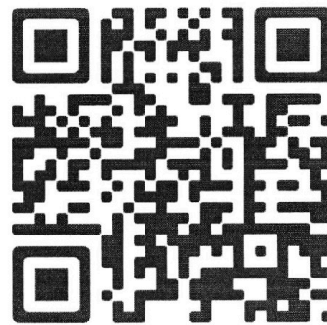




МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Ненулевые числа  $x, y, z$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения  $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$ , если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа  $n$  состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа  $n^3$ ?
3. [5 баллов] Окружность  $\omega$  с диаметром  $AB$  пересекает сторону  $BC$  остроугольного треугольника  $ABC$  в точке  $D$ . Точка  $F$  выбрана на отрезке  $AC$  так, что  $DF \perp AC$ , а  $E$  — точка пересечения отрезка  $DF$  с окружностью  $\omega$ , отличная от  $D$ . Найдите  $AF$ , если  $AC = 10$ ,  $AB = 6$ ,  $BE = 5$ .
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых корни уравнения  $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$  являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения  $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$  являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура  $\Phi$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют неравенству  $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leq 3$ . Фигуру  $\Phi$  непрерывно повернули вокруг начала координат на угол  $\pi$  против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура  $\Phi$  при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе  $BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  выбраны точки  $P$  и  $Q$  так, что  $AB = BP$ ,  $AC = CQ$ . Внутри треугольника  $ABC$  выбрана точка  $D$ , для которой  $DP = DQ$ , а  $\angle PDQ = 90^\circ$ . Найдите  $\angle DBC$ , если известно, что  $\angle DCB = 20^\circ$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases}$$

$$xy \cdot yz \cdot zx = (3z + z^2)(3x + x^2)(3y + y^2)$$

$$\cancel{x^2 y^2 z^2} = 24xyz + 9(xy z^2 + xy^2 z + x^2 yz) + 3(x^2 y^2 z + x^2 y z^2 + x y^2 z^2) + \cancel{x^2 y^2 z^2} \quad |:3xyz \ (x, y, z \neq 0 \text{ по усл.})$$

$$9 + 3(x + y + z) + xy + yz + xz = 0$$

$$\begin{aligned} (x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 &= x^2 + 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 + z^2 + 6z + 9 = \\ &= x^2 + 3x + y^2 + 3y + z^2 + 3z + 3(x + y + z) + 9 + 18 = xy + yz + xz + \\ &+ 3(x + y + z) + 9 + 18 = 18 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \frac{AD}{AF} = \frac{AB}{AE} = \frac{5}{\sqrt{11}} \Rightarrow \frac{AD^2}{AF^2} = \frac{36}{11}$$

$$\begin{cases} AD^2 + DC^2 = AC^2 \\ FC^2 + FD^2 = DC^2 \\ AF^2 + FD^2 = AD^2 \\ \frac{AD^2}{AF^2} = \frac{36}{11} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{AD^2} + \cancel{DC^2} = (AC^2 - AF^2) + \cancel{FD^2} \\ \downarrow AD^2 + (AC^2 - AF^2) + \cancel{FD^2} = AC^2 \\ \downarrow AF^2 + \cancel{FD^2} = AD^2 \\ AD^2 = \frac{36}{11} AF^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} AD^2 + \cancel{100} - 20AF + AF^2 + \cancel{FD^2} = \cancel{100} \\ AF^2 + \cancel{FD^2} = AD^2 \\ AD^2 = \frac{36}{11} AF^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2AD^2 = 20AF \\ AD^2 = \frac{36}{11} AF^2 \end{cases}$$

$$\frac{36}{11} AF^2 = \frac{10}{1} AF$$

$$AF = \frac{110}{36} = \frac{55}{18}$$

$$\text{Ответ: } \frac{55}{18}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

Дано:

$\omega$ -окр.  
AB-диаметр  $\omega$

$$AB=6$$

$$BC \cap \omega = \{D\}$$

$$AC=10$$

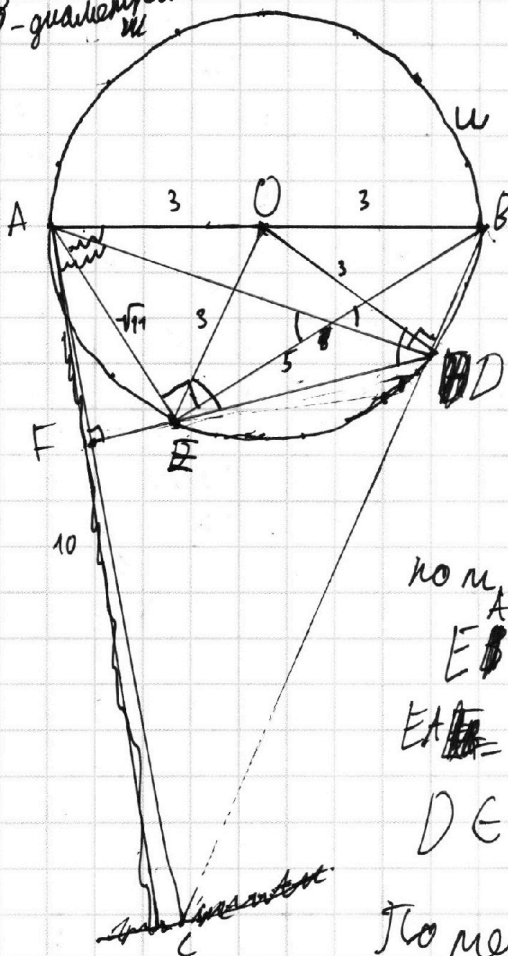
O-центр  $\omega$

$$F \in AC$$

$$FD \cap \omega = \{E\}$$

$$FD \perp AC$$

$$BE=5$$



Найти:

$$AF=?$$

Решение:

$$AB\text{-диаметр } \omega, E \in \omega \Rightarrow \angle AEB = 90^\circ$$

$$\text{по п. Пифагора } AE^2 + BE^2 = AB^2$$

$$AE^2 = AB^2 - BE^2$$

$$AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{6^2 - 5^2} = \sqrt{36 - 25} = \sqrt{11}$$

$$D \in \omega, AB\text{-диаметр } \omega \Rightarrow \angle ADB = 90^\circ$$

По теореме Пифагора

$$\begin{cases} AD^2 + DC^2 = AC^2 \\ FC^2 + FD^2 = DC^2 \\ AF^2 + FD^2 = AD^2 \end{cases}$$

$$\text{Также } \angle BAE = \angle BAC$$

$$AO = OE \text{ как радиусы} \Rightarrow \angle AOE = \angle BOE$$

$$\Rightarrow \angle AOE = 90^\circ - \angle AOE \text{ или } \angle ADE = \angle AOE \text{ как опирающиеся на одну дугу. } \angle FAD = 90^\circ - \angle FDA = 90^\circ - \frac{\angle AOE}{2} =$$

$$= \angle OAE \Rightarrow \angle FAE = \angle FAD - \angle EAD = \angle EAO - \angle EAD = \angle BAD \Rightarrow$$

$$\text{прямоугольные треугольники } ADB \text{ и } AFE \text{ подобны} \Rightarrow$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4 Пусть  $n$ -к-во коробок всего  
 изначально нам необходимо выбрать 5 коробок. У нас  
 есть  $C_n^5$  вариантов это сделать. ~~Правильные~~ Выигрыш-  
 ными будут  $C_{n-3}^2$  вариантов, т.к. 3 коробки из них  
 выбранных должны быть с призом, т.е. мы  
 можем выбрать любые 2 коробки из оставших-  
 ся  $n-3$  коробок, т.е. вероятность выиграть  $\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}$ .  
 Аналогично вероятность выиграть выбрав  
 4 коробки =  $\frac{C_{n-3}^3}{C_n^6}$

$$\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{\frac{(n-3)!}{2!(n-5)!}}{\frac{n!}{5!(n-5)!}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{(n-3)!}{(n-5)!}}{\frac{n!}{5!(n-5)!}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{(n-3)(n-4)(n-5)!}{(n-5)!}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)!}{5!(n-5)!}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (n-3)(n-4)}{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$$

