



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x + 3)^2 + (y + 3)^2 + (z + 3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарик. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leq 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

N1

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases}$$

$$xy \cdot yz \cdot zx = (3z + z^2)(3x + x^2)(3y + y^2)$$

$$\begin{aligned} x^2 y^2 z^2 &= 24xyz + 9(xy z^2 + xy^2 z + x^2 yz) + 3(x^2 y^2 z + x^2 y z^2 + \\ &+ xy^2 z^2) + x^2 y^2 z^2 \quad |:3xyz \quad (x, y, z \neq 0 \text{ по усл.}) \end{aligned}$$

$$9 + 3(x + y + z) + xy + yz + xz = 0$$

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = x^2 + 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 + z^2 + 6z + 9 =$$

$$= x^2 + 3x + y^2 + 3y + z^2 + 3z + 3(x + y + z) + 9 + 9 + 9 = xy + yz + xz +$$

$$+ 3(x + y + z) + 9 + 18 = 18$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \frac{AD}{AF} = \frac{AB}{AE} = \frac{5}{\sqrt{11}} \Rightarrow \frac{AD^2}{AF^2} = \frac{36}{11}$$

$$\begin{cases} AD^2 + DC^2 = AC^2 \\ FC^2 + FD^2 = DC^2 \\ AF^2 + FD^2 = AD^2 \\ \frac{AD^2}{AF^2} = \frac{36}{11} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{AD^2} + \cancel{DC^2} DC^2 = (AC^2 - AF^2) + FD^2 \\ AD^2 + (AC - AF)^2 + FD^2 = AC^2 \\ AF^2 + FD^2 = AD^2 \\ AD^2 = \frac{36}{11} AF^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} AD^2 + \cancel{100} - 20AF + AF^2 + \cancel{FD^2} = \cancel{100} \\ AF^2 + FD^2 = AD^2 \\ AD^2 = \frac{36}{11} AF^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2AD^2 = 20AF \\ AD^2 = \frac{36}{11} AF^2 \end{cases}$$

$$\frac{36}{11} AF^2 = 10AF$$

$$AF = \frac{110}{36} = \frac{55}{18}$$

$$\text{Ответ: } \frac{55}{18}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

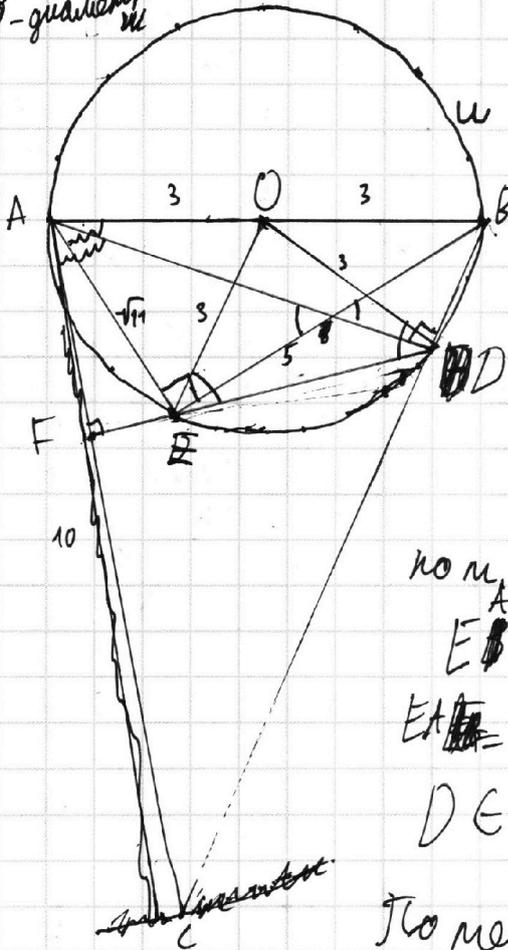
Дано:

w -окр.
 AB -диаметр w

$AB=6$ $BC \perp w = \{ED\}$ $AC=10$ O -центр w

$F \in AC$ $FD \perp w = \{E\}$

w $FD \perp AC$ $BE=5$



Найти:

AF -?

