



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарик. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leq 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

$$\begin{cases} xy = z(z+3) \\ yz = x(x+3) \\ zx = y(y+3) \end{cases}$$

Перемножим равенства

$$x^2 y^2 z^2 = xyz(z+3)(y+3)(x+3)$$

↓ поделим на $xyz (x, y, z \neq 0)$

$$xyz = (x+3)(y+3)(z+3)$$

||

$$xyz = xyz + 3xy + 3yz + 3zx + 9x + 9y + 9z + 27$$

||

$$3xy + 3yz + 3zx + 9x + 9y + 9z + 27 = 0$$

||

$$xy + yz + zx + 3x + 3y + 3z + 9 = 0$$

||

$$z^2 + 3z + x^2 + 3x + y^2 + 3y + 3x + 3y + 3z + 9 = 0$$

||

↓ прибавим 18 к обеим частям равенства

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 + z^2 + 6z + 9 = 18$$

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = 18$$

Получается если система уравнений имеет решение, то ответ: 18

Ответ: 18



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2

Представим наше число $999...9$ как

$10^{40000} - 1$ (легко убедиться, что эти числа равны)

Возведем в куб: $(10^{40000} - 1)^3 = 10^{120000} - 3 \cdot 10^{80000} + 3 \cdot 10^{40000} - 1$

Теперь посчитаем количество девяток (цифр 9):

$$\begin{array}{r} 1) \quad \begin{array}{r} 100...000...000 \\ - \quad 300000...0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 2) \quad \begin{array}{r} 99999...9700...00 \\ + \quad 30000...0 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

80000 - нулей

$$\begin{array}{r} 10^{120000} - 3 \cdot 10^{80000} \\ \hline 9999999700000000 \end{array}$$

39999 1-цифра 80000 нулей
-девяток

$$\begin{array}{r} 1) + 3 \cdot 10^{40000} \quad 99999...97000...30000 \\ \hline \end{array}$$

Кол-во 9-ток не изменилось

40 тысяч нулей

$$\begin{array}{r} 3) \quad \begin{array}{r} 9999...97000...03000...00 \\ - \quad 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 2) - 1 \\ \hline \end{array}$$

40 тысяч нулей превратились в 9-ки

Получается всего 9-ток: $39999 + 40000 = 79.999$

Ответ: 79.999



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано:

$DF \perp AC$

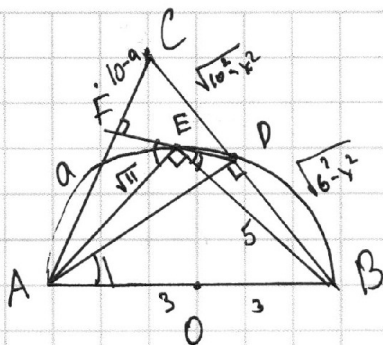
$E = W \cap FD \neq D$

$AC = 10$

$AB = 6$

$BF = 5$

$AE = ?$



1) $\angle AED = \angle ADB = 90^\circ$ (впис. угол на диаметре)

2) Пусть $AF = a$, $AD = x$: Тогда:

1) $BD^2 = 6^2 - x^2$ (по Т. Пифагора в $\triangle ADB$)

2) $ED^2 = 10^2 - x^2$ (по Т. Пифагора в $\triangle ACD$)

3) $FD^2 = x^2 - a^2$ (по Т. Пифагора в $\triangle AFD$)

4) $CD^2 = (10-a)^2 + x^2 - a^2 = 10^2 + a^2 - 20a + x^2 - a^2 = x^2 - 20a + 10^2$ (по Т. Пифагора в $\triangle CDF$)

5) $AE^2 = 6^2 - 5^2 = 11$

$AE = \sqrt{11}$ (по Т. Пифагора в $\triangle AEB$)

3) $\sin \angle AEF = \frac{a}{\sqrt{11}} = \cos \angle DEB$ ($\angle DEB + \angle AEF = 90^\circ$)

$\cos \angle DEB = \cos \angle DAB = \left(\angle DAB = \angle DEB \text{ впис. углы} \right)$

