



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 10 КЛАСС. Вариант 8

1. [4 балла] Ненулевые числа  $x, y, z$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = -6y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения  $(x - 6)^2 + (y - 6)^2 + (z - 6)^2$ , если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа  $n$  состоит из 20 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа  $n^3$ ?
3. [5 баллов] Окружность  $\omega$  с диаметром  $AB$  пересекает сторону  $BC$  остроугольного треугольника  $ABC$  в точке  $D$ . Точка  $F$  выбрана на отрезке  $AC$  так, что  $DF \perp AC$ , а  $E$  — точка пересечения отрезка  $DF$  с окружностью  $\omega$ , отличная от  $D$ . Найдите  $AF$ , если  $AC = 20$ ,  $AB = 10$ ,  $BE = 9$ .
4. [4 балла] В теленгрире ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарику. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть девять коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых корни уравнения  $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$  являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения  $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$  являются пятым и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура  $\Phi$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют неравенству  $\left|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| + \left|y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| \leqslant 8$ . Фигуру  $\Phi$  непрерывно повернули вокруг начала координат на угол  $\pi$  против часовой стрелки. Найдите площадь множества  $M$ , которое замела фигура  $\Phi$  при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе  $BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  выбраны точки  $P$  и  $Q$  так, что  $AB = BP$ ,  $AC = CQ$ . Внутри треугольника  $ABC$  выбрана точка  $D$ , для которой  $DP = DQ$ , а  $\angle PDQ = 90^\circ$ . Найдите  $\angle DCB$ , если известно, что  $\angle CBA = 46^\circ$ .

L

L



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{\sqrt{11}}{z^2} \geq 0, x^2 \geq 0, y^2 \geq 0$$

↓

$$xy + 6z \geq 0, yz + 6x \geq 0, zx + 6y \geq 0$$

$$\cancel{x} \cancel{y} z > -6; \cancel{y} \cancel{z} x > -6; \cancel{z} \cancel{x} y > -6$$

$$x-6 = \frac{yz}{x}; y-6 = \frac{xz}{y}; z-6 = \frac{xy}{z}$$

$$\Rightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6z - 6y) = 2(xy + yz + zx)$$

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = \cancel{2(z^2 - 6z + x^2 - 6x + y^2 - 6y)} - \cancel{2(x^2 + y^2 + z^2)}$$

$$36 \cdot 3 + 2(xy + yz + zx) - (x^2 + y^2 + z^2) \leq 36 \cdot 3 + 2(xy + yz + zx)$$

$$\cancel{x - \frac{yz}{x} + y - \frac{xz}{y} + z - \frac{xy}{z}} + 2(xy + yz + zx) - (x^2 + y^2 + z^2) =$$

$$\cancel{x-y} \cancel{xy} \cancel{yz} \cancel{xz} \cancel{x^2-y^2} \cancel{y^2-xz} \cancel{z^2-xy}$$

$$a \leq 36 \cdot 3 + 2(xy + yz + zx)$$

$$\cancel{x-y}(x-6) - (y-6) = \frac{yz}{x} - \frac{xz}{y} = \frac{z(y^2 - x^2)}{xy}$$

$$x-y = \frac{z(x-y)(-x-y)}{xy} \Rightarrow \text{либо } x=y \text{ (если } \cancel{\text{расщеплен по раз.)}}$$

$$\text{либо } \frac{1}{z} = -\frac{z(x+y)}{xy}$$

$$xy = -zx - zy \Rightarrow xy + zx + zy = 0$$

Тогда  $a \leq 36 \cdot 3$  ( $a = 36 \cdot 3$  достигается при  $x=y=z=0$ )

$$(a = 108) \text{ при } x=y=z=0$$

I-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                                       |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - 6x + z^2 - 6z + y^2 - 6y + 27 = 27$$

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 27$$

Это сфера с центром в точке  $(3; 3; 3)$  и радиусом

3. При этом  $(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = r^2$  — сфера с

радиусом  $r$  и центром  $(6; 6; 6)$ . Крайнее значение —

когда

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = 2(xy + yz + zx) - (x^2 + y^2 + z^2) + 36 \cdot 3 =$$

$$36 \cdot 3 - (x^2 + y^2 + z^2)$$

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = \left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{xz}{y}\right)^2 + \left(\frac{xy}{z}\right)^2 =$$

$$\left(\frac{-zx - xy}{x}\right)^2 + \left(\frac{-zy - yx}{y}\right)^2 + \left(\frac{-xz - zx}{z}\right)^2 =$$

$$2(z^2 + y^2 + x^2) - 2(xy + yz + zx) = 2(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + yz + zx)$$

$$2(x^2 + y^2 + z^2) = a$$

$$36 \cdot 3 - (x^2 + y^2 + z^2) = 2(x^2 + y^2 + z^2)$$

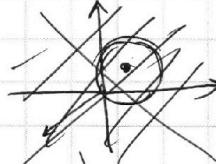
$$x^2 + y^2 + z^2 = 36$$

$$a = 36 \cdot 2 = 72$$

Пусть  $x = y$  (теперь  $xy + yz + zx = 0$  не будет больше 0).

