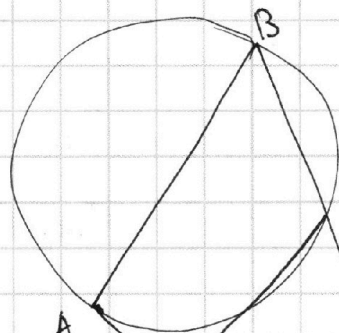
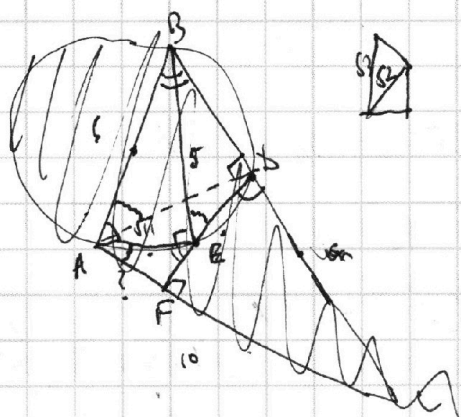


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



2-1

8-0

$(22)^3 =$

$= \frac{22}{22} 121 \cdot 4 = 484$

$\frac{484}{22} = \frac{968}{22} = 44$

$$x = \frac{15}{2} + \frac{4}{65} \approx 7.5$$

$$65x - 4553 \approx 70$$

$$y > 4553 - 65$$

$$\frac{511}{5} = \frac{AR}{x} \Rightarrow AF = \frac{AR \cdot x}{5}$$

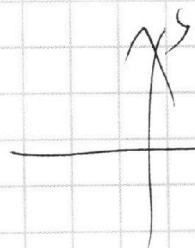
$$\frac{11}{25} x^2 = x \cdot (10 - x)$$

$$\frac{11}{25} x^2 = 10x - x^2 \cdot 1.5$$

2 2 2 2 2
2 2 2 2 2
4 4 4 4 4
4 4 4 4 4

4 4 4 4 4 4 4 4

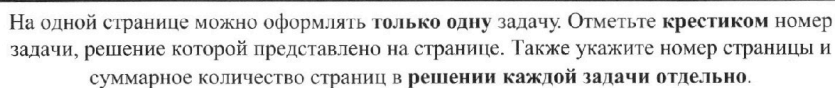
$$C_{x-3}^3 = \frac{(x-3)(x-4)(x-5) \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{5!} \quad C_x^5 - \text{кол-во способов выбора}$$
$$C_x^6 = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{6!} \quad 5 \text{ пер.}$$



$$C_{x-3}^2 = \frac{x \cdot (x-1)}{2} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{(x-2)(x-3)(x-4)}$$

$$\frac{(x-3)(x-4) \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}$$

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{x(x-1)(x-2)}$$



СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$P = a^4 + a^2 - 2a^3 - 4a + 20$$

x
 $x_1 + x_2 = 1$

20 = $x \cdot 2 \cdot (20 - x)$

$10x^2 - 40x + 40 = 0$

$x_1 = 4$

$x_2 = 1$

4 9 1 3 9

2 2 2 2

7 2 5 3 5 6 8

9 8 5 6 8

9 8 5 6 8

10 9 9 20 7 8

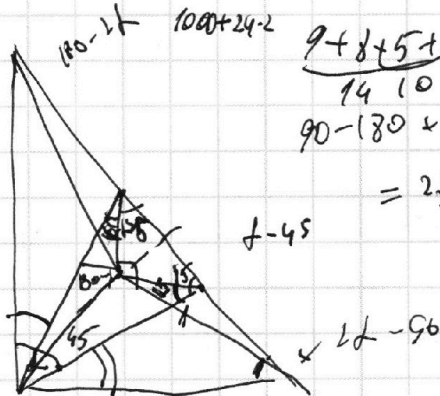
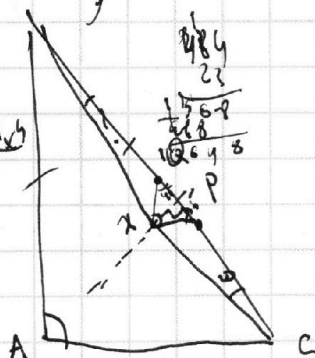
$$(x+z)^2 = \left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \frac{x^2 y^2}{z^2} + \frac{x^2 z^2}{y^2}$$

$$\begin{array}{r} 121 \\ - 22 \\ \hline 84 \end{array}$$

$$2x - x^2$$

$$40x - 2x^2 = 20$$
$$x^2 - 20x + 10 = 0$$

$$\frac{y^4 z^4 + x^4 z^4 + y^4 x^4}{x^2 y^2 z^2}$$



$$\begin{array}{r} 9+8+5+1 \\ \hline 14 \quad 10 \end{array}$$
$$90 - 180 \div 2 =$$
$$= 27 - 90$$

