



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

## 10 КЛАСС. Вариант 7



- 1) [4 балла] Ненулевые числа  $x, y, z$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения  $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$ , если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

- 2) [2 балла] Десятичная запись натурального числа  $n$  состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа  $n^3$ ?
- 3) [5 баллов] Окружность  $\omega$  с диаметром  $AB$  пересекает сторону  $BC$  остроугольного треугольника  $ABC$  в точке  $D$ . Точка  $F$  выбрана на отрезке  $AC$  так, что  $DF \perp AC$ , а  $E$  — точка пересечения отрезка  $DF$  с окружностью  $\omega$ , отличная от  $D$ . Найдите  $AF$ , если  $AC = 20$ ,  $AB = 15$ ,  $BE = 10$ .
- 4) [4 балла] В телегаме ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарику. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
- 5) [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых корни уравнения  $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$  являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения  $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$  являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.
- 6) [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура  $\Phi$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют неравенству  $\left|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| + \left|y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leqslant 6$ . Фигуру  $\Phi$  непрерывно повернули вокруг начала координат на угол  $\pi$  по часовой стрелке. Найдите площадь множества  $M$ , которое замела фигура  $\Phi$  при этом повороте.
- 7) [6 баллов] На гипotenузе  $BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  выбраны точки  $P$  и  $Q$  так, что  $AB = BP$ ,  $AC = CQ$ . Внутри треугольника  $ABC$  выбрана точка  $D$ , для которой  $DP = DQ$ , а  $\angle PDQ = 90^\circ$ . Найдите  $\angle DCB$ , если известно, что  $\angle DBC = 35^\circ$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = yz + z^2 \quad (1) \\ yz = yx + x^2 \quad (2) \\ zx = yy + y^2 \quad (3) \end{cases} \quad x, y, z \neq 0$$

$$yz = yx + x^2 \quad (2)$$

$$zx = yy + y^2 \quad (3)$$

$$(1) \cdot (2) \cdot (3) : xy \cdot yz \cdot zx = (yz + z^2)(yx + x^2)(yy + y^2)$$

$$(xyz)^2 = xy \cdot z(x+y)(y+z)(z+y)$$

~~$$xyz = (x+y)(y+z)(z+y)$$~~

$$xy/2 = xy/2 + 4xy + 4yz + 4zx + 16x + 16y + 16z + 64$$

$$9(xy + yz + zx + yx + yy + zz + 16) = 0$$

$$xy + yz + zx + yx + yy + zz + 16 = 0 \quad (4)$$

$$(1)+(2)+3: xy + yz + zx = yx + yy + zz + x^2 + y^2 + z^2 \quad (5)$$

$$(4)+(5): xy + yz + zx = xy + yz + zx + 8x + 8y + 8z + x^2 + y^2 + z^2 + 16$$

$$x^2 + 8x + 16 + y^2 + 8y + 16 + z^2 + 8z + 16 - 32 = 0$$

$$(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = 32$$

Ответ: 32

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$n = \underbrace{999\dots99}_{25,000} = \underbrace{100\dots00}_2 - 1 = 10^{25,000} - 1$$

Требуется найти кол-во цифр в десятичной записи числа

$$\text{числа } n^3 = (10^{25,000} - 1)^3 = 10^{75,000} - 3 \cdot 10^{50,000} + 3 \cdot 10^{25,000} - 1$$

$$\text{рассмотрим число } a = 10^{75,000} - 3 \cdot 10^{50,000} + 3 \cdot 10^{25,000} = n^3 + 1$$

$$a = 10^{25,000} (10^{50,000} - 3 \cdot 10^{25,000} + 3) \Rightarrow \text{т.е. } a : 10^{25,000} \Rightarrow \text{последние}$$

25,000 цифр десятичной записи а - нули. А оставшиеся

$$\text{оставшиеся цифры образуют число } b = \frac{a}{10^{25,000}} = 10^{50,000} - 3 \cdot 10^{25,000} + 3$$

$$\text{рассмотрим число } c = b - 3 = 10^{50,000} - 3 \cdot 10^{25,000} = 10^{25,000} (10^{25,000} - 3)$$

$$c : 10^{25,000} \Rightarrow \text{последние 25,000 цифр числа с это нули.}$$

$$\text{А оставшиеся цифры образуют число } 10^{25,000} - 3 = \underbrace{10\dots00}_{25,000} - 3 =$$

$$= \underbrace{999\dots99}_2 7$$

$$\text{Значит } c = \underbrace{99\dots99}_2 \underbrace{700\dots00}_{25,000} \Rightarrow b = c + 3 = \underbrace{99\dots99}_2 \underbrace{700\dots00}_3 3$$

$$\Leftrightarrow a = 10^{25,000} \cdot b = \underbrace{99\dots99}_2 \underbrace{700\dots00}_3 \underbrace{300\dots00}_{25,000} \Rightarrow n^3 = a - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{99\dots99}_2 \underbrace{700\dots00}_3 \underbrace{300\dots00}_{25,000} \quad \text{Все цифры в записи}$$

из 24999 купеи, одни единицы, остальные сороки и  $24999 + 25000 = 49999$  ку-

пеи

Ответ: 49999

\* обозначение:  $x : y$  значит что  $x, y \in \mathbb{N}$ ,  $x$  делится без остатка на  $y$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.