Ответ: в 2 раза



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☐

5  
☐

6  
☒

7  
☐

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Изменим систему координат на  $(x-a; \frac{y}{a})$ , тогда  
центр квадрата перейдет в  $(a; 0)$ , а  $a \neq$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

Рассмотрим  $I \cup II$  ~~варианты~~ ~~подсоединим~~  
под неравенство  $|x+y| + |x-y| \leq a$

При  $x \geq y$  и  $x > -y$  (I часть плоскости на рис.)

$$x+y+x-y \leq a$$

$$x \leq \frac{a}{2}$$

При  $x \leq y$  и  $x > -y$  (II часть плоскости на рис.)

$$x+y-x+y \leq a$$

$$y \leq a$$

При  $x \geq y$  и  $x \leq -y$  (III часть плоскости на рис.)

$$-x-y-x+y \leq a$$

$$-2x \leq a$$

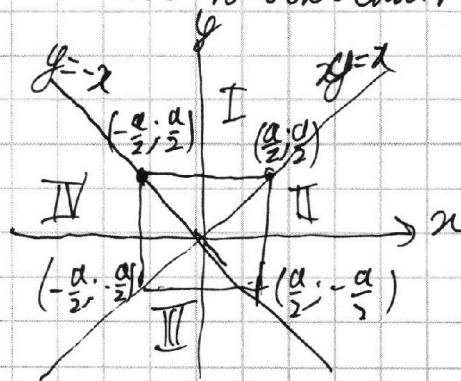
$$x \geq -\frac{a}{2}$$

При  $x > y$  и  $x < -y$  (IV часть плоскости на рис.)

$$-x-y+x-y \leq a$$

$$y \geq -\frac{a}{2}$$

Итого фигура - квадрат  
со стороной  $a$  и центром в  
центре координат





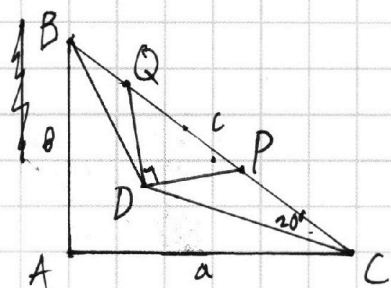
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4



Дано:

$\angle BAC = 90^\circ$   $Q, P \in BC$   $BP = BA$   
 $BQ \perp AC$   $DP = DQ$   $\angle PDQ = 90^\circ$   
 $\angle DCB = 20^\circ$

Найти:

$\angle DBQ$

Решение:

Пусть  $AC = a$ ,  $AB = b$ ,  $BC = c$

$DP = DQ \Rightarrow \triangle DPQ - \text{равнобедренный} \Rightarrow \angle DQP = \angle DPQ = 90^\circ - \frac{\angle QDP}{2}$

$= 90^\circ - \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ \Rightarrow DQ = DP = \frac{QP}{\sqrt{2}}$  и  $\angle DPC = 180^\circ - \angle DPQ =$   
 $= 180^\circ - \angle DQP = \angle DQB = 130^\circ$

$\frac{DP}{PC} = \frac{DQ}{QC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Докажем, что

$$\frac{DP}{PC} = \frac{BQ}{QD}$$

$$\frac{QP}{PC} = \frac{BQ}{QD}$$

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} = (c - a)(c - b)$$

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} + ab - ac - bc = \frac{c^2}{2} + \frac{c^2}{2} + ab - ac - bc$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☐

5  
☐

6  
☐

7  
☒

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \quad \text{н.м.г.} \Rightarrow \frac{BQ}{QD} = \frac{DP}{PC}$$

$$\angle BQD = \angle DPC \Rightarrow \triangle BQD \sim \triangle DPC \Rightarrow \angle QBD = \angle PDC = 180^\circ - \angle DPC - \angle PCQ = 180^\circ - 135^\circ - 20^\circ = 25^\circ$$