$= \frac{\sqrt{10a}}{6} = \frac{AD}{AB}$

$\frac{a}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{10a}}{6} \Rightarrow \frac{a^2}{11} = \frac{10a}{36} \Rightarrow 36a^2 - 110a = 0$

$a(36a - 110) = 0$

$a \neq 0$, т.к. это длина

$a = \frac{110}{36}$

Ответ: $a = \frac{110}{36}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

5 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

14

Вероятность, выдана 5 короб, равна: $\frac{3}{n} \cdot \frac{2}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} \cdot (n-3)(n-4)$

Вероятность выданы 3-х шариков в наборе из 5 короб равна $\frac{15}{n}$, т.к. вероятность, что шарик в короб равна $\frac{3}{n}$. А для шесты - $\frac{18}{n}$, Получается $\frac{18}{n} : \frac{15}{n} = \frac{6}{5}$

Ответ: $\frac{6}{5}$ раз



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

4 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что $a_5 + a_6 = a_3 + a_8$ Тогда, сумма корней уравнения совпадают:
По т. Виета сумма корней $-\frac{b}{a}$. Получается:

$$\frac{a^2 - a}{1} = \frac{a^3 - a^2}{4} \Rightarrow 4a^2 - 4a = a^3 - a^2 \Rightarrow a^3 - 5a^2 + 4a = 0$$

$$\Rightarrow a(a^2 - 5a + 4) = 0 = a(a-1)(a-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=1 \\ a=4 \end{cases}$$

Подставляем а и находим разности арифметической прогрессии

$$5a_n = a + 4d$$

$$6a_n = a + 5d$$

↓

$$d = 6a_n - 5a_n$$

$$32a_n = a + 2d$$

$$8a_n = a + 4d$$

$$5d = 8 - 5a_n$$

$$d = \frac{8 - 5a_n}{5}$$

$$a=0 \Rightarrow \text{1-й: } x^2 - 5 = 0 \quad x = \sqrt{5} \quad x = -\sqrt{5} \Rightarrow d_1 = 2\sqrt{5} / d_1 = -2\sqrt{5} \quad d_1 = d_2$$

$$\text{2-й: } 4x^2 - 4 = 0 \quad x = 1 \quad x = -1 = d_2 = \frac{2}{5} / d_2 = -\frac{2}{5} \text{ но } d_1 \neq d_2 \text{ противоречие}$$

$$a=1 \Rightarrow \text{1-й: } x^2 - 4 = 0 \quad x = 2 \quad x = -2 \Rightarrow d_1 = 4 / d_1 = -4$$

$$\text{2-й: } 4x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \quad x = -\frac{1}{2} \Rightarrow d_2 = \frac{1}{5} / d_2 = -\frac{1}{5} \text{ но } d_1 \neq d_2 \text{ противоречие}$$

$$a=4 \Rightarrow \text{1-й: } x^2 - 12x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{148}}{2} \Rightarrow d_1 = \sqrt{148} / d_1 = \sqrt{148}$$

$$\text{2-й: } 4x^2 - 48x + 512 + 32 - 4096 =$$

$$= x^2 - 12x + 892 \Rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{3212}}{2} \Rightarrow d_2 = \frac{\sqrt{3212}}{5} / \frac{\sqrt{3212}}{5}$$

$$x = \frac{12 - \sqrt{3212}}{2} \text{ но } d_1 \neq d_2 \text{ противоречие}$$

Получается, чтобы условие выполнялось $\begin{cases} a=0 \\ a=1 \\ a=4 \end{cases}$ но при них условие не выполняется. Ответ: не при каких а



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$D_1 = a^2(a-4)^2 - 4(a-5)$$

$$x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{D}}{1} = d \Rightarrow d = \sqrt{D} = a^4 - 2a^3 + a^2 - 4a + 20$$

$$D_2 = x_1 - x_2 = \frac{2\sqrt{D}(a+2a+1)}{8} = \frac{\sqrt{D}}{4} \Rightarrow 8d \Rightarrow d = \frac{\sqrt{D}}{8}$$