1

2

3

4

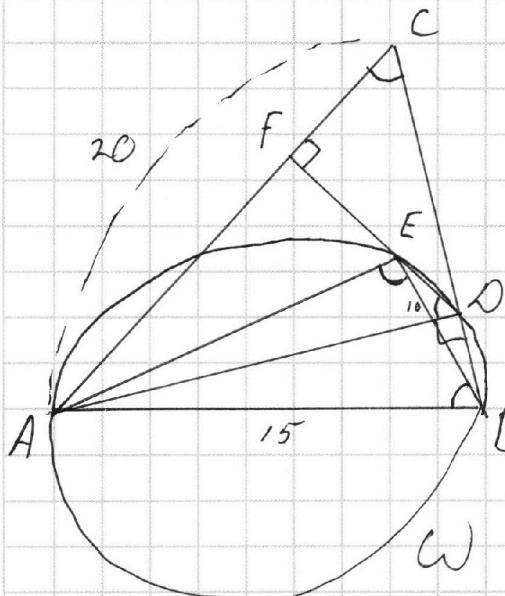
5

6

7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой** из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



1)  $AEDB$  - впис. кв. умнож.

2) Из угла впис.  $\angle AEB = \angle ADB = 10^\circ$  как опирающиеся на дугу  $AB$  и  $\angle AEB = \angle AAB = 90^\circ$ , поскольку  $AB$ -диаметр  $\omega$

3) Значит,  $\triangle ABE$  - прямой ( $\angle AEB = 90^\circ$ )

$$4) \Rightarrow \cos(\angle ABE) = \frac{BE}{BA} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

5) Впис. углы  $\angle ABE$  и  $\angle ADE$  опир. на дугу  $AE \Rightarrow$

$$\angle ABE = \angle ADE \quad (1)$$

6) из условия  $FD \perp AC \Rightarrow \angle AFD = 90^\circ$

7) сумма углов  $\triangle AFD$ :  $\angle DAF + \angle AFD + \angle FDA = 180^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle ADE = \angle ADF = 180^\circ - 90^\circ - \angle DAF = 90^\circ - \angle DAF = 90^\circ - \angle DAC \quad (2)$$

8) Замедлен., что  $\angle ADC = 180^\circ - \angle ADB = 90^\circ \Rightarrow \triangle ADC$  - прямой  $\Rightarrow \triangle ADE$  - прямой

9) Сумма углов  $\triangle ADC$ :  $\angle ACD + \angle DAC + \angle ADC = 180^\circ$

$$\Rightarrow \angle ACD = 180^\circ - \angle DAC - \angle ADC = 90^\circ - \angle DAC \stackrel{(1)}{=} \angle ADE \stackrel{(2)}{=} \angle ABE$$

$$\Rightarrow \cos(\angle ACD) = \cos(\angle ABE) < \frac{2}{3}$$

$$10) \text{ Из условия } \angle ACD - \text{ прямой}: CD = AC \cdot \cos(\angle ABE) = 20 \cdot \frac{2}{3} = \frac{40}{3}$$

$$11) \text{ Из условия } \angle CFD - \text{ прямой} (\angle ADF = 90^\circ): CF = CD \cos(\angle ABE) = \frac{40}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{80}{9}$$

$$12) \text{ Из условия } AF = AC - CF = 20 - \frac{80}{9} = \frac{100}{9} \quad \text{Ответ: } AF = \frac{100}{9}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} xy &= z^2 + yz \\ xz &= 4y + y^2 \\ yz &= xz + xy \\ xyz &= (x+y)(y+z)(z+x) \\ 4xyz + 4yz^2 + yxz + 16x^2y + 16y^2z + 6yz^2 &= 0 \end{aligned}$$

$C_n^k$  - обозначение сочетания - кол-во способов

выбрать  $k$  элементов из  $n$  элементов ( $n \geq k \geq 0$ )

$$\text{вычисляется по формуле } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Когда игрок может открыть 5 коробок, всего разные варианты "открытия" -  $C_n^5$ , где и - общее количество коробок. Число вариантов же, когда игрок угадает на <sup>все</sup> 3 коробки с шариками:  $C_{n-3}^2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ , потому что способов выбрать наименее из трех коробок с шариками <sup>по отдельности</sup> из оставшихся <sup>из оставшихся и 3 коробок</sup> 2 есть 1, а осталось оставшиеся два:  $C_{n-3}^2$

Поскольку любой способ выбрать 5 коробок равен вероятн., то вероятность подбоя  $\varphi_1 = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}$

Если же игрок может открыть 8 коробок, то всего разные варианты "открытия" -  $C_n^8$ , а вариантов, когда игрок угадает на все 3 коробки с шариками:  $C_{n-3}^5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ , Так как способ выбрать наименее из трех коробок с шариками <sup>по отдельности</sup> из оставшихся <sup>из оставшихся и 3 коробок</sup> 5 есть 1, а осталось оставшиеся 5:  $C_{n-3}^5$

Значит вероятность подбоя  $\varphi_2 = \frac{C_{n-3}^5}{C_n^8}$

$\Rightarrow$  ищем  $\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{C_{n-3}^5 \cdot C_n^5}{C_n^8 \cdot C_{n-3}^2} = \frac{(n-3)! \cdot n!}{5! \cdot (n-8)! \cdot 5!(n-5)!} \cdot \frac{2! \cdot 8!}{5! \cdot 5!} = \frac{2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!} = \frac{2 \cdot 8}{5} = 1,40$

т.е. вероятность, что игрок угадает в 1,4 раза  
Ответ: в 1,4 раза



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Пусть это действие. Числа  $x_4, x_5$  - корни ур-ния:

$$f_1: x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0 \quad \text{реш}$$

тогда, по т. Виета:  $x_4 + x_5 = \frac{-(a^2 - a)}{1}$   
 $x_4 + x_5 = a^2 - a$