$$\begin{cases} x^2 = -6z + z^2 \Rightarrow z^2 - 6z \geq 0; z \in (-\infty; 0] \cup [6; +\infty) \\ z = -6x + x^2 \end{cases}$$

$$z = -6x + x^2$$



I-

I-

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x = \sqrt{z^2 - 6z}$$

$$z\sqrt{z^2 - 6z} = -6\sqrt{z^2 - 6z} + z^2 - 6z$$

$$(z+6)\sqrt{z^2 - 6z} = \sqrt{z^2 - 6z} \cdot \sqrt{z^2 - 6z}$$

Либо

$$z^2 - 6z = 0$$

$$z = 0:$$

$$\downarrow \\ x=0, y=0$$

другой узел  
рассмотрен,

$$a = 108$$

$$z = 6:$$

$$x = 0, y = 0$$

$$a = 42$$

(симметричные  
аналогичные  
другие  
для  $x=6, y=z=0$   
 $y=6, x=z=0$ )

$$z + 6 = \sqrt{z^2 - 6z}$$

$$z^2 + 12z + 36 = z^2 - 6z$$

$$18z = -36, z = -2$$

$$x = \sqrt{4 + 12} = 4$$

$$y = x = 4 \quad (\text{симметричные аналогичные другие})$$

$$(-2; 4; 4) \quad x = -2; y = z = 4 \\ y = -2, x = z = 4$$

$$a = 4^2 + 4^2 + 8^2 = 64 + 32 = 96$$

Ответ: выражение может принимать значения

72, 96, 108.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{№2}$$

$$n = \underbrace{999\dots9}_{20001}$$

$$n+1 = \underbrace{1000\dots0}_{20001}$$

$$n^3 = \left( \underbrace{1000\dots0}_{20001} - 1 \right)^3 = \left( \underbrace{1000\dots0}_{20001} \right)^3 - 3 \left( \underbrace{1000\dots0}_{20001} \right)^2 + 3 \left( \underbrace{1000\dots0}_{20001} \right) - 1$$

$$\left( \underbrace{1000\dots0}_{20001} \right)^3 = \underbrace{10\dots0}_{40003} \cdot \underbrace{60003}_{\begin{array}{l} 20001 \\ 20000 \\ 40000 \\ 40003 \\ 60003 \end{array}}$$

$$\begin{array}{r} \cancel{1000\dots0} \\ - \cancel{1000\dots0} \\ \hline 300\dots0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9\dots999 \cancel{70000} \\ \hline 20000 \quad 40002 \end{array}$$

$$3 \left( \underbrace{100\dots0}_{20001} \right)^2 = \underbrace{3000\dots0}_{40002}$$

$$\left( \underbrace{1000\dots0}_{20003} \right)^3 - 3 \left( \underbrace{1000\dots0}_{20001} \right)^2$$

$$\begin{array}{r} 9\dots999 \cancel{70000} \\ \hline 20000 \quad 40002 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20000 \quad 40002 \\ + 9\dots999 \cancel{70000} \\ \hline 20000 \quad 20000 \\ + 9\dots970 \cancel{000} \\ \hline 30\dots00 \\ \hline 20001 \\ \hline 9\dots970 \cancel{030} \cancel{000} \\ \hline 20000 \quad 20000 \quad 20001 \end{array}$$

$$3 \left( \underbrace{1000\dots0}_{20001} \right) = \underbrace{3000\dots0}_{20003}$$

$$3000\dots0 + 9\dots999 \cancel{70000} = \underbrace{3000\dots0}_{20002} + \underbrace{9\dots999 \cancel{70000}}_{40002}$$

$$\begin{array}{r} 20000 \quad 20000 \quad 20001 \\ - 20000 \quad 20000 \quad 20001 \\ \hline 9\dots970 \cancel{030} \cancel{000} \\ - 9\dots970 \cancel{030} \cancel{000} \\ \hline 1 \\ \hline 9\dots970 \cancel{029} \cancel{999} \\ \hline 20000 \quad 20000 \quad 20001 \end{array}$$

Суммарно  $20000 + 20001 = 40001$  девяток

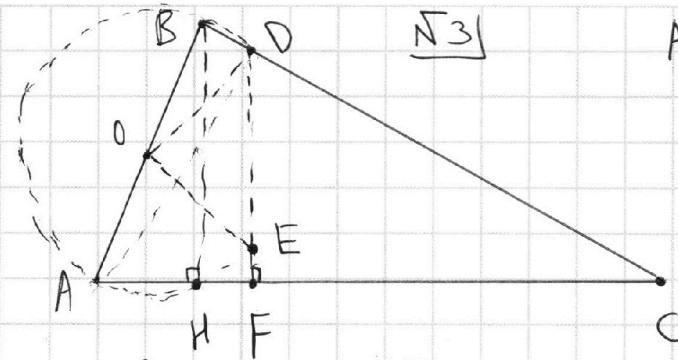
Ответ: 40 001 девяток.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$AF = ?$

$$AC = 20 \quad AB = 20 \quad BE = 9$$

$$DF \perp AC \quad D = \omega \cap BC$$

$$E = DF \cap \omega, E \neq D$$

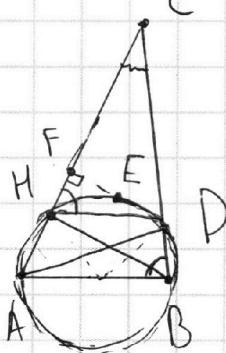
O - центр окружности.