Решение:

AB -диаметр w , $E \in w \Rightarrow \angle AEB = 90^\circ$

по т. Пифагора $AE^2 + BE^2 = AB^2$

$$AE^2 = AB^2 - BE^2$$

$$AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{6^2 - 5^2} = \sqrt{36 - 25} = \sqrt{11}$$

$D \in w$, AB -диаметр $w \Rightarrow \angle ADB = 90^\circ$

По теореме Пифагора

$$\begin{cases} AD^2 + DC^2 = AC^2 \\ FC^2 + FD^2 = DC^2 \\ AF^2 + FD^2 = AD^2 \end{cases}$$

Плоскость $\angle BAE = \dots$

$AO = OE$ как радиусы $\Rightarrow \angle AOE = \dots$

$\Rightarrow \angle AOE = 90^\circ - \frac{\angle AOE}{2}$... $\angle FAD = 90^\circ - \angle FDA = 90^\circ - \frac{\angle AOE}{2} =$

$= \angle OAE \Rightarrow \angle FAE = \angle FAD - \angle EAD = \angle EAO - \angle EAD = \angle BAD \Rightarrow$

прямоугольные треугольники ADB и AFE подобны \Rightarrow



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4 Пусть n -к-во коробок всего
 изначально нам необходимо выбрать 5 коробок. У нас
 есть C_n^5 вариантов это сделать. ~~Правильные~~ Выигрыш-
 ными будут C_{n-3}^2 вариантов, т.к. 3 коробки из них
 выбранных должны быть с призом, т.е. мы
 можем выбрать любые 2 коробки из оставших-
 ся $n-3$ коробок, т.е. вероятность выиграть $\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}$.
 Аналогично вероятность выиграть выйдя
 и коробки = $\frac{C_{n-3}^3}{C_n^6}$

$$\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{C_{n-3}^3}{C_n^6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{\frac{(n-3)!}{2!(n-5)!}}{\frac{n!}{5!(n-5)!}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5!(n-5)!}{n!} = \frac{1}{2} \cdot \frac{120}{n(n-1)(n-2)} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$$

Ответ: в 2 раза



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Изменим систему координат на $(x-a; \frac{y}{a})$, тогда
центр квадрата перейдет в $(a; 0)$, а $a \neq$



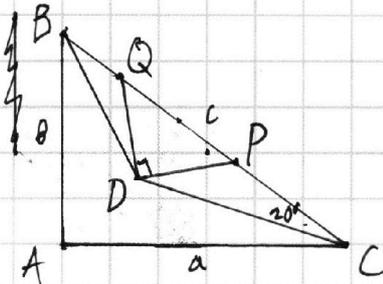
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4



Дано:

$\angle BAC = 90^\circ$ $Q, P \in BC$ $BP = BA$
 $QC = CA$ $DP = DQ$ $\angle PDQ = 90^\circ$
 $\angle DCB = 20^\circ$

Найти: $\angle DBQ$

Решение:

Пусть $AC = a$, $AB = b$, $BC = c$

$DP = DQ \Rightarrow \triangle DPQ - \text{P/B} \Rightarrow \angle DQP = \angle DPQ = 90^\circ - \frac{\angle QBP}{2}$

$= 90^\circ - \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ \Rightarrow DQ = PD = \frac{QP}{\sqrt{2}}$ и $\angle DPC = 180^\circ - \angle DPQ = 180^\circ - \angle DQP = \angle DQB = 135^\circ$

$\frac{DP}{PC} = \frac{DQ}{QC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Докажем, что

$$\frac{DP}{PC} = \frac{BQ}{QD}$$

$$\frac{QP}{\sqrt{2} \cdot PC} = \frac{BQ}{\sqrt{2} \cdot QD}$$

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} = (c - a)(c - b)$$

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + ab - ac - bc = \frac{c^2}{2} + \frac{c^2}{2} + ab - ac - bc$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \quad \text{н.м.ф.} \Rightarrow \frac{BQ}{QD} = \frac{DP}{PC}$$

$$\angle BQD = \angle DPC \Rightarrow \triangle BQD \sim \triangle DPC \Rightarrow \angle QBD = \angle PDC = 180^\circ - \angle DPC - \angle PCQ = 180^\circ - 135^\circ - 20^\circ = 25^\circ$$

