



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2, \\ yz = -2x + x^2, \\ zx = -2y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 30 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 8$, $BE = 6$.
4. [4 балла] В телегре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарику. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть семь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$ являются четвертым и девятым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left| x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} \right| + \left| x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} \right| \leqslant 4$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипotenузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle BCA = 50^\circ$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 1
<input checked="" type="checkbox"/> | 2
<input type="checkbox"/> | 3
<input type="checkbox"/> | 4
<input type="checkbox"/> | 5
<input type="checkbox"/> | 6
<input type="checkbox"/> | 7
<input type="checkbox"/> |
|--|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2 \\ yz = -2x + x^2 \\ zx = -2y + y^2 \end{cases} \Rightarrow xy \cdot yz \cdot zx = x^2 y^2 z^2 = (-2z+z^2)(-2x+x^2)(-2y+y^2) = 2(-2+z) \cdot x(-2+x) \cdot y(-2+y) = xyz(-2+z)(-2+y)(-2+x).$$

Поскольку, $x^2 y^2 z^2 = xyz(-2+x)(-2+y)(-2+z)$, то $(-2+x)(-2+y)(-2+z) = xyz$. Тогда:

$$(-2+x)(-2+y)(-2+z) = xyz$$

$$(4-2x-2y+xy)(-2+z) = xyz$$

$$(-8+4z+4x)(2xz+4y-2yz-2xy+xyz) = xyz$$

$$4x+4y+4z = 8+2xy+2yz+2xz$$

$$x+y+z = 2 + \frac{1}{2}(xy+yz+zx).$$

Преобразуем выражение $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 4z + 4 = x^2 - 2x - 2x + 4 + y^2 - 2y - 2y + 4 + z^2 - 2z - 2z + 4 = (-2x+x^2) + (-2y+y^2) + (-2z+z^2) - 2(x+y+z) + 12 = yz + zx + xy - 2\left(2 + \frac{1}{2}(xy+yz+zx)\right) + 12 = yz + zx + xy - 4 - xy - yz - zx + 12 = 8.$

Ответ: $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 8$.

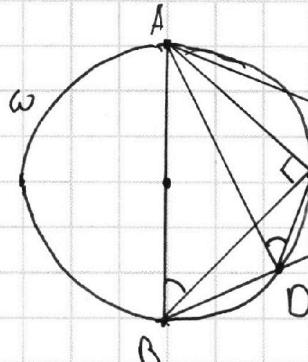


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



Дано:

$\triangle ABC$ -оснрфиг.

Окр ω .

$\angle AEB$ и $\angle ADB$ опираются на

AB -диам.; $B(\cap\omega)=D$. диаметр AB , то $\angle AEB=\angle ADB=90^\circ$.

$DF \perp AC$; $DF \cap \omega=E$. $\angle ADB+\angle ADC=180^\circ$ (как смежные) \Rightarrow

$AC=10$; $AB=8$; $BE=6$. $\Rightarrow \angle ADC=180^\circ-\angle ADB=180^\circ-90^\circ=90^\circ$

$AF=?$

Решение:

Проведём AE и AD . И.к.

соотношениям в $\triangle ADC$: $AD^2=AC \cdot AF=10 \cdot AF \Rightarrow AD=\sqrt{10 \cdot AF}$ (богр $DF \perp AC$,
значит, DF -бисс. в $\triangle ADC \Rightarrow AF$ -проекция AD на гипотенузу AC).

Поскольку $\angle AEB=90^\circ$, то в $\triangle AEB$ -нр/у₂ \Rightarrow по теореме Пифагора: $AB^2=BE^2+AE^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{8^2-6^2}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$.