Проведем высоту BH.

B - точка ~~на~~ на диаметре AB,

т.е. вписанный угол, опирающийся на  $\widehat{AB}$ , прямой. Чуть, опир. на  $\widehat{AB}$ , будут острыми, если вершина угла лежит вне окр.-ти, и тупыми, если она лежит ~~внутри~~  $\Rightarrow$  и лежит на окружности.

$AB = 20 = \text{диаметр} \Rightarrow \text{радиус } r = 5$ . Тогда все углы на окр.-ти  $OA = OH = OE = OD = OB = 5$ . А также  $\angle ADB = \angle AEB = \angle AHB = 90^\circ$ . Следует, что AP - высота.



Из вписанности  $\triangle ABD$ :

$$\angle CHD = 180^\circ - \angle AHD = 180^\circ - (180^\circ - \angle ABD) = \angle ABD$$

$$\angle HCD = \angle ACB, H \in AC, D \in BC$$

Пользуясь  $\angle$   $\triangle HCD \sim \triangle ABC$

$DF \perp CH \Rightarrow DF$  - высота  $\triangle CPH$  из D, т.е.

$$\frac{DF}{AD} = k, \text{ если } k = \frac{HD}{AB}, \text{ когда } \cancel{\text{угол при вершине}}$$

$$\frac{DF}{AD} = \cos \angle EDA, \text{ т.к. } \angle AFD = 90^\circ.$$

$\angle EDA = \angle EBA$  как вписанные, опирающиеся на единую дугу.

$\triangle EBA: \angle E = 90^\circ \Rightarrow$  по м.Пифагора  $AB^2 = BE^2 + EA^2, AE = \sqrt{19}$ .

$$\cos \angle EBA = \frac{BE}{AB} = 0,9$$

$$K = 0,9. \quad K = \frac{DH}{AB} \Rightarrow DH = 9 = BE, \text{ т.к. } EPHB - P/5 \text{ трапеция}$$

$$HE = BD$$

( $ED \perp AC, BH \perp AC \Rightarrow ED \parallel BH + EDBH$  вписаный; висяч. трапеции  $P/5$ )

$$AF = \sin \angle EDA \cdot AD$$

$$0,9 = \cos \angle EDA = \cos \angle FPA = \sin \angle FAD \text{ из } \angle FDA$$

$$\sin \angle FAD = \sin \angle CAD = 0,9 = \frac{CD}{AC} \left( \text{т.к. } \triangle ACD, \angle ADC = 90^\circ \right) \Rightarrow CD = 18.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Чг  $\triangle ACD$  м.Пифагора:

$$AC^2 = CD^2 + AD^2; AD = \sqrt{400 - 324} = 2\sqrt{19}$$

Чг  $\triangle AFD$  м.Пифагора:

~~$$AD^2 = AF^2 + FD^2.$$~~

~~DF~~

$$AF = \sin \angle EDA \cdot AD$$

$$\sin \angle EDA = \sqrt{1 - \cos^2 \angle EDA} = \sqrt{0,19} = \frac{\sqrt{19}}{10}$$

$$AF = 2\sqrt{19} \cdot \sqrt{0,19} = \frac{38}{10} = 3,8$$

Ответ:  $AF = 3,8$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                               |                               |                               |  |                               |                               |                               |
|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|--|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 1<br><input type="checkbox"/> | 2<br><input type="checkbox"/> | 3<br><input type="checkbox"/> | 4<br><input checked="" type="checkbox"/> | 5<br><input type="checkbox"/> | 6<br><input type="checkbox"/> | 7<br><input type="checkbox"/> |
|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|--|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4

н коробок, б 3-х шарик

Способов, при которых игрок выигрывает:

$C_{n-3}^2$ , т.к. 3 коробки „зарегистрированы“ (игрок однажды выбрал все две выигрышные), ещё 2 коробки выбираются из оставшихся ( $n-3$ ). При этом всего способов выбрать 5 коробок из  $n$ :  $C_n^5$

вероятность выигрыша

$$\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = p_1$$

Когда разрешают открыть 3 коробок:

Аналогично, выигрышных способов  $C_{n-3}^5$ , всего способов  $C_n^9$ , т.е.  $p_2 = \frac{C_{n-3}^5}{C_n^9}$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{C_{n-3}^6 \cdot C_n^5}{C_{n-3}^2 \cdot C_n^9} \quad \#$$