Ответ: 25°



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{\frac{(n-3)(n-4)}{2}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120}} = \frac{60}{n(n-1)(n-2)}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\frac{-b + \sqrt{D}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = 2$$

$$\frac{C_{n-3}^3}{C_n^6} = \frac{\frac{(n-2)(n-4)(n-5)}{6}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{720}} = \frac{120}{n(n-1)(n-2)}$$

$$\frac{6-5-4}{120} = \frac{-b + \sqrt{D} + b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{2\sqrt{D}}{2a} = \frac{\sqrt{D}}{a}$$

$$\frac{a^2 - a + \sqrt{a^4 - 2a^3 + a^2 - 4a + 20}}{2} - a^2 - a = 2$$

$$\frac{25}{16} = \frac{a^2}{16}$$

$$\sqrt{a^4 - 2a^3 + a^2 - 4a + 20} = \sqrt{16a^6 - 2a^5 - 3a^4 - 32a^2 + 16a + 64}$$

$$16a^4 - 2a^3 + a^2 - 4a + 20 = 16a^6 - 50a^5 - 445a^4 - 800a^2 + 1600$$

$$425a^6 - 50a^5 - 801a^4 + 32a^3 - 916a^2 + 1280a - 1600 = 0$$

1600	200	20a^4	-50 + 45	434	31 · 16	425 - 425	31
1600	200	20a^4	-50 + 100	-8468 +	16	-346 + 346	25
425 - 425				26	48		45
345 - 345				13944	496	806	445
-426 + 426					1200		
425 - 50 - 801					1	34	1
					1	25	2
						26	3
						34	4
						38	5

$$16(2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4) = 16(a^6 - 2a^4 - 2a^2 + 4)$$

$$425 - 340 = 290 - 232 = 58$$

$$800 - 1600 = -800$$

$$1630 - 3260 = -1630$$

$$25a^2 - 16a + 32$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 + z^2 + 6z + 9 = xy + yz + xz + 2(x+y+z) + 24$$

$+24$

C_n^5

$\frac{C_n^2}{C_n^5}$

$\frac{C_n^3}{C_n^6}$

$999 \cdot 999 = 2471$

$111 \cdot 111 = 12321$

$11^3 = 1331$

$111^3 =$

$(x+y)(x+z) = x^2 + yz + xy + xz$

~~111~~

$(x+y+z)^2 - 2(xy+yz+xz) = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy+yz+xz) - 2(xy+yz+xz)$

$18 \cdot 3 = 54$

$(x+y+z)^2 + 4(x+y+z) + 24$

$x^2 + y^2 + z^2 + 3x + 3y + 3z = xy + yz + xz$

$xy + yz + xz = x^2 + y^2 + z^2 + 3xy + 3yz + 3xz$

$+ 3xy^2z^2 + 9xyz^2 + 9xy^2z + 9x^2yz +$

$+ 24xyz$

$\angle AOE = 180^\circ - \angle AOB$

$\angle OAE = 90^\circ - \frac{\angle AOB}{2}$

$3xy + 3xz + 3yz + 9(x+y+z)$

$24 = 0$

AF FD AD
BD DE

$xy + xz + yz + 3(x+y+z) + 9 = 0$

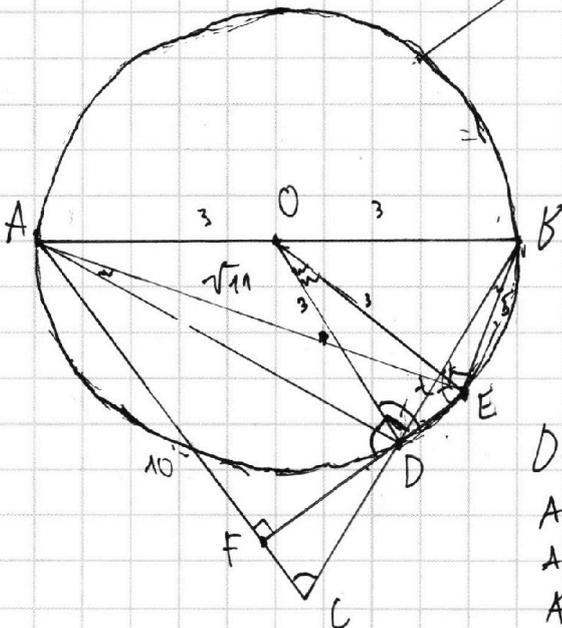
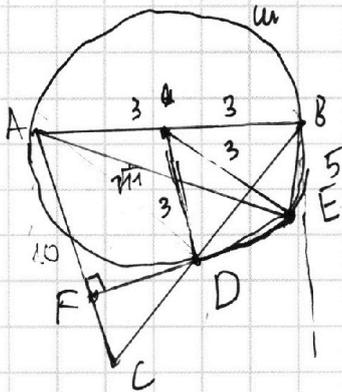
$DC^2 + AD^2 = 100$