Пусть действие. Числа  $x_2, x_7$  - корни ур-ния:

$$f_2: 2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$$

тогда, по т. Виета:  $x_2 + x_7 = \frac{-(a^3 - a^2)}{2}$

$$x_2 + x_7 = \frac{a^3 - a^2}{2}$$

Пусть первое число арифм прогрессии, в кот. что входит  
числа  $x_2, x_4, x_5, x_7$  равно  $b$ , а шаг (*т.е.* разность)  
~~разности~~ между соседними элементами  $(x_{i+1} - x_i) \forall i \in \mathbb{N}, i > 1$ )

тогда по формуле членов арифм прогрессии:  $x_2 = b + d$   $x_4 = b + 3d$

$$x_5 = b + 4d \quad x_7 = b + 6d \quad \text{тогда } x_4 + x_5 = 2b + 7d = x_2 + x_7$$

$$\text{т.е. } a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{2} \quad | \cdot 2$$

$$2a^2 - 2a = a^3 - a^2 \quad | - 2a^3 + 2a$$

$$a^3 - 3a^2 + 2a = 0$$

$$a(a-1)(a-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=1 \\ a=2 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.








СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой** из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{При } a=1: f_1: x^2 - (1-1)x + \frac{2-1}{3} = 0$$

$$f_1: x^2 + \frac{1}{3} = 0 \quad \text{но } x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{3} \geq \frac{1}{3} > 0 \Rightarrow$$

противоречие.

У ур-ния нет действит. корней  $\Rightarrow a \neq 1$

$$\text{При } a=0: f_1: x^2 - (0-0)x + \frac{2-0}{3} = 0$$

$$f_1: x^2 + \frac{2}{3} = 0 \quad \text{но } x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + \frac{2}{3} \geq \frac{2}{3} > 0 \Rightarrow$$

У ур-ния нет действит. корней. противоречие  $\Rightarrow a \neq 0$

$$\text{При } a=2: f_1: x^2 - (8-4)x + \frac{2-8}{3} = 0$$

$$f_1: x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$\Delta_{f_1} = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 12$$

$$\text{корни } f_1: \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$f_2: 2x^2 - (8-4)x - 2 \cdot 64 - 8 \cdot 2 - 4 = 0 \quad | :2$$

$$f_2: x^2 - 2x - 64 - 8 - 2 = 0$$

$$f_2: x^2 - 2x - 74 = 0$$

$$\Delta_{f_2} = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-74) = 4 + 9 \cdot 74 = 4 \cdot 75 = 300$$

$$\text{корни } f_2: \frac{2 \pm \sqrt{300}}{2} = \frac{2 \pm 10\sqrt{3}}{2} = 1 \pm 5\sqrt{3}$$

Тогда при  $b = 1 - 7\sqrt{3}$ ,  $d = 2\sqrt{3}$   $x_2 = 1 - 5\sqrt{3}$  — корни  $f_2$   
 $x_7 = 1 + 5\sqrt{3}$

$$\left. \begin{array}{l} x_4 = 1 - \sqrt{3} \\ x_5 = 1 + \sqrt{3} \end{array} \right\} \text{корни } f_1 \Rightarrow a=2 \text{ подходит}$$

Ответ: 2

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.







СТРАНИЦА  
1 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A \left| y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \right| + \left| y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \right| \leq 6 \quad \text{- кир-бо фигура } A$$

~~заметили, что кир-бо, симметрично~~ верное при

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases} \text{ верно и при } \begin{cases} x = -x_0 \\ y = y_0 \end{cases} \Rightarrow A \text{ симметрична оси } Oy$$

Oy . Тогда рассмотрим только часть фигуры A, где

$$x \geq 0 \Rightarrow y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \geq y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}$$

Рассмотрим случаи:

$$1) y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \geq 0$$

$$y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \geq 0$$

$$\text{точка } y \text{-координата фигуры: } y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} + y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \leq 6 \Leftrightarrow 2y \leq 36 \Leftrightarrow y \leq 18$$

$$\text{а } \frac{x}{6\sqrt{3}} \leq y - 15 \Rightarrow x \leq 6\sqrt{3}(y - 15)$$

Значит, что часть фигуры в этом случае ограничена прямыми:

$y = 18$ ,  $x = 6\sqrt{3}(y - 15)$  (прямая  $A$ ),  $f_1, f_2, f_3$  — ограничивающие фигуру симметрично относительно оси  $Oy$  (или  $y = 15$ )

$$2) y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \leq 0 \quad \text{Недолжно замечать, что, если пара } (x_1; y_1) \text{}$$

$$(y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \leq 0 \quad \text{тогда об. же паре } (x_2; y_2) \text{ то}$$

$$(15 - y - \frac{x}{6\sqrt{3}} \geq 0 \quad \text{условие 2) при } y_1 = 15, \text{ что}$$

$$15 - y_2 = y_1 - 15 \quad \text{т.е. } y_2 = 30, \quad y_1 + y_2 = 30$$

А значит, часть фигуры в этом случае симметрична части фигуры B (такое 1) относительно прямой  $y = \frac{1}{2} \cdot 30 \Leftrightarrow y = 15$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отмечьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Весь час фигура в 2D-ми лучше ограничена треугольником, симметрии прямой с вершинами  $(0; 18); (0; 15); (18\sqrt{3}; 18)$  относительно  $y = 15$ . Это треугольник  $(0; 12); (0; 15); (18\sqrt{3}, 12)$ .