$\angle ABE=\angle ADE$ (помадж что они опираются на гур AE) и равны ей по-
воне) и $\angle AEB=\angle AFD=90^\circ \Rightarrow$ по I признаку подобия треугольников:

$\triangle ABE \sim \triangle ADF \Rightarrow \frac{AB}{AD}=\frac{AE}{AF} \Rightarrow \frac{AB}{AE}=\frac{AD}{AF} \Rightarrow \frac{AD}{AF}=\frac{8}{2\sqrt{7}}=\frac{4\sqrt{7}}{7} \Rightarrow AD=\frac{4\sqrt{7}}{7}AF$.

Но известно, что $AD=\sqrt{10 \cdot AF} \Rightarrow \frac{4}{7} \cdot \sqrt{10 \cdot AF}=4\sqrt{7}AF=\sqrt{7} \cdot \sqrt{10 \cdot AF}=4AF \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{70} \cdot \sqrt{AF}=4 \cdot \sqrt{AF}=\frac{\sqrt{70}}{4}=\frac{AF}{\sqrt{AF}}=\sqrt{AF} \Rightarrow \sqrt{AF}=\frac{\sqrt{70}}{\sqrt{16}}=\sqrt{\frac{70}{16}}=\sqrt{\frac{35}{8}} \Rightarrow$

$$AF=\frac{35}{8}=4\frac{3}{8}=4,375.$$

Ответ: $AF=4,375$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть всего коробок n шт., где $n \geq 7$, тогда вероятность того, что из 5 коробок в 3-х будет лежать шарик равна:

$$P = \frac{n-3}{n} \cdot \frac{n-4}{n-1} \cdot \frac{3}{n-2} \cdot \frac{2}{n-3} \cdot \frac{1}{n-4} = \frac{6}{n(n-1)(n-2)}. Но$$

быть может у меня лишь один шарик, которых столько же, сколько и способов переставить ~~ненужные~~ где ненужны, то есть тогда, когда коробки оказываются пустыми. Значит, $P_5 = C_5^2 \cdot P = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot P = 10P$. Аналогично, $P_7 = C_7^4 \cdot P = \frac{7!}{4! \cdot 3!} \cdot P = 35P$. Таким образом: $\frac{P_7}{P_5} = \frac{35P}{10P} = 3,5$ раза вероятность выигрыша игрока увеличилась.

Ответ: вероятность выигрыша игрока увеличилась в 3,5 раза.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой** из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$$

$$3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0.$$

Пусть a_1 — первый член арифметической прогрессии, a — её разность. Тогда сумма $x_1 + x_2$ корней первого уравнения равна: $a_1 + 5a + a_1 + 6a = 2a_1 + 11a$. А сумма $x_3 + x_4$ корней второго уравнения равна: $a_1 + 3a + a_1 + 8a = 2a_1 + 11a$. Следовательно, сумма корней первого и второго уравнений равна. В свою очередь по теореме Виетта: $x_1 + x_2 = a^2 - 2a$; $x_3 + x_4 = \frac{a^3 - 2a^2}{3}$. Значит, $a^2 - 2a = \frac{a^3 - 2a^2}{3}$. Тогда:

$$a^2 - 2a = \frac{1}{3}a \cdot (a^2 - 2a)$$

$$a(a-2) - \frac{1}{3}a \cdot a(a-2) = 0$$

$$a(a-2)\left(1 - \frac{1}{3}a\right) = 0$$

$$a(a-2) \cdot \frac{1}{3}(3-a) = 0$$

$$a(a-2)/(3-a) = 0 \Rightarrow a=0 \text{ или } a=2 \text{ или } a=3.$$

Но если $a=0$: $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$ $3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$

$$x^2 - 7 = 0$$

$$3x^2 + 6 = 0$$

$$x = \pm\sqrt{7}$$

$$x^2 = -2 \neq 0.$$

Если $a=2$: $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$

$$x^2 - (4-4)x + 4-2-7 = 0$$

$$x^2 - 5 = 0$$

$$x = \pm\sqrt{5}$$

$$3x^2 - (8-8)x + 6 - 32 = 0$$

$$3x^2 - 26 = 0$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{26}{3}}$$

В таком случае $a_4 = -\sqrt{\frac{26}{3}}$; $a_5 = -\sqrt{5}$; $a_6 = \sqrt{5}$; $a_7 = \sqrt{\frac{26}{3}}$. Но эти числа не будут являться членами одной арифметической прогрессии, ведь: $d = a_2 - a_1 = \sqrt{5} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$ и $d = \frac{a_6 - a_1}{2} = \frac{-5 + \sqrt{\frac{26}{3}}}{2} = -2,5 + \sqrt{\frac{13}{6}}$. В первом случае $d > 0$, а во втором $d < 0$.