Ответ:  $25^\circ$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{\frac{(n-3)(n-4)}{2}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120}} = \frac{60}{n(n-1)(n-2)}$$

$$\frac{C_{n-3}^3}{C_n^6} = \frac{\frac{(n-2)(n-4)(n-5)}{6}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{720}} = \frac{120}{n(n-1)(n-2)}$$

$$\frac{a^2 - a + \sqrt{a^4 - 2a^3 + a^2 - 4a + 20}}{2} - a^2 - a - \frac{25}{16}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\frac{-b + \sqrt{D}}{2a} - \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} =$$

$$\frac{6 \cdot 5 - 4}{120} = \frac{-b + \sqrt{D} + b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{\sqrt{D}}{a}$$

$$\frac{-3 - 4}{\frac{25}{16}} = \frac{19}{16}$$

$$\sqrt{a^4 - 2a^3 + a^2 - 4a + 20} = \sqrt{16a^6 - 50a^5 - 144a^4 - 800a^3 + 1600a^2 + 345a - 425}$$

$$16a^4 - 32a^3 + 16a^2 - 4a + 20 = 16a^6 - 50a^5 - 144a^4 - 800a^3 + 1600a^2 + 345a - 425$$

$$425a^6 - 50a^5 - 801a^4 + 32a^3 - 916a^2 + 1280a - 425$$

$$-50 + 50$$

$$-18 + 18$$

$$-50 + 45$$

$$43$$

$$-50 + 100$$

$$-64 + 68$$

$$-26$$

$$425 - 425$$

$$345 - 345$$

$$-426 + 426$$

$$-394 + 394$$

$$-1210 + 1210$$

$$-846$$

$$64$$

$$425 - 425$$

$$345 - 345$$

$$-426 + 426$$

$$-394 + 394$$

$$-1210 + 1210$$

$$-846$$

$$64$$

$$425 - 425$$

$$345 - 345$$

$$-426 + 426$$

$$-394 + 394$$

$$-1210 + 1210$$

$$-846$$

$$64$$

$$425 - 425$$

$$345 - 345$$

$$-426 + 426$$

$$-394 + 394$$

$$-1210 + 1210$$

$$-846$$

$$64$$

$$425 - 425$$

$$345 - 345$$

$$-426 + 426$$

$$-394 + 394$$

$$-1210 + 1210$$

$$-846$$

$$64$$

$$425 - 425$$

$$345 - 345$$

$$-426 + 426$$

$$-394 + 394$$

$$-1210 + 1210$$

$$-846$$

$$64$$

$$425 - 425$$

$$345 - 345$$

$$-426 + 426$$

$$-394 + 394$$

$$-1210 + 1210$$

$$-846$$

$$64$$

$$425 - 425$$

$$345 - 345$$

$$-426 + 426$$

$$-394 + 394$$

$$-1210 + 1210$$

$$-846$$

$$64$$

$$425 - 425$$

$$345 - 345$$

$$-426 + 426$$

$$-394 + 394$$

$$-1210 + 1210$$

$$-846$$

$$64$$

$$425 - 425$$

$$345 - 345$$

$$-426 + 426$$

$$-394 + 394$$

$$-1210 + 1210$$

$$-846$$

$$64$$

$$31 \cdot 16$$

$$425 - 425$$

$$16$$

$$48$$

$$496$$

$$1200$$

$$1$$

$$1$$

$$12$$

$$34$$

$$1$$

$$801$$

$$25$$

$$2$$

$$89.9$$

$$26$$

$$3$$

$$34$$

$$4$$

$$38$$

$$5$$

$$16(2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4)$$

$$16(a^6 - 2a^4 - 2a^2 + 4)$$

$$58$$

$$425 - 340$$

$$290 - 232$$

$$-469$$

$$2 \cdot 25$$

$$4 \cdot 25$$

$$232$$

$$25a^2 - 16a + 32$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 + z^2 + 6z + 9 = xy + yz + xz + 3x + 3y + 3z + 27$$