$AD^2 + BD^2 = 36$

$AD^2 = AF^2 + FD^2$

$AF^2 + FD^2 + 2FD \cdot DE + DE^2 = 11$

$\frac{AD}{AF} = \frac{B}{\sqrt{11}}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$(x+y) + |x-y| \leq 4$
 $AD^2 + DC^2 = 100^2$
 $AD^2 + BD^2 = 36^2$
 $AF^2 + FD^2 = AD^2$
 $AD^2 + 2FD \cdot DE + DE^2 = 100^2$
 $100 - 20AF = AF^2 + FD^2 = DC^2$
 $\frac{AD}{FB} = \frac{6}{\sqrt{11}}$
 $AD^2 + DC^2 = 100$
 $100 - 20AF + AF^2 + FD^2 = DC^2$
 $AF^2 + FD^2 = AD^2$
 $\frac{AD^2}{AF^2} = \frac{36}{11}$
 $2AD^2 = 20AF$
 $2 \cdot \frac{36}{11} AF^2 = 20AF$
 $2 \cdot 36 AF = 220$
 $AF = \frac{55}{18}$

$AD \parallel DC$
 $BD \parallel FD$
 $AF \parallel DE$

$x > y$
 $x > -y$

$x > 0$
 $y > 0$

$(9\sqrt{5})^2 = 243 \cdot 5 = 1215$
 $243 \cdot 64 = 15552$
 $= 304$
 $\times 14$
 $\times 14 \sqrt{304}$
 $\frac{119}{8}$
 14
 $8; -$
 289
 $64 - 304 \cos^2$
 $= 256$
 $\times 141$
 $\times 141$
 3508
 119
 141
 29241
 2345
 290584
 29929
 123
 $1,43 \cdot 9$
 $15,54$
 111
 111
 12321
 1111111111
 1111111111
 1111111111
 1111111111
 1111111111
 1111111111
 $\sqrt{9^2 + 48^2}$
 145
 $29 \cdot 5$

$(x-a) + \frac{y}{b} + |(x-a) - \frac{y}{b}|$
 $a=2, b=2$
 $\pi r^2 \cdot \frac{h}{d}$
 $(\frac{15}{2}; 0)$
 $18\sqrt{3}$
 1

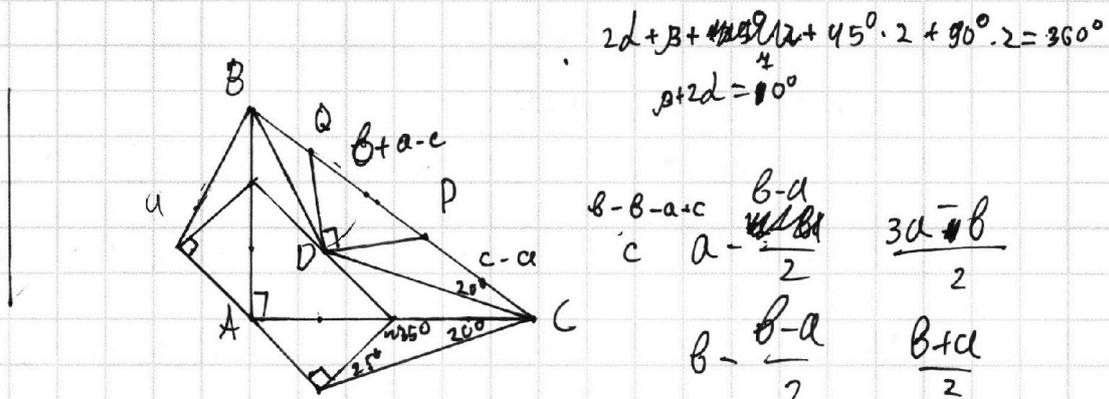


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{\frac{b+a-c}{\sqrt{2}}}{c-b} = \frac{c-a}{\frac{b+a-c}{\sqrt{2}}}$$

$$\frac{b+a-c}{2} = \frac{a-b+c}{2}$$

$$\frac{b-a+c}{2}$$

13
19/31

$$\frac{(b+a-c)^2}{2} = c^2 - cb - ca + ab$$

$$\frac{b^2 + c^2 + a^2}{2} + ab - ac - bc = \frac{c^2}{2} + \frac{c^2}{2}$$

$$\frac{BQ}{QD} = \frac{c-a}{a+b-c} \cdot \sqrt{2} = \frac{2c-2a}{a+b-c} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$