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\left( \frac{(n-3)!}{(n-9)!6!} \cdot \frac{n!}{(n-5)!5!} \right)}{\left( \frac{(n-3)!}{(n-5)!2!} \cdot \frac{n!}{(n-9)!9!} \right)} = \frac{\left( \frac{1}{6!5!} \right)}{\frac{1}{2!9!}} = \frac{2!9!}{6!5!}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{9! \cdot 2!}{6! \cdot 5!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{14}{5} = 2,8$$

Ответ: вероятность выигрыша выросла в

$$\frac{14}{5} = 2,8 \text{ раза.}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

При  $a=4$ :

$$x^2 - 4 = 0 \quad 5x^2 - 16x = 0$$

$$x = -2; 2 \quad x = \pm \sqrt{\frac{16x}{5}}$$

По возрастанию:  $-\sqrt{\frac{16x}{5}}, -2, 2, \sqrt{\frac{16x}{5}}$ , но  $2 - (-2) \neq \sqrt{\frac{16x}{5}} - 2$ ,  
т.е.  $a=4$  не подходит.

При  $a=5$ :

$$x^2 - 5x - 1 = 0 \quad 5x^2 - 25x - 295 = 0$$

$$D = 25 + 4 = 29 \quad D = 625 + 4 \cdot 5 \cdot 295 = 25(25 + 4 \cdot 45) =$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{29}}{2} \quad 25 \cdot 205$$

$$x = \frac{25 \pm 5\sqrt{205}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{205}}{2}$$

По возрастанию:  $\frac{5 - \sqrt{205}}{2}, \frac{5 + \sqrt{205}}{2}, \frac{10}{2}, \frac{5 + \sqrt{205}}{2}$

$$\sqrt{205} - \sqrt{29} \neq 2\sqrt{29}$$
, т.к.  $\sqrt{205} \in (14; 15)$ ,  $3\sqrt{29} \in (15; 18)$   
 $a=5$  не подходит.

Ответ: таких значений нет.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Корни ур-ия  $x^2 - (a^2 - 4a)x + (a^2 - 6a + 4) = 0$ :  $x_6$  и  $x_7$

Корни ур-ия  $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - (2a^3 + 6a + 15) = 0$ :  $x_5$  и  $x_8$

По т. Виетта:

$$\begin{cases} x_6 + x_7 = a^2 - 4a \\ x_5 + x_8 = \frac{a^3 - 4a^2}{5} \end{cases}$$

Пусть шаг арифм. прогрессии  $b$ . Тогда:

$$x_6 = x_5 + b$$

$$x_7 = x_5 + 2b$$

$$x_8 = x_5 + 3b$$

$b \neq 0$ ,  
прогрессия  
непостоянная

$$x_8 - x_7 = x_6 - x_5$$

$$x_8 - x_7 - (x_6 - x_5) = 0; x_8 + x_5 - (x_6 + x_7) = 0$$

$$\frac{a^3 - 4a^2}{5} - (a^2 - 4a) = 0$$

$$\frac{a(a^2 - 4a)}{5} - (a^2 - 4a) = 0$$

$$\left(\frac{a}{5} - 1\right)(a^2 - 4a) = 0$$

$$a\left(\frac{a}{5} - 1\right)(a - 4) = 0$$

$$\boxed{a=0}$$

$$\boxed{a=5}$$

$$\boxed{a=4}$$

Проверим, все ли найденные значения подходит:

При  $a=0$ :

~~$x_6 + x_7 = x_5 + x_8 = 0 \Rightarrow 2x_5 + 3b = 0$~~

$$x^2 - 4 = 0; 5x^2 - 15 = 0$$

$$x = -2; 2$$

$$x = -\sqrt{3}; \sqrt{3}$$

По возрастанию:  $-2; -\sqrt{3}; \sqrt{3}; 2$  т.е. 5-й член прогрессии —  
одно из решений первого уравнения, противоречие,  $a=0$  не подходит

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

При <sup>№6</sup> повороте на  $180^\circ (\pi)$  получим новое кв-во, которое задаётся новой фигуру  $\Phi'$ .

$$x \rightarrow -x$$

замена при повороте на  $\pi$  омн. масла квадратам, т.к.

$$y \rightarrow -y \quad \text{изменяет т.к. } (x, y) \text{ пересадит в } (-x, -y)$$