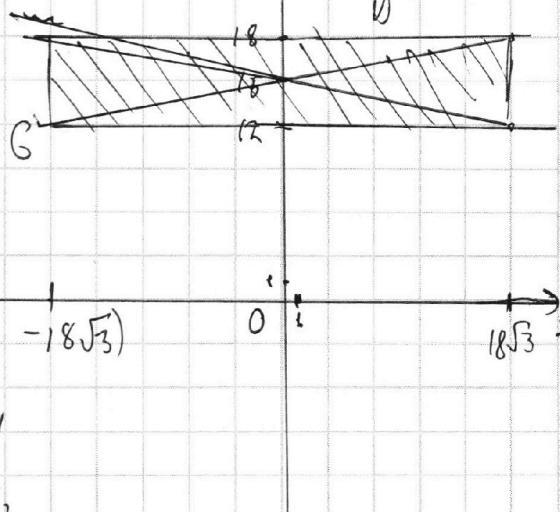
$$\begin{cases} y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \leq 0 \\ y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - 15 \leq \frac{x}{6\sqrt{3}} \\ -(y - 15) \leq \frac{x}{6\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow |y - 15| \leq \frac{x}{6\sqrt{3}}$$

$y$  в фигура А

$$\frac{2x}{6\sqrt{3}} \leq y - 15 \leq \frac{x}{6\sqrt{3}}$$

неравенства!

$$\text{тогда } y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} - y + \frac{x}{6\sqrt{3}} \leq 6$$



$$x \leq 18\sqrt{3}$$

всего узловая часть фигуры А

$$\text{ограничена прямыми } y - 15 = \frac{x}{6\sqrt{3}}, \quad y + 15 = \frac{x}{6\sqrt{3}}$$

и прямыми  $y = 12, x = 18\sqrt{3}$

Часть фигуры А ограничена треугольником

с вершинами:  $(0; 15); (18\sqrt{3}; 12); (18\sqrt{3}; 18)$

$y_1, y_2, y_3$

$y_2, y_3, y_4$

$y_1, y_4$

Все ясно, что при  $x > 0$  других случаев нет

$(18\sqrt{3}; 12)$

$\Rightarrow$  Фигура А при  $x \geq 0$  ограничена прямыми с вершинами  $(0; 15); (0; 16); (18\sqrt{3}; 18)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

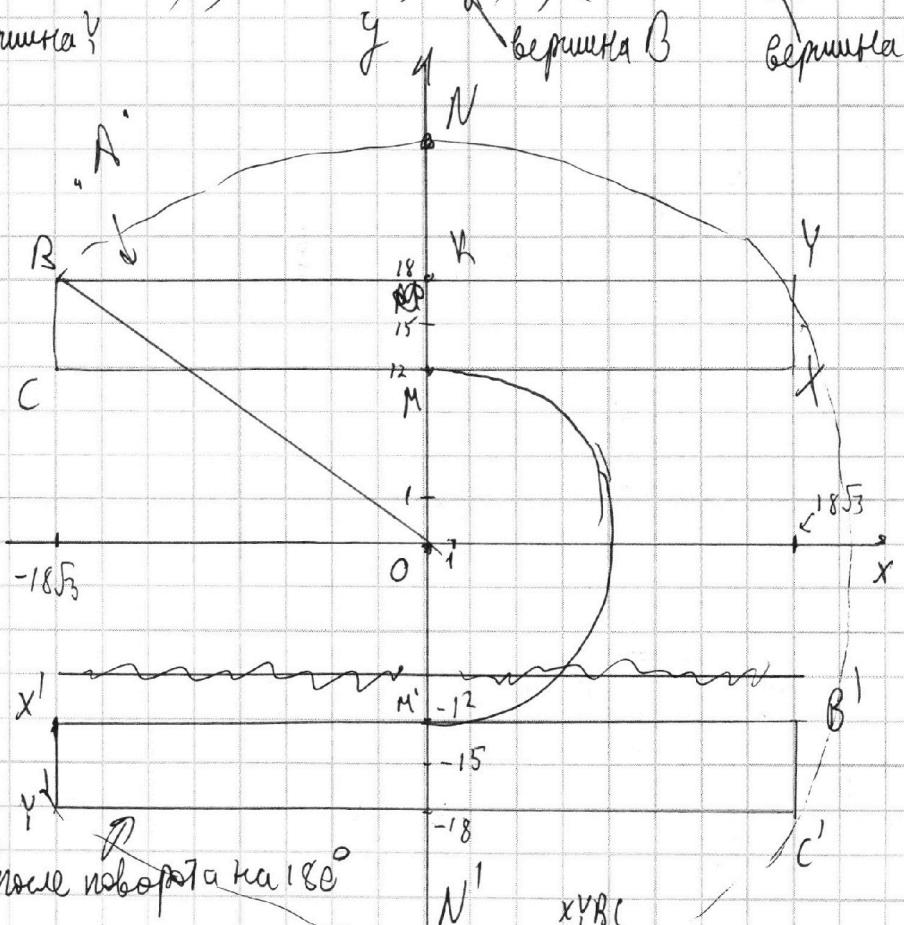
СТРАНИЦА

2 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Значит все фигуры ограничены прямолинейными с вершинами  
 $(18\sqrt{3}; 12)$ ,  $(18\sqrt{3}; 18)$ ,  $(18\sqrt{3}; 18)$ ,  $(-18\sqrt{3}; 12)$   
 вершина X вершина Y



После поворота на  $180^\circ$

Пусть после поворота на  $180^\circ$  вокруг  $(0; 0)$  фигура  $A$  переходит в  $x'y'c'$   
 $(x \rightarrow x', y \rightarrow y')$

расстояние между  $(0; 0)$  и  $A$  равно  $12$ , то есть  $\text{окружность}$   
 $\omega_1(0; R=12)$  не будет покрыт

Макс. расстояние между  $(0; 0)$  и точкой  $B$  равно  $OB = \sqrt{18^2 + 18^2} = 36$

$\Rightarrow$  ~~пока~~ есть точки, для которых не находящиеся в круге, ограниченный  $\omega_2(0; R=36)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
4 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Не будут покрыты

Всегда не все

Всем же, рас-е до которых от 120 36 Всегда

и ходят для которых точка, стоящая от  $(0,0)$

то есть на рас-и от 12 до 36 есть точка  $Z$ .