Если $a=3$; то:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$$

$$x^2 - (9 - 6)x + 9 - 3 - 7 = 0$$

$$x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2} = 1,5 \pm \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

$$d = x_2 - x_1 = 1,5 + \frac{\sqrt{13}}{2} - 1,5 + \frac{\sqrt{13}}{2} =$$

$$= \sqrt{13}.$$

Ответ: $a = 3$.

$$3x^2 - (27 - 18)x + 6 - 243 = 0$$

$$3x^2 - 9x - 237 = 0$$

$$x^2 - 3x - 79 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+316}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{325}}{2} = \frac{3 \pm 5\sqrt{13}}{2} = \\ = 1,5 \pm 2,5\sqrt{13}.$$

$$d = \frac{x_1 - x_3}{2} = \frac{1,5 - \frac{\sqrt{13}}{2} - 1,5 + \frac{5\sqrt{13}}{2}}{2} = \frac{\frac{4\sqrt{13}}{2}}{2} = \\ = \frac{4\sqrt{13}}{4} = \sqrt{13}.$$

$$d = \frac{x_4 - x_3}{5} = \frac{1,5 + 2,5\sqrt{13} - 1,5 + 2,5\sqrt{13}}{5} = \\ = \frac{5\sqrt{13}}{5} = \sqrt{13}.$$

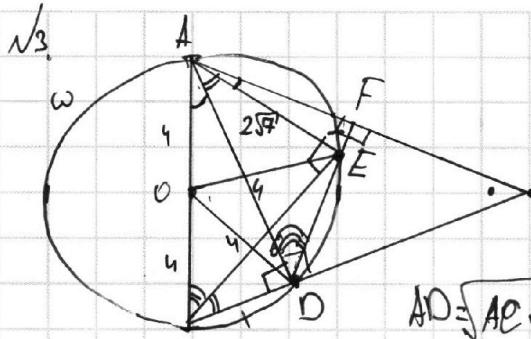
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой** из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



Провести AE
 $\angle AEB = 2\sqrt{7} \Rightarrow AE = 2\sqrt{7}$.

Менял. соотв. в прил А:
 $AD^2 = AC \cdot AF = 10 \cdot AF \Rightarrow$
 $\Rightarrow AD = \sqrt{10 \cdot AF}$.

$\angle ABE = \angle ADE$?
 $\angle AEB = \angle AFD = 30^\circ \Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle ADF \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AF}$

$AD = \sqrt{AP \cdot AF} = \sqrt{10 \cdot AF}$.

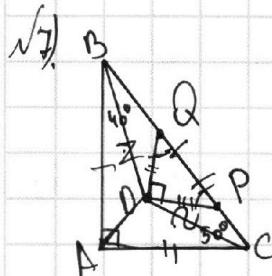
$$AE = \sqrt{8^2 - 6^2} = \sqrt{2 \cdot 14} = 2\sqrt{7}! \quad \frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AE} \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AD} = \frac{2\sqrt{7}}{8} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\frac{AF}{AD} = \frac{2\sqrt{7}}{8} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$4AF = \sqrt{7} \cdot AD = \sqrt{7} \cdot \sqrt{10} AF = \sqrt{70} AF$$

$$4AF = \sqrt{20} \cdot \sqrt{AF}$$

$$\frac{AF}{\sqrt{AF}} = \frac{\sqrt{20}}{4} = \sqrt{AF} = \sqrt{\frac{70}{16}} \Rightarrow AF = \frac{70}{16} = \frac{35}{8} = 4,375.$$



N7)

$$\text{Если } 5 \text{ коробок: } \frac{3}{n} \cdot \frac{2}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} + \frac{n-3}{n} \cdot \frac{2}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} + \dots + \frac{n-3}{n} \cdot \frac{n-4}{n-1} = \frac{3}{n(n-1)(n-2)} + \frac{n-3}{n(n-1)(n-2)} + \dots + \frac{n-3}{n(n-1)(n-2)} = \frac{60}{n(n-1)(n-2)}$$

$$\text{Если } 7 \text{ коробок: } \frac{3}{n} \cdot \frac{2}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} + \dots + \frac{n-3}{n} \cdot \frac{n-4}{n-1} + \dots + \frac{n-3}{n} \cdot \frac{n-4}{n-1} = \frac{60}{n(n-1)(n-2)}$$

$$\text{Если } 5 \text{ коробок: } \frac{3}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \frac{n-4}{n-2} \cdot \frac{3}{n-3} \cdot \frac{2}{n-4} \cdot \frac{1}{n-5} = \frac{60}{n(n-1)(n-2)}$$

$$\text{Если } 7 \text{ коробок: } \frac{3}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \frac{n-4}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-3} \cdot \frac{n-6}{n-4} \cdot \frac{n-7}{n-5} \cdot \frac{3}{n-6} \cdot \frac{2}{n-7} \cdot \frac{1}{n-8} = \frac{60}{n(n-1)(n-2)}$$

$$\Rightarrow \frac{P(7)}{P(5)} = \frac{C_7^3}{C_5^2} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} : \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{7!}{3! \cdot 4! \cdot 5!} = \frac{7}{2} = 3,5 \text{ раза}$$

$$\begin{array}{r} 9^3 \\ = 7 \ 2 \ 9 \\ 9^2 \\ \hline 9 \ 9 \\ 9^3 \\ = 9 \ 9 \ 2 \ 9^3 \\ 9^3 \\ \hline 9 \ 8 \ 0 \ 1 \\ 9 \ 8 \ 0 \ 1 \\ \hline 9 \ 7 \ 0 \ 2 \ 9 \ 9 \end{array}$$

$$x^2 y^2 z^2 = (-2x + x^2) / (-2y + y^2) / (-2z + z^2) = x(-2+x) \cdot y(-2+y) \cdot z(-2+z) = xyz(-2+x)(-2+y)(-2+z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-2+x)(-2+y)(-2+z) = xyz \Rightarrow x^2 y^2 z^2 = (2+x)^2 / (2+y)^2 / (2+z)^2$$

$$(4-2x-2y+xy)(-2+z) = xyz$$

$$(-8+4z+4x-2xz+4y-2yz-2xy+xy^2)xyz = xyz \quad \left(\begin{array}{l} (x-2)^2(y-2)^2(z-2)^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 4z + 4 \\ y^2 - 4y + 4 = y^2 - 2yz + 4 + 2xz - 2y + 4 + xy - 2z + 4 \end{array} \right)$$

$$4(x+y+z) - 2(xy+yz+xz) = 8$$

$$2(x+y+z) - xy - yz - xz = 4$$

$$x+y+z = 2 + \frac{xy}{20} + \frac{yz}{2} + \frac{xz}{2}$$

$$\begin{aligned} & (x-2)^2(y-2)^2(z-2)^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 4z + 4 \\ & y^2 - 4y + 4 = y^2 - 2yz + 4 + 2xz - 2y + 4 + xy - 2z + 4 \\ & = xyz + yz + 2xz - 2(xy+yz+xz) + 12 = xyz + yz + 2xz - 4 - xy - 2z + yz + 12 \\ & \cdot \left(2 + \frac{xy}{20} + \frac{yz}{2} + \frac{xz}{2} \right) + 12 = xyz + yz + 2xz - 4 - xy - 2z + yz + 12 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!