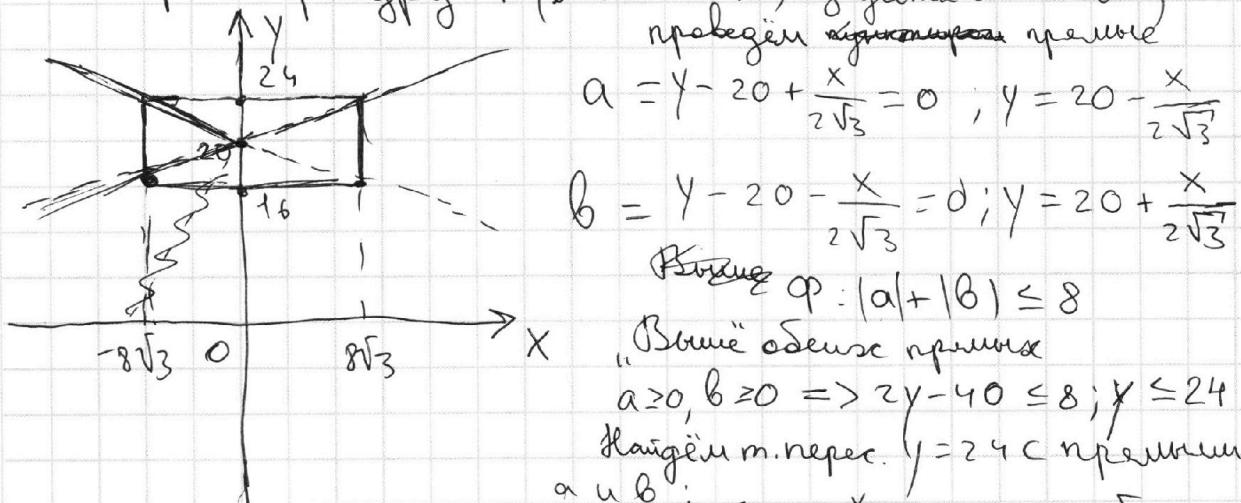
$$\Phi': \left| -y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \right| + \left| -y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \right| \leq 8$$

$$\left| y + \frac{x}{2\sqrt{3}} + 20 \right| + \left| y - \frac{x}{2\sqrt{3}} + 20 \right| \leq 8$$

Найдем квадрат

Построим фигуру  $\Phi$  (схематично, без учета масштаба)

праведём прямые



$$a = y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} = 0, y = 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}$$

$$b = y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} = 0; y = 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}$$

Решение  $\Phi: |a| + |b| \leq 8$

"Внеш" обеих прямых

$$a \geq 0, b \geq 0 \Rightarrow 2y - 40 \leq 8; y \leq 24$$

Найдём т.перес.  $y = 24$  с прямими  $a$  и  $b$ :

$$20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} = 24; x = 8\sqrt{3}$$

$$20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} = 24; x = 8\sqrt{3}$$

"Наруж" обеих прямых:

$$a \leq 0, b \leq 0$$

$$-2y + 40 \leq 8; y \geq 16$$

аналогично, т.перес.  $y = 16$  с  $a$  и  $b$ :  $(-8\sqrt{3}, 16) \cup (8\sqrt{3}, 16)$

левее "обеих прямых":

$$a \leq 0, b \geq 0$$

$$-\frac{2x}{2\sqrt{3}} \leq 8; x \geq -8\sqrt{3}$$

"Правее" обеих прямых:

$$a \geq 0, b \leq 0$$

$$\frac{2x}{2\sqrt{3}} \leq 8; x \leq 8\sqrt{3}$$

Фигура  $\Phi$  ограничена — <sup>т.к. две стороны параллельны и верти</sup> параллельными, <sup>и 2 верт.</sup> ограниченными <sup>сторонами параллельными, соседние</sup> <sup>сторонами параллельными</sup> <sup>сторонами параллельными</sup>

прямыми  $y = 16, y = 24$  и  $x = -8\sqrt{3}, x = 8\sqrt{3}$

сторонами параллельными, соседние



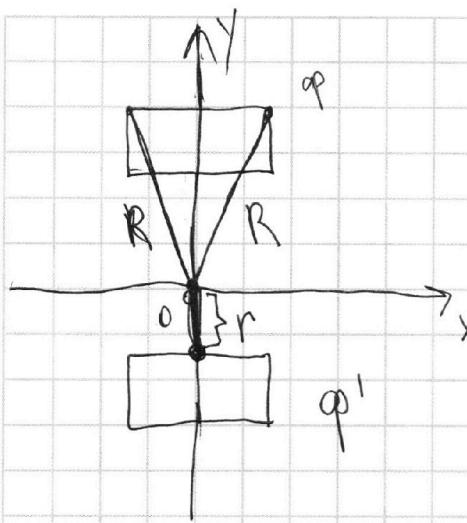


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



У первой окружности радиус  $R$ , у второй  $r$ .  
(в прямоугольнике, очевидно, находятся точки, удалённые от  $(0;0)$  на  $x \in [r; R]$ )

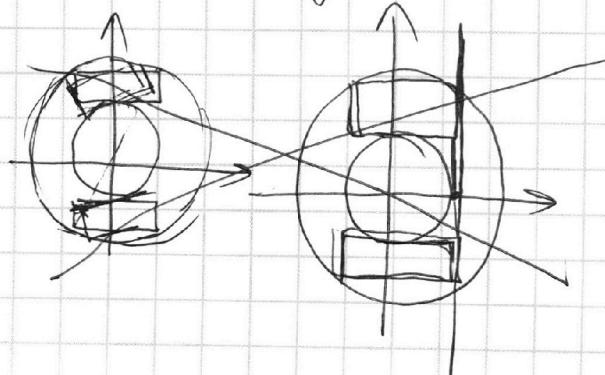
Очевидно, что максимум удалённых точек от  $(0;0)$  лежат на  $y = 24$  и на  $x = 8\sqrt{3}$  (либо сим. на  $y = -24$  и  $x = -8\sqrt{3}$ ).