покрытие  $\omega_2(0; R=0.7)$  [под углом между точкой,

входящей в  $A$  и точкой  $Z$ , проекция градусная

мера которой не больше  $\pi$ , и на которой  $\angle Z$  наход

жется точкой, ее начальную, или, иначе, "изи"

точка в сторону на часовой стрелке]  $\Leftrightarrow [Z \text{ будет}$   
покрыта]

(из определения покрытия на  $180^\circ$  по часовой стрелке)

$\Rightarrow$  в правой пачки сюда  $OY$  будет покрывать все

точки на допустимом расстоянии (от 12 до 36)

А в левой ~~только~~ те, которые определяются в других

расположенных:

Пусть  $\omega_2 \in OY = (N, N')$  причем  $N$  лежит выше  $OX$

Пусть  $X \in OY = M$ ,  $X'(C) \in OY = M'$

точка в левой получит, исходя из вышеизложенного при-

ятия, будет покрыта только фигуры, охватив:

{угол  $BN$ , прямой  $BC$ , прямой  $CM$ , прямой  $MN\}$  (1)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
5 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

другой  $y'z'$ , оставив:  $n'm'; m'x'; x'y' \} (2)$

Решение ~~показано~~ получено из этих фигур:

Посмотрите, что эти две фигуры равны.

Получаем ~~и~~ показать фигуры (1).

Пусть  $k = (0; 18)$  тогда в приблеж.,  $\angle BOK = 0^\circ$

широкотраingle  $BV = 36$ , а  $\angle K = 18$ . Тогда  $\angle BOK = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle BOK = 90^\circ$

Значит, <sup>показать</sup>  $\triangle BON - \frac{1}{6}$  показать шир.  $w_2$ ,

а показать  $S_{BOK} = \frac{18 \cdot 18\sqrt{3}}{2} = 9 \cdot 18\sqrt{3}$

$\Rightarrow$  ~~показать~~ показать фигуры  $BVK$ :  $\frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 36^2 - 9 \cdot 18\sqrt{3} \Rightarrow$  показать

фигуры (1):  $\frac{1}{6} \pi \cdot 36^2 - 9 \cdot 18\sqrt{3} + 18\sqrt{3} \cdot 6 = 36\pi - 18\sqrt{3} + 18\sqrt{3}$

$S_{BCM}$

$= 18(12\pi - 3\sqrt{3}) = 54(6\pi - \sqrt{3})$

значит суммар показать:  $54(6\pi - \sqrt{3}) \cdot 2 = 108\pi - 108\sqrt{3}$

Показать открытый ободок в ~~все~~ правой полурамке:

$$\frac{S_{w_2}}{2} - \frac{S_{w_1}}{2} = \frac{1}{2}\pi(36^2 - 12^2) = \frac{1}{2}\pi(98 \cdot 24) = 24\pi \cdot 5 = 120\pi$$

$(S_{w_i} \cdot$  показать шир.  $w_i)$

$$\Rightarrow$$
 суммар показать  $648\pi + 576\pi - 108\sqrt{3} = 1224\pi - 108\sqrt{3}$

Ответ:  $1224\pi - 108\sqrt{3}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

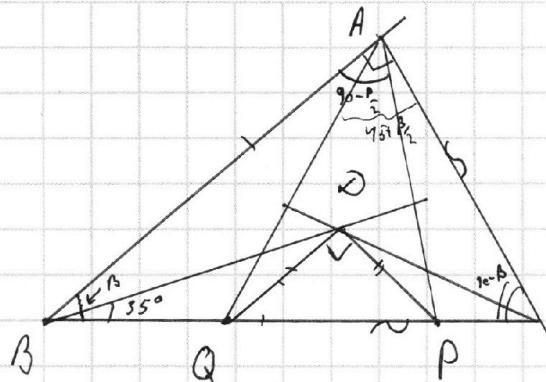







СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$1) \text{ Радиус } \angle CBA = \beta$$

2) Тогда сумма углов  $\triangle ABC$ :

$$\angle CBA + \angle BAC + \angle ACB = 180^\circ$$

$$\beta + 90^\circ + \angle ACB = 180^\circ$$

$$\angle ACB = 90^\circ - \beta$$

с основанием АР

3)  $\triangle PBA$  - равнобедр.  $\Rightarrow \angle BPA = \angle BAP$ . Тогда сумма углов  $\triangle BPA$ :

$$\angle PBA + \angle BPA + \angle BAP = 180^\circ$$

$$\beta + 2\angle BAP = 180^\circ \Rightarrow \angle BAP = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$$

4)  $\triangle ACQ$  - равнобедр. с основанием AQ  $\Rightarrow \angle CAQ = \angle AQC$

тогда сумма углов  $\triangle CQA$ :  $\angle CAQ + \angle AQC + \angle ACQ = 180^\circ$

$$\Rightarrow 2 \cdot \angle CAQ + 90^\circ - \beta = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle CAQ = 45^\circ + \frac{\beta}{2}$$

Заметим, что  $\angle BAP + \angle QAC = \angle QAP + \angle BAC = 0$

$$90^\circ - \frac{\beta}{2} + 45^\circ + \frac{\beta}{2} = 90^\circ + \angle QAP \Rightarrow \angle QAP = 90^\circ$$

5) пусть О - центр окр.  $\odot AQP$ . Тогда  $OQ = OP$  т.е.