$$\begin{array}{r} -222 \\ 222 \\ \hline +1444 \\ +444 \\ \hline 444 \\ \hline 49284 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111111 \\ + 111111 \\ \hline 211111 \\ 111111 \end{array}$$

$$180 - 22 + 90 = \frac{270}{2} \text{ Jf}$$

$$45 + 45 - 95 = 2 \quad 135 - 2$$

$$2-45+50-2 = 45$$

$$15 + 45 = 2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3(x+y+z) = xy + yz + zx + x^2 - x^2$$

$$y(x+z) + x(z+x) - x^2$$

$$-(x+z)(y+x) = z^2 + \dots$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2 \cdot 3(x + y + z)$$

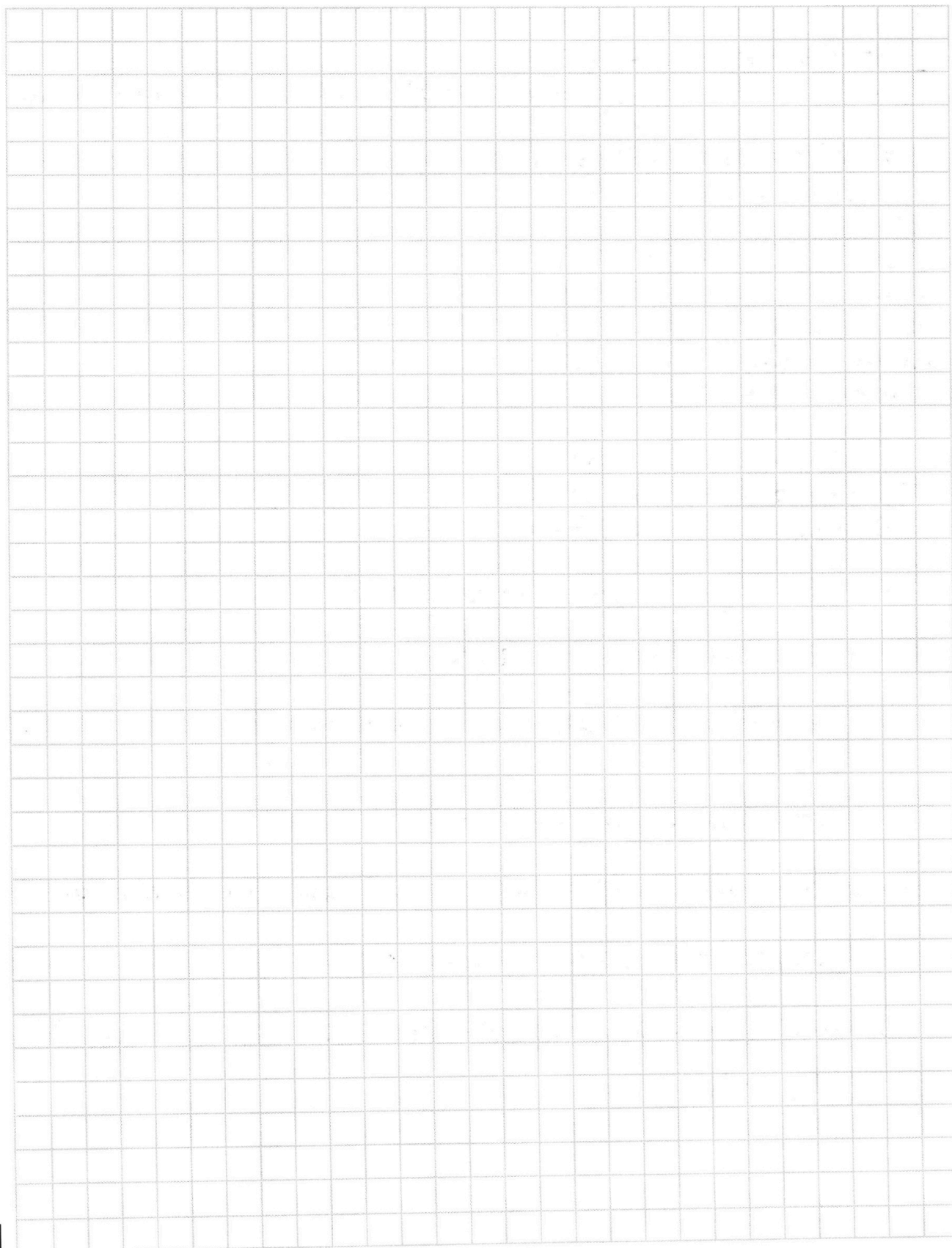


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

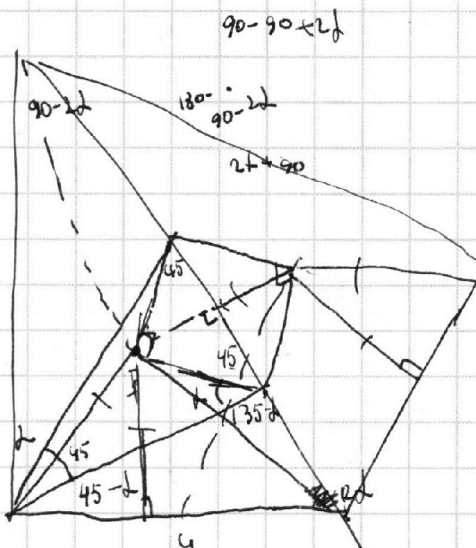
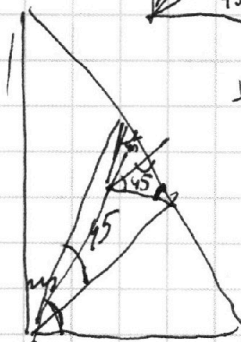
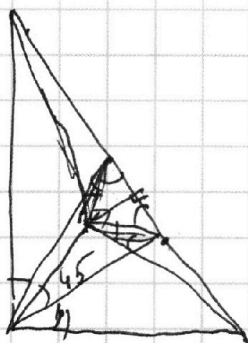
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$z(3+z) = xy \Rightarrow z+z = \frac{xy}{z}$$

$$\left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{xy}{z}\right)^2 +$$

$$x^2 \left(\frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{y^2} \right) + \frac{y^2 z^2}{x^2}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} \geq 2$$



$$180 - 45 + 45 = 180$$

$$90 - 45 = 45$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} - x - y$$

$$z(3+z) = xy \Rightarrow \frac{xy}{z}$$

$$x^3 + 3x^2 = y^3 + 3y^2$$

$$\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\frac{ab}{c} \cdot \frac{bc}{a} \cdot \frac{ca}{b} = abc$$

$$x > y$$

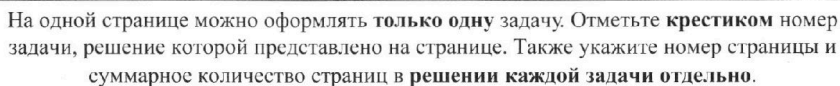
или

$$z = \frac{3x + x^2}{y} = \frac{3y + y^2}{x}$$