Максимальное радиус  $R = \sqrt{24^2 + (8\sqrt{3})^2} = \sqrt{8^2(3^2 + 3)} = 16\sqrt{3}$ .

Намеченная удалённая точка от  $(0;0)$  — точка  $(0; 16)$ .

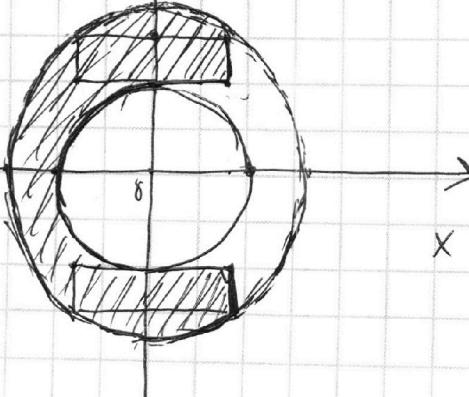
$$r = 16.$$

~~Искаженное полукольцо~~  $S = \pi R^2 -$



Искаженное полукольцо

$S$  заштриховано



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

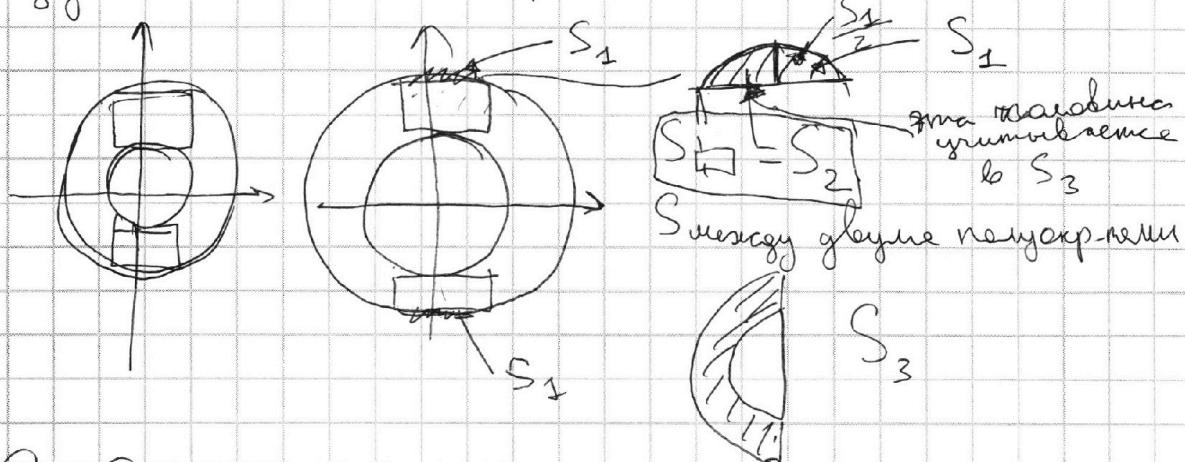


- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Разделим  $S$  на части, которые можно посчитать:



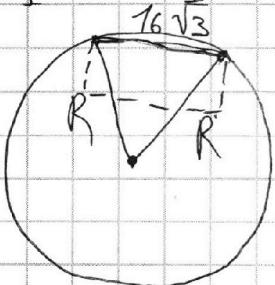
$$S = S_1 + S_2 + S_3$$

$\downarrow$  второе падение  $S_2$  учитывается  
в  $S_3$

$$S_3 = \frac{1}{2}(\pi R^2 - \pi r^2) = 256\pi$$

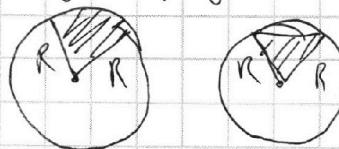
$$S_2 = S_{\square} = (24-16)(8\sqrt{3} - (-8\sqrt{3})) = 8 \cdot 16\sqrt{3} = 128\sqrt{3}$$

$S_1 \approx S_1$ :



$R = 16\sqrt{3} \Rightarrow$  треугольник равнобедренный, угол между радиусами  $60^\circ$ .