(1) О лежит на серединном перпендикуляре к  $QP$ ,

(2) О лежит внутри  $\triangle QAP$ , (3) угловой угол  $\angle QOP = 2 \cdot \angle QAP = 90^\circ$

т.е. О лежит на окр.  $\odot$  с диаметром  $QP$ . Заметим, что форма удобней выражена всем условием (1)(2) и (3) только одна. И этим условием удачно.  $\square \Rightarrow$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| + \left|y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leq 6 \cdot 6\sqrt{3}$$

$$\left|6\sqrt{3}y - 90\sqrt{3} + x\right| + \left|6\sqrt{3}y - 90\sqrt{3} - x\right| \leq 36\sqrt{3}$$

$$|a+x| + |a-x| \leq 36\sqrt{3}$$

$$|a+2x| + |a| \leq 36\sqrt{3}$$

$$\text{При } y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \geq 0: \Rightarrow \frac{x}{6\sqrt{3}} \leq y - 15$$

$$y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \geq 0 \Rightarrow |x| \leq 6\sqrt{3}(y - 15)$$

$$2y - 30 \leq 6 \quad \text{или} \quad |x| \leq 6\sqrt{3}(y - 15)$$

$$y \leq 18$$

$$x \leq 6\sqrt{3} \cdot 3 = 18\sqrt{3}$$

$$\text{При } \begin{cases} y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \geq 0 \Rightarrow y \geq 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \\ y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \leq 0 \Rightarrow y \leq 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \end{cases}$$

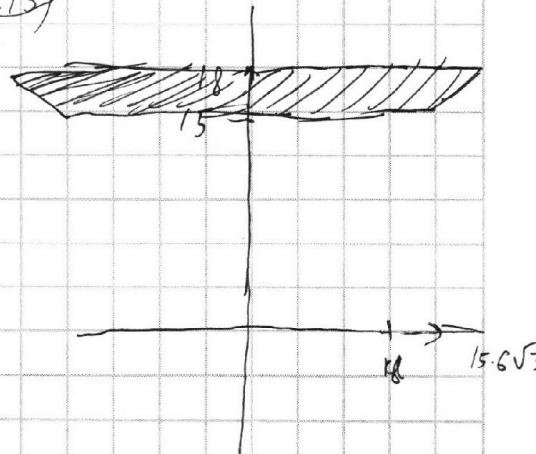
$$\frac{x}{6\sqrt{3}} \leq 6 \Rightarrow x \leq 18\sqrt{3}$$

$$\text{При: } \begin{cases} y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \leq 0 \Rightarrow \frac{x}{6\sqrt{3}} \geq 15 - y \\ y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \geq 0 \Rightarrow -\frac{x}{6\sqrt{3}} \leq 15 - y \end{cases}$$

$$\Rightarrow |x| \leq 6\sqrt{3}(15 - y)$$

$$2y - 30 \geq -6$$

$$y \geq 12$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\Rightarrow \angle D = 0^\circ$  - центр опис. окр. на  $AQP$

7) когда  $D$  лежит на сер. пер. к  $AP$ , начиная с точки  $B$   
сост.  $AP$  к  $AP$   
(изначально что  $BA = BP$ )  $\Rightarrow$  в равнобедр.  $\triangle BPD \sim BDA$  - сер. пер.

$\Rightarrow$  по сб-ку равнобедр. др-ка  $BD$  - биссектриса  $\angle PBA$

$$\Rightarrow \angle PBD = 35^\circ = \frac{1}{2} \angle CBD = \beta \Rightarrow \beta = 70^\circ \Rightarrow \angle ACD = 90^\circ - \beta = 20^\circ$$

8) замечаем, что  $D$  лежит на сер. пер. к  $AQ$ , начиная с точки  $C$  (изначально что  $CA = CQ$ )  $\Rightarrow$  в равнобедр.  $\triangle QCD$   
сост.  $AQ$

$CQD$  - сер. пер. к  $AQ \Rightarrow$  по сб-ку равнобедр. треугольника

$$ACD \sim QCD \Rightarrow \angle QCD = \angle ACD = \frac{1}{2} \angle QCA$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 20^\circ = 10^\circ$$