124

$C_n^5$

$\frac{C_n^2}{C_n^5}$

$\frac{C_n^3}{C_n^6}$

$999 \cdot 999 = 2471$

111.111 = 12321

11<sup>3</sup> = 1331

111<sup>3</sup> =

$(x+y)(x+z)(y+z)$

124

$$(x+y+z)^2 - xy - yz - xz = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$$

$+ 2xy + 2$

$16 \cdot 3 = 524$

$$(x+y+z)^2 + 4(x+y+z) + 24$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3x + 3y + 3z = xy + yz + xz$$

$$x^2 y^2 z^2 = x^2 y^2 z^2 + 3x^2 y^2 z + 3x^2 y z^2 + 3x y^2 z^2 + 3x y^2 z + 9xyz$$

$$+ 3x y^2 z^2 + 9xyz + 9xyz + 4x^2 yz + 24xyz$$

$\angle AOE = 180^\circ - \angle AOB$

$\angle OAE = 90^\circ - \frac{\angle AOB}{2}$

$$3xy + 3xz + 3yz + 9(x+y+z) = 24$$

$24 = 0$

AF FD AD  
BD DE

$$xy + xz + yz + 3(x+y+z) = 0$$

$$DC^2 + AD^2 = 100$$

$$AD^2 + BD^2 = 36$$

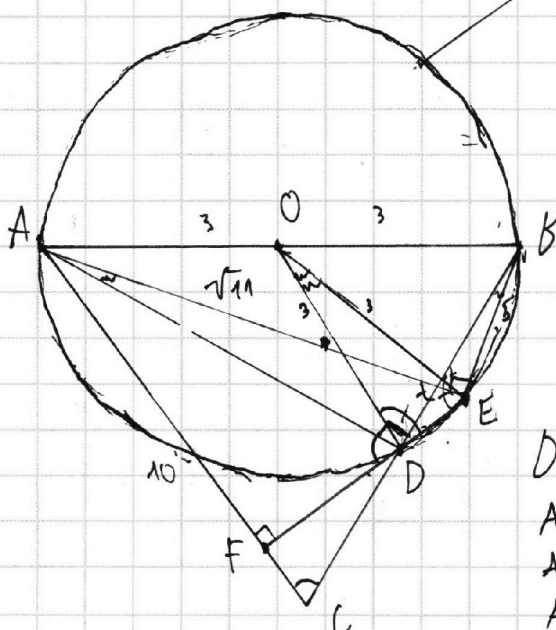
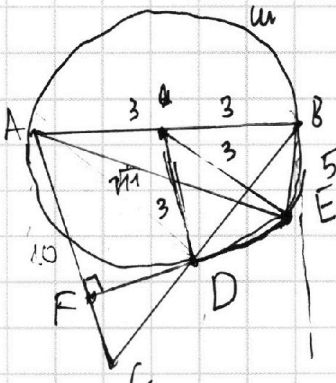
$$AD^2 = AF^2 + FD^2$$

$$AF^2 + BD^2 + 2FD \cdot DE + DE^2 = 11$$

$\frac{11}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{2} = 11$

$$100 - 20AF + AF^2 + FD^2 = CD^2$$

$$\frac{AD}{AF} = \frac{6}{\sqrt{11}}$$









На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$2d + B + 45^\circ \cdot 2 + 90^\circ \cdot 2 = 360^\circ$   
 $B + 2d = 90^\circ$

$\frac{b+a-c}{\sqrt{2}} = \frac{c-a}{\frac{b+a-c}{\sqrt{2}}}$

$\frac{b+a-c}{2} = \frac{a-b+c}{2}$

$\frac{b-a+c}{2}$

$\frac{b^2+c^2+a^2}{2} + ab - ac - bc = \frac{c^2}{2} + \frac{c^2}{2} -$

$\frac{BQ}{QD} = \frac{c-a}{a+b-c} \cdot \sqrt{2} = \frac{2c-2a}{a+b-c} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

13  
 19/31