Тогда  $S_1 = \text{площадь сектора минус}$   
 $\text{площадь треугольника}$



$$S_{\text{сектора}} = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot \pi R^2 = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 256 \cdot 3 = 128\pi$$

$$S_{\text{треуг}} = \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 256 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 192\sqrt{3}$$

$$S = 256\pi + 128\sqrt{3} + 128\pi - 192\sqrt{3}; \quad \text{Ответ: } S = 384\pi - 64\sqrt{3}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$y + \frac{x}{2\sqrt{3}} = 20$$

$$y = 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}$$

$$\frac{x}{2\sqrt{3}} = 20$$

$$y - \frac{x}{2\sqrt{3}} = 20$$

$$y = 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}$$

$$y - \frac{x}{2\sqrt{3}} \geq 20 \quad \times$$

$$y + \frac{x}{2\sqrt{3}} \geq 20 \quad \checkmark$$

$$y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} = y + 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}$$

$$2y - 40 \leq 8$$

$$-2y + 40 \leq 8$$

$$8\sqrt{2} =$$

$$8 \cdot 2\sqrt{3} =$$

$$x = 8\sqrt{3} \cdot 16\sqrt{3}$$

$$\frac{x}{\sqrt{3}} \leq 8$$

$$x \leq 8\sqrt{3}$$

$$y \geq 16 \quad \frac{x}{2\sqrt{3}} = 4$$

$$20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} = 24$$

$$\pi R^2 - \pi r^2 =$$

$$160\pi - 16\pi$$

$$20 - y - \frac{x}{2\sqrt{3}} + y \cdot 20$$

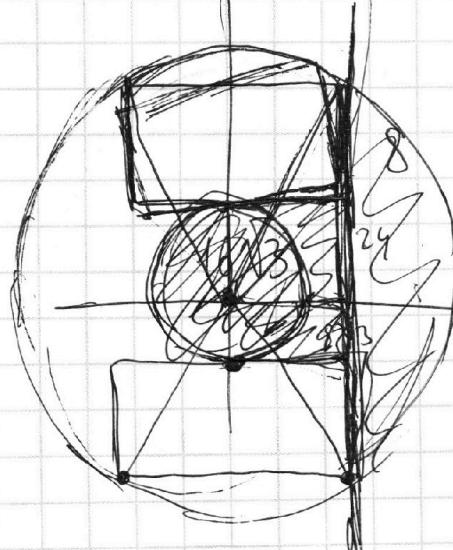
$$64 + 256 \cdot 3 =$$

$$\times 64$$

$$64(1 + 3 \cdot 64) = 13 \cdot 64$$

$$24^2 + 8^2 \cdot 3 = 8^2 \cdot 3^2 + 8^2 \cdot 3 =$$

$$8^2 \cdot 10 = \\ 160$$



$$\sqrt{160}$$

I-



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

I-

I-

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} xy &= -6x + z^2 \\ yz &= -6x + x^2 \\ zx &= -6y + y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2xy + 2yz + 2zx &= -x^2 - y^2 - z^2 \\ 25 - 30 + 4 &= \\ -5 + 4 &= -1 \\ (x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$yz + xy + zx - 6z - 6y \approx 36 \quad \text{или} \quad 36 \cdot 3$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ 999 \dots 999 \\ \hline 49 \end{array} \quad \begin{array}{r} 69 \\ 182 \\ 152 \\ 152 \\ \hline 167 \end{array} \quad \begin{array}{r} 128 \\ 39 \\ \hline 167 \end{array}$$

$$z-6 = \frac{xy}{z} \quad 125 - 4 \cdot 25$$

$$\left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{zx}{y}\right)^2 = n$$

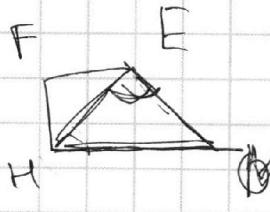
$$\left(\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}\right)^2 = n^2 + 2 \cdot \frac{xyz}{zx} + 2z^2 + 2x^2$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ 82 \\ 82 \\ \hline 165 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 12x - 12y - 12z \\ 18 \\ 18 \\ 18 \\ \hline 324 \end{array}$$

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx =$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z$$

$$25 - 20$$



$$\frac{DH}{AB} = 0,9$$

$$\sin \angle FAD = 0,9$$

$$=(2 \cdot 94) \frac{\pi}{4} = \left(2 \cdot 94 - 8 \cdot 94\right) \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{AC}{PC}$$