Отв:  $10^\circ$

\* сер. пер. - серединный перпендикуляр



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

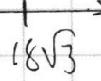
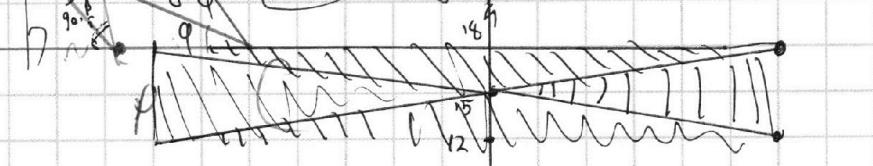
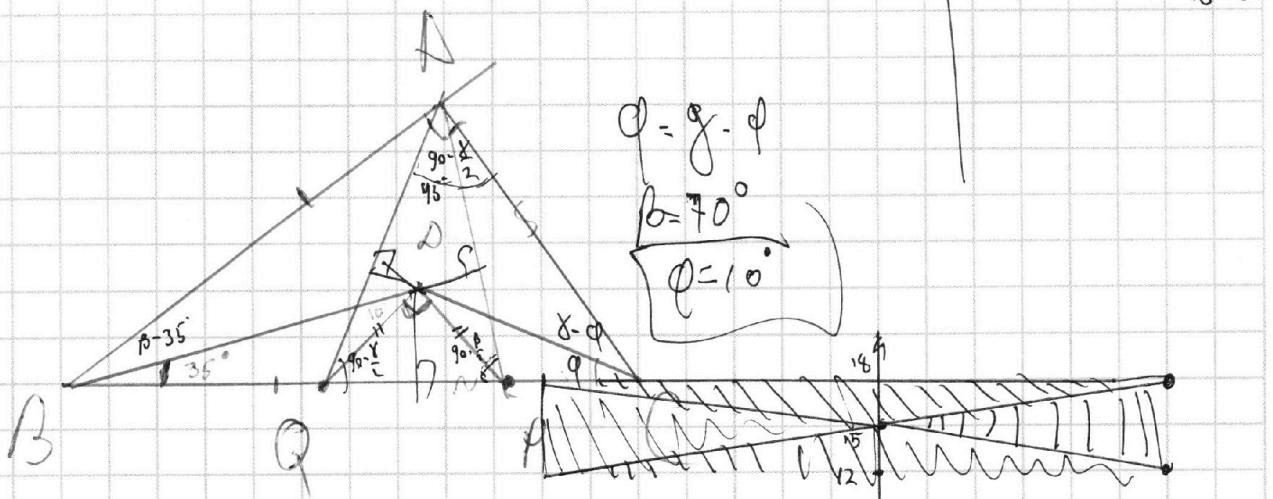
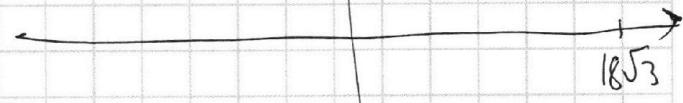
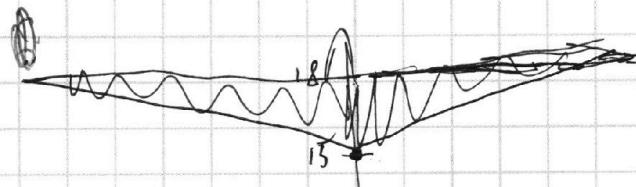
$$12\sqrt{3}y - 30 \leq 6$$

$$2\sqrt{3}4 - 551$$

$$g \leq \frac{6}{2\sqrt{3}}$$

$$|72\sqrt{3}y - 30| \leq |6\sqrt{3}y - 15 + x| + |6\sqrt{3}y - 15 - x| \leq 6$$

$$30 - 12\sqrt{3}y/56$$



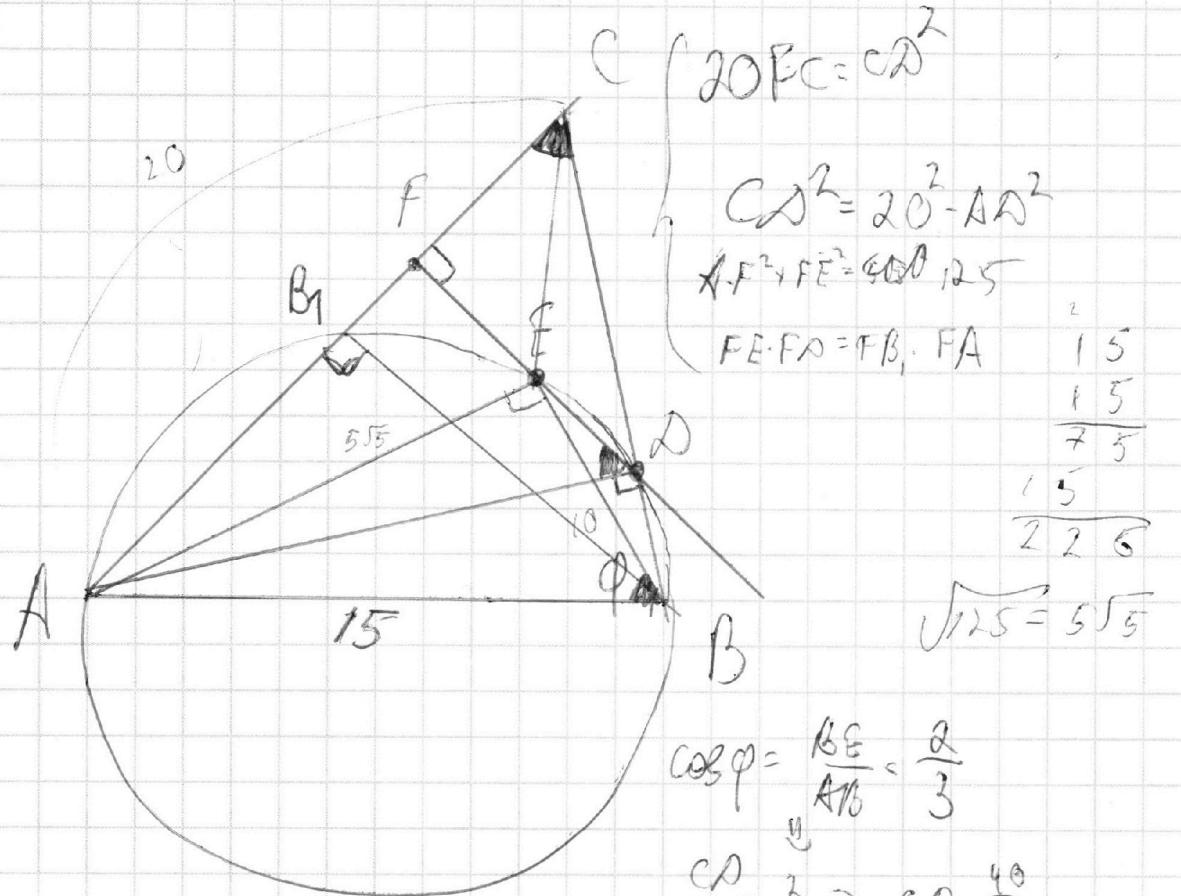


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$$10^{50,000} - 3 \cdot 10^{25,000} = 10^{25,000} (10^{25,000} - 3) + 3$$

