



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.
4. [4 балла] В теленгра ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарику. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leqslant 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипotenузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

1 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

N1

$$\begin{cases} xy = z(z+3) \\ y^2 = x(x+3) \\ 2x = y(y+3) \end{cases}$$

↓ Перенесли в левую часть

$$x^2y^2 = xy^2(z+3)(y+3)(x+3)$$

↓ поделил на $xy^2 (x, y, z \neq 0)$

$$xy^2 = (x+3)(y+3)(z+3)$$

!!

$$xy^2 = xy^2 + 3xy + 3y^2 + 3zx + 9x^2 + 9y^2 + 9z^2 + 27$$

!!

$$3xy + 3y^2 + 3zx + 9x^2 + 9y^2 + 9z^2 + 27 = 0$$

$$xy^2 + y^2 + 2x + 3x^2 + 3y + 3z^2 + 9 = 0$$

$$z^2 + 3z + x^2 + 3x + y^2 + 3y + 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 9 = 0$$

↓ прибавили 18 к обеим частям левой

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 + z^2 + 6z + 9 = 18$$

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = 18$$

Получается если система уравнений
имеет решение, то Ответ: 18

Ответ: 18

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.



- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

N2

Представим наше число $999\dots 9$ как

$10^{40000} - 1$ (легко убедиться, что эти числа равны)

Возьмем 6 кубов: $(10^{40000} - 1)^3 = 10^{120000} - 3 \cdot 10^{80000} + 3 \cdot 10^{40000} - 1$

Теперь посчитаем количество девяток (цифр 9):

$$\begin{array}{r} 1) \quad 100\dots 000\dots 000 \\ - 300000\dots 0 \\ \hline 10^{120000} - 3 \cdot 10^{80000} \end{array} \quad \begin{array}{r} 2) \quad 99999\dots 9700\dots 00 \\ + 30000 \\ \hline 99999\dots 9700\dots 30000 \end{array}$$

1-секунд 80000-нуль
-девяток

Кол-во 9-ток
не уменьшилось

Чотные числа

$$\begin{array}{r} 3) \quad 9999\dots 9700\dots 03000\dots 00 \\ - 1 \\ \hline 9999\dots 97000000029999999 \end{array}$$

-40 тысяч нулей преобразились
в 9-ки

Получается всего 9-точек: $39999 + 40000 = 79.999$

Ответ: 79.999

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
3 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Dано:

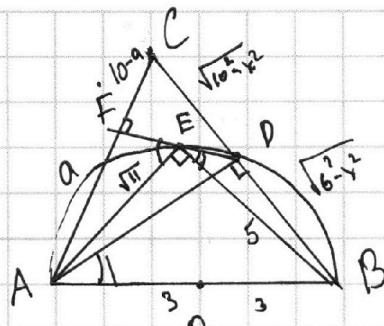
$$DF \perp AC$$

$$E \in \omega \cap FD \neq D$$

$$AC = 10$$

$$AB = 6$$

$$BE = 5$$



N3

AF = ?

$$1) \angle AED = \angle ADB = 90^\circ \quad (\text{бис. ул и н. диаметр})$$

$$2) \text{Пусть } AF = a, AD = x : \text{ Тогда:}$$

$$1) BD^2 = 6^2 - x^2 \quad (\text{п. т. квадр. б. } \triangle ADB)$$

$$2) CD^2 = 10^2 - x^2 \quad (\text{п. т. квадр. б. } \triangle ACD)$$

$$3) FD^2 = x^2 - a^2 \quad (\text{п. т. квадр. б. } \triangle AFD)$$

$$4) CD^2 = (10-a)^2 + x^2 - a^2 = 10^2 + a^2 - 20a + x^2 - a^2 = x^2 - 20a + 10^2 \quad (\text{п. т. квадр. б. } \triangle CFP)$$

$$5) AE^2 = 6^2 - 5^2 = 11 \quad CD^2 = CD^2 \Rightarrow 2) = 4 \Rightarrow x^2 - 20a + 10^2 = 10^2 - x^2 = 2x^2 - 20a = 0$$

$$3) \sin \angle AEF = \frac{a}{\sqrt{11}} = \cos \angle DEB \quad (\angle DED + \angle AEF = 90^\circ) \quad \checkmark$$

$$\cos \angle DEB = \cos \angle DAB = \left(\angle DAB = \angle DEB \text{ бис. н. огн. сим.} \right) \quad x^2 = 10a$$

$$= \frac{\sqrt{10a}}{6} = \frac{AD}{AB}$$

$$\frac{a}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{10a}}{6} \Rightarrow \frac{a}{11} = \frac{10a}{36} \Rightarrow 36a^2 - 110a = 0$$

$$a(36a - 110) = 0$$

$$a \neq 0, \text{ т.к. } 970 \text{ г. 1440}$$

$$\checkmark$$

$$a = \frac{110}{36}$$

$$\text{Ответ: } a = \frac{110}{36}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
5 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой** из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