2a

$$\frac{a+4b}{a+5b} = 2a+9d$$

$$a+7b$$

$$\frac{2a+8d}{2} = a+4,5d$$

$$\frac{-b}{2a}$$

$$= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$2a^3 - 2a^2 = 5a^2 - 8a = 0$$

$$2a^3 - 10a^2 + 8a = 0$$

$$a(2a^2 - 10a + 8) = 0$$

$$2a(a-1)(a-4) = 0$$

$$a - 18a + 4$$

$$(2a-9)(a-4)$$

$$4x^2 - 48x + 512 + 32 - 4096 = 0$$

$$x^2 - 12x - 992 = 0$$

$$a+b=12$$

$$ab=-992$$

$$\begin{array}{r} 121 \\ 1331 \end{array}$$

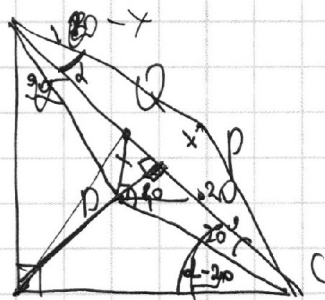
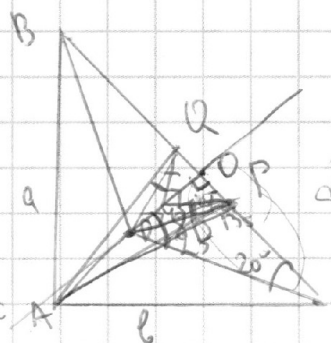
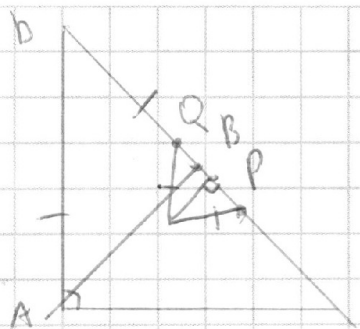


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2 - (a^2 - 5)x + a^2 - 5 = 0$$
$$(x - a^2)(x - 5) = 0$$
$$x = a^2$$
$$x = 5$$

$$AB = AP$$
$$AC = CP$$

$$PQ = \frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

$$BQ = \frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

$$d = \frac{b^2}{a}$$

$$x - 15 \leq 3$$
$$2x - 15 \leq 3$$
$$x \leq 9$$

$$n \cdot (n-1) \cdot \frac{3}{n^2} \cdot \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{n^4}$$
$$d = \frac{8 \pm \sqrt{5}}{2a}$$

$$x - \frac{15}{2} - \frac{3}{\sqrt{3}} \geq 0$$

$$-2x + 15 \leq 3$$

$$-2x =$$

$$a + a^2$$
$$a^2 - a + 1$$

$$d = \sqrt{a^4 - 3a^3 - a^2 - 4a - 5} = 0$$

$$(a^2 - 1)^2 - 16(2a^4 + 2a^3 - a^2 - 4a - 5)$$

$$a^6 - 2a^5 + a^4 - 32a^4 - 32a^3 + 16a^2 + 64$$

$$\frac{4}{a(a-1)^2}$$
$$a^2 - a + 1$$

$$\sqrt{17a^6 - 2a^5 - 31a^4 - 32a^3 + 64}$$

$$20$$

$$\sqrt{17a^6 - 2a^5 - 31a^4 - 32a^3 + 64} = 16(a^4 - 3a^3 - a^2 - 4a - 5)$$

$$\sqrt{a^4 - 3a^3 - a^2 - 4a - 5} = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$17a^6 - 2a^5 - 31a^4 - 32a^3 + 6a^2 - 16a^2 + 48a^3 + 48a^2 + 16a^2 - 16$$

400

83931

20² = 400
16

83939919

83939919

83939919

$$17a^6 - 2a^5 - 47a^4 + 48a^3 - 16a^2 + 64a - 16 = 0$$

83939919

$$17+2-47+48-16+64-16$$

321

389991

389991

389991

389991

389991

389991

389991

389991

389991

389991

389991

389991

389991

389991

389991

389991

389991

389991

389991

389991

389991

389991

389991

389991

389991

389991

389991

389991

389991

389991

389991

389991

389991

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919

83939919