$$\sqrt{33}, \sqrt{34}$$

$$\frac{DF}{AD} = \sin \angle$$

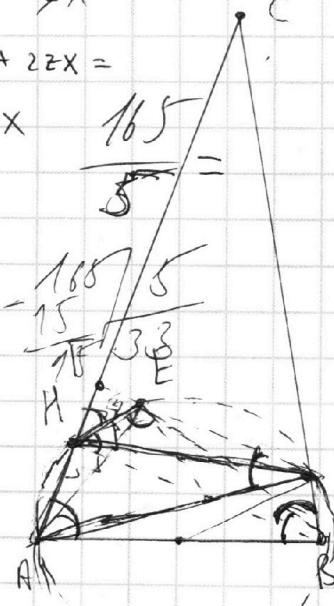
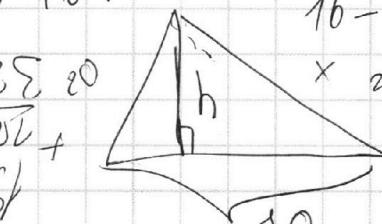
$$\begin{array}{r} 250 \\ 250 \\ + 6 \cdot 85 \\ \hline 250 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ 18 \\ 18 \\ 324 \\ \hline 18 \\ 18 \\ 18 \\ \hline 324 \\ AF = ? \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 400 \\ 324 \\ \hline 76 \\ 76 \\ \hline 4 \\ 36 \\ 36 \\ \hline 4 \\ 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 59,65 \\ 45 \\ \hline 145 \\ 145 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\frac{DF}{AD} = \frac{DH}{AB}$$



$$\triangle CDH \sim \triangle CAB$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - 4a)x + (a^2 - 6a + 4) = 0$$

$$5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - (2a^3 + 6a + 15) = 0$$

$$x_6 + x_7 = a^2 - 4a$$

$$D = (a^2 - 4a)^2 - 4(a^2 - 6a + 4) =$$

$$x_6 \cdot x_7 = a^2 - 6a + 4$$

$$a^4 - 8a^3 + 16a^2 - 4a^2 + 24a - 16 =$$

$$a^4 - 8a^3 + 12a^2 + 24a - 16 =$$

$$16 - 64 + 48 + 48 - 16 > 0$$

$$16 + 64 + 48 - 48 - 16 > 0$$

$$x_5 + x_8 = (a^3 - 4a^2)$$

запись  
найдено

$$x_5$$

$$x_6 = x_5 + x$$

$$x_6 + x_7 = x_5 + x_8$$

$$14; 15$$

$$x_7 = x_5 + 2x$$

$$5; 6$$

$$x_8 = x_5 + 3x$$

$$x_8 - x_7 = x_8 - x_6 = x_6 - x_5$$

$$10; 12$$

$$a^2 - 4a + a^3 - 4a^2 =$$

$$(a^2 - 4a)(a + 1) = a(a - 4)(a + 1) = \frac{(x_5 + x_8) \cdot 4}{2} \approx 14$$

$$15; 18$$

$$a^3 - 4a^2 - a^2 + 4a = x_8 + x_5 - x_6 - x_7 = 0$$

$$\sqrt{205} - \sqrt{29} =$$

$$a(a - 4)(a - 1) = 0$$

0  
1  
4

$$\frac{176}{\sqrt{205} + \sqrt{29}} = 2\sqrt{29}$$

$$\frac{\overline{205}}{\overline{176}} = \frac{\overline{205}}{\overline{176}} = \frac{\overline{205}}{\overline{176}}$$

$$5(36\sqrt{2})$$

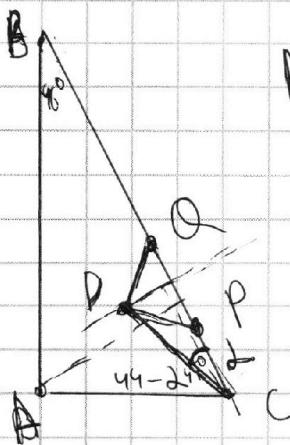


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AB = BP \quad (\text{окр-мин}) \quad A \quad \frac{yz}{x} - \frac{x^2}{yz} = \\ AC = CQ \quad p \text{ окв} \quad \frac{yz}{x} + \frac{x^2}{yz} = \\ \text{AH-рад. окв} \quad \frac{yz}{x} - \frac{x^2}{yz} = \\ \frac{yz}{x} + \frac{x^2}{yz} =$$

$$\begin{cases} xy + 6z \geq 0 \\ x^2 = -6z + z^2 \\ xz = -6x + x^2 \\ zx = -6x + x^2 \end{cases} \quad x = \sqrt{z^2 - 6z}$$

$$\left( \frac{xy}{z} \right)^2 + \left( \frac{yz}{x} \right)^2 + \left( \frac{zx}{y} \right)^2 = \\ (z+6)\sqrt{z^2 - 6z}$$

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2 \\ yz = -6x + x^2 \\ zx = -6y + y^2 \end{cases} \quad \left( \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \right)^2 - 2(xy + yz + zx) = 2(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\left( \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \right)^2 - 2(xy + yz + zx) - 12(x+y+z)$$



$$xy \geq -6z \quad xy + 6z \geq 0 \quad \frac{z(-x-y)}{xy} = 1 \\ \frac{xy}{z} \geq -6 \quad yz + 6x \geq 0 \quad X^3 + Y^3 + Z^3 = \\ \frac{z(y^2 - x^2)}{xy} = x - y$$

$$(x-y-z)$$

$$\left( (x^2 - 2xy + y^2) - z \right)^2 = -2x - 2y = xy$$

$$(x-y-z)(x-y-z) = x^2 - xy - xz + y^2 - yz + \\ z^2 - 2x + 2y$$