N^o

Вероятность, что из 5 коробок, разбивая, $\frac{3}{n} \cdot \frac{2}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} \cdot (n-3) \cdot (n-4)$

вероятность вытащить 3-х цариков в наборе из 5 коробок равна $\frac{15}{n}$, т.к. вероятность, что царик в коробке равен $\frac{3}{n}$. А эта шестая - $\frac{18}{n}$, получается $\frac{18}{n} : \frac{15}{n} = \frac{6}{5}$

Ответ: $\frac{6}{5}$ раз



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
4 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой** из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

N5

Заметил, что $a_5 + a_6 = a_3 + a_8$ Тогда сумма корней уравнения соблюдается:

По Т. Виета сумма корней $= \frac{b}{a}$: Получаем?

$$\frac{a^2 - a}{1} = \frac{a^3 - a^2}{4} \Rightarrow 4a^2 - 4a = a^3 - a^2 \Rightarrow a^3 - 5a^2 + 4a = 0$$

$$\Rightarrow a(a^2 - 5a + 4) = 0 = a(a-1)(a-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=1 \\ a=4 \end{cases}$$

Поставим a и найдем разность делим.

$$5_{2da} = a+4$$

$$6_{2da} = a+5$$

!!

$$d = G_{2da} - 5_{2da}$$

$$3_{2da} = a+2$$

$$8_{2da} = a+7$$

$$5d = 8 - 3$$

$$d = \frac{8-3}{5}$$

$$1) \text{yp: } x^2 - 5 = 0 \quad x = \sqrt{5} \quad x = -\sqrt{5} \Rightarrow d_1 = 2\sqrt{5} / d_2 = -2\sqrt{5} \quad d_1 = d_2$$

$$2) \text{yp: } 4x^2 - 4 = 0 \quad x = 1 \quad x = -1 = d_1 = \frac{2}{5} / d_2 = \frac{-2}{5} \text{ но } d_1 = d_2$$

противоречие

$$a=1 \Rightarrow 1) \text{yp: } x^2 - 4 = 0 \quad x = 2 / x = -2 \Rightarrow d_1 = 4 / d_2 = -4$$

$$2) \text{yp: } 4x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} / x = -\frac{1}{2} \Rightarrow d_2 = \frac{1}{5} / d_1 = \frac{1}{5} \text{ но } d_1 = d_2$$

$$a=4 \Rightarrow 1) \text{yp: } x^2 - 12x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144}}{2} \Rightarrow d_1 = \sqrt{148} / d_2 = \sqrt{148}$$

$$2) \text{yp: } 4x^2 - 48x + 512 - 32 - 4096 = \\ = x^2 - 12x + 892 \Rightarrow x = \frac{12 + \sqrt{3242}}{2} \Rightarrow d_2 = \frac{\sqrt{3242}}{5} / \frac{\sqrt{3242}}{5}$$

$$x = \frac{12 - \sqrt{3242}}{2}, \text{ но } d_1 = d_2$$

противоречие

Получается, что оба условия выполняются $\begin{cases} a=0 \\ a=1 \\ a=4 \end{cases}$, но при $a=4$ условие не выполняется. Ответ: не при каких a

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Diagram of a geometric figure with points A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z. Various segments and angles are labeled with expressions involving variables a , x , and y .

Equations and calculations:

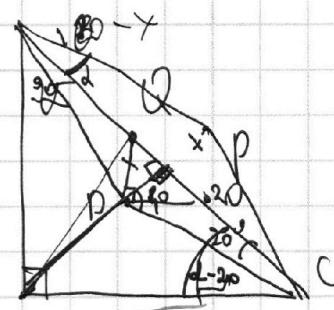
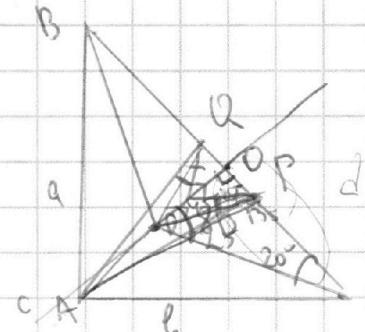
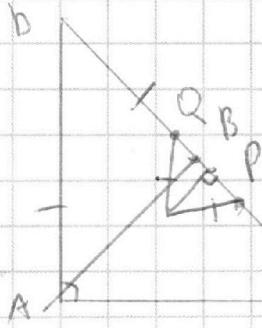
- $10a = 18 + 2\cos 90^\circ$
- $8^2 - 10a + 18 - 2x = 0$
- $4 \cos 2 = 20a$
- $-36 = 18$
- $\sqrt{11-a} = \sqrt{10a}$
- $ED^2 = 11 + 10a - 2\cos 2 \sqrt{11} \sqrt{10a}$
- $\frac{a}{\sqrt{a}} = \frac{25 + 36 - 10a}{10 - 10a}$
- $\sqrt{10(10-a)} = \sqrt{10(10-a)}$
- $11 + 10a - 2\cos 2 \sqrt{11} \sqrt{10a} = 25 + 36 - 10a - 2\cos 2 \sqrt{36 - 18}$
- $\sqrt{10a - a} = \sqrt{100 - a^2}$
- $10a = \frac{a}{\sqrt{11}}$
- $\frac{10a}{6} = \frac{a}{\sqrt{11}}$
- $AF = a^3; FC = 10 - a$
- Given $AD = x$, then: $BD = \sqrt{b^2 - x^2}$
- $CD = \sqrt{10^2 - x^2}$
- $-10a + 10^2$
- $FD = \sqrt{x^2 - a^2}$
- $BP = \sqrt{FD^2 - (0-a)^2}$
- $x^2 - a^2 + 10^2 - x^2 - 20a = 10^2 - x^2$
- $2x^2 - 20a = 0$
- $x^2 = 10a$
- $x = \sqrt{10a}$
- $3a^2 - (10-a)^2 = 10^2 - 10a$
- $3a^2 + 10^2 - 20a + a^2 = 10^2 - 10a$
- $150 - 10a$
- $\sqrt{(6-x)^2} = \sqrt{(10-x)^2}$
- $AD = x$
- $x^2 = 2 + 6$
- $x^2 = x + 6$
- $x^2 = x + 18$
- $10^2 - 50 = 0$
- $\sqrt{10a^2} + (0-a)^2 = 10^2 - 10a$
- $\sqrt{86 - 10a} = 10^2 - 10a$
- $10^2 - 50 = 0$
- $1000 = 1000$
- $11111^3 \cdot 9^3$
- $x^2 - 10a + 50 = 0$
- $x^2 - 10a + 50 = 0$
- $x^2 - 10a + 50 = 0$
- $x = \sqrt{10a - 50}$
- 111111
- $11^3 = 121 \cdot 11$
- 1210
- 121
- 1331

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2 - (a^2 - \alpha)x + a^2 - \alpha = 0 \quad (\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma)$$

$$\begin{aligned} x_1 &= a^2 \\ x_2 &= a^2 - \alpha \end{aligned}$$

$$\sqrt{x^2 - \frac{\alpha}{2} - \frac{a^2 - \alpha}{2}} \geq 0$$

$$-2x + (5 \leq 3)$$

$$-2x = 2(2 + 2a^2 - a)$$

$$\begin{aligned} a^2 &= a^2 \\ a^2 &= a^2 \end{aligned}$$

$$x - 15 \leq 3$$

$$2x - 15 \leq 3 \quad d = \frac{a^2}{2}$$

$$x \leq 9$$

$$a^2 - 15 \leq 3$$

$$d = \sqrt{a^2 - 3a^2 - a - 4a - 5} = 0$$

$$(a^2 - 1)^2 - 46(2a^2 + 2a^2 - a^2 - 4)$$

$$a^6 - 2a^5 + a^4 - 3a^4 - 32a^2 + 76a^4 + 64$$

$$a(a-1)^2$$

$$a^2 - 2a + 1$$

$$d = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$PQ = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$BQ = \sqrt{a^2 + b^2} - \frac{a+b - \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

$$D = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$D = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

$$D = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

$$a^2 + b^2$$

$$a^2 + b^2$$

$$\frac{\sqrt{D}}{2}$$

$$\frac{17a^6 - 2a^5 - 31a^4 - 32a^2 + 64}{260} =$$

$$\sqrt{a^4 - 3a^2 - a^2 - 4a - 5} = 0$$

$$\frac{17a^6 - 2a^5 - 31a^4 - 32a^2 + 64}{16} = 16(a^4 - 3a^2 - a^2 - 4a - 5) = 0$$