$$x^3 + 3x^2 = y^3 + 3y^2$$

$$x^3 - y^3 + 3x^2 - 3y^2 = 0$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) + 3(x-y)(x+y) = 0$$



7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!**

$$y^2 + yz + z^2 - (x+y)(y+z) =$$

$$y(y+z) + z(z+y)$$

$$y + z^2 - yz$$

$$L=y \quad \text{und} \quad D = y^2 + 6y + 9 - 4 \cdot (y^2 + 3y) = y^2 + 6y + 9 - 4y^2 - 12y = -3y^2 - 6y + 9$$

$$x(x+b) = yz$$

x-15

$$y^2 + z^2 + 2yz$$

$$\frac{-y-3 \pm \sqrt{-3(y-1)(y+3)}}{2} = 0$$

$$\begin{aligned} & -3(y^2 + 2y - 3) \\ & y^2 + 3y - y - 3 = \\ & = y(y+3) - (y+3) \\ & = (y-1)(y+3) \end{aligned}$$

$$x + 3 = y + z$$

$$(y+2)^2 = -3(y+1)(y+3)$$

$$k - \frac{15}{2} + \dots$$

$$y(x-z) = 2(z+3) - 2(x+3)$$

$$x + 3 = -4 - 7$$

$x=2$

$$\begin{cases} 2y = 3z + 7 \\ 10 = yz \\ y = \frac{10}{z} \end{cases}$$

2222 ~~11~~ 2³. 1111³ =

$$\frac{20}{2} = 10 \text{ Hz}$$

$$(x+y+z)^2 =$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$$

1 1 1 1 1 1 1 1
 1 1 1 1 1 1 1 1

 1 1 1 1 1 1 1 1
 1 1 1 1 1 1 1 1
 1 8 7 6 5 4 3 2 1

$$\begin{array}{r} 111 \\ -111 \\ \hline 111 \\ 111 \\ 111 \\ 111 \\ +2221 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 = 121 - 11 \\ \quad 11 \\ \hline \quad 121 \\ + 121 \\ \hline 121 \\ \hline 12331 \end{array}$$

$$(y^2 + yz + z^2 + 3y + 3z) = 0$$

$$(x^2 + xy + y^2 + 3x + 3y) = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$x^2 - z^2 + 3x - 3z + xy - yz$$

$$(x+z)(x-z) + 3(x-z) + y(x-z) = (x-z)(x+z+3+y) = 0$$

11111111
1111

1 2 3 4 5

098 → 65, 34