9- 99,7 000003

$$= 10 - 3 \cdot 10 + 3 \cdot 10 - 1 =$$

$$= 10 (10 - 3 \cdot 10 + 3) - 1$$

99..99 700..08 299..99  
26.000-1 26.000-1 75.000

0000000000

(49.999)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА  
\_ из \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} XY = Z(Z+4) \\ YZ = X(X+4) \\ XZ = Y(Y+4) \end{cases}$$

$$XYZ = (X+4)(Y+4)(Z+4)$$

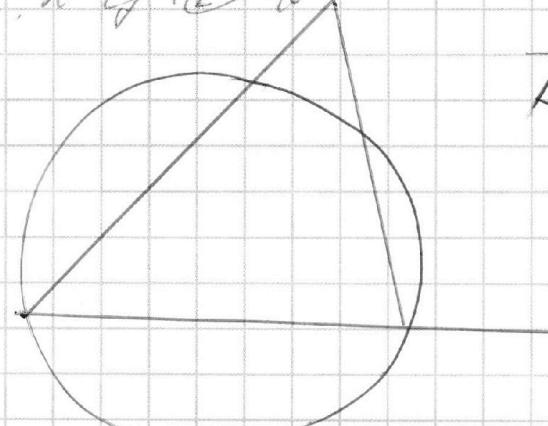
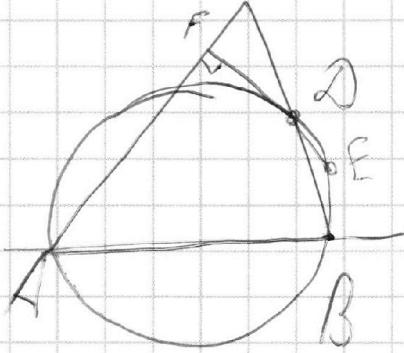
$$\Rightarrow XYZ = XYZ + 9XY + 4YZ + 4XZ + 16X + 16Y + 16Z + 64$$

$$XY + YZ + XZ + 4X + 4Y + 4Z + 64 = 0$$

~~$$X^2 + 8X + Y^2 + 8Y + Z^2 + 8Z + 96 = A$$~~

~~$$X^2 - XY - Y^2 - Z^2 + Z^2 - XZ + 4X + 4Y + 4Z + 32 = A$$~~

~~$$XY + YZ + ZX + 48 + 4X + 4Y + 4Z = A$$~~

~~12 + 13 = 25~~
~~12^2 + 13^2 = 18~~




На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(x-x_1)(x-x_2) = x^2 - (x_1+x_2)x + x_1 x_2$$

$$\#(x_1+x_2) = a^2 - a$$

~~a^2 - a~~

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4$$

$$|x_1 - x_3| = 2 \cdot |x_1 - x_2|$$

$$\#(x_3+x_4) = \underbrace{a^3 - a^2}_2$$

$$a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{2}$$

$$a(a^2 - a^3 + 2a^2 + a) = 0$$

$$a^3 - 3a^2 + 2a = 0$$

$$\cancel{a(a^2 - a^2 + 2a + 1) = 0}$$

$$a(a-1)(a+2) = 0$$

$$a(a^2 - 3a + 2) = 0$$

$$\begin{cases} a=0 \\ a=1 \\ a=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=0 \\ a=1 \\ a=2 \end{cases}$$

при  $a=1$  ~~если~~

$$x^2 + \frac{1}{3} = 0$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0 \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{при } a=0: \quad x^2 + \frac{2}{3} = 0$$

$$x_{34} = \frac{2 \pm 10\sqrt{3}}{2} : 1 \pm 5\sqrt{3}$$

$$2x^2 - 4 = 0$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$1 \pm 5\sqrt{3}$$

$$\text{при } a=1: \quad x^2 + \frac{1}{3} = 0$$

$$x_{12} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$2x^2 - 2 - 8 = 0$$

(2)

$$\text{при } a=2: \quad x^2 - 2x - \frac{8}{3} = 0$$

$$x^2 - 2x - 2 = 0 \quad D = 4 + 8 = 12$$

$$2x^2 - 4x - 12 = 0 \quad D = 16 - 48 = -32$$

$$x^2 - 2x - 7 = 0 \quad D = 4 + 29 = 33$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



СТРАНИЦА  
\_ из \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

11 коробки

$$C_n^2$$

$$\frac{C_n^5}{C_n^5}$$

$$\frac{C_n^5}{C_n^8}$$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 2}{5!} \cdot \frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{(n-6)(n-8)(n-10)} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot \frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{(n-6)(n-8)(n-10)} =$$

$$= \boxed{\frac{28 \cdot (n-2)(n-3)(n-4)}{5 \cdot (n-9)(n-6)(n-7)}}$$

$$\begin{aligned} & 646 \\ & 526 \\ & 529 \\ & 1620 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 3 \\ & 5 \\ & 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 108 \\ & 648 \end{aligned}$$

$$\frac{C_n^3 \cdot C_n^5}{C_n^8 C_n^3} = \frac{\frac{n!}{3!(n-5)!} \cdot \frac{n!}{5!(n-5)!}}{\frac{n!}{8!(n-8)!} \cdot \frac{n!}{2!(n-2)!}} =$$

$$= \frac{8! \cdot 7! \cdot 6! \cdot 2!}{8! \cdot 6! \cdot (5!)^2} \cdot \frac{(n-8) \cdot (n-7) \cdot (n-6) \cdot (n-5)}{(n-9) \cdot (n-8) \cdot (n-7) \cdot (n-6)} =$$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot \frac{(n-8) \cdot (n-7) \cdot (n-6) \cdot (n-5)}{(n-9) \cdot (n-8) \cdot (n-7) \cdot (n-6)} =$$