



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = -6y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x - 6)^2 + (y - 6)^2 + (z - 6)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 20 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 10$, $BE = 9$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарик. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть девять коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$ являются пятым и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| + \left|y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| \leq 8$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle CBA = 46^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1.2.1

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2 & (1) \\ yz = -6x + x^2 & (2) \\ zx = -6y + y^2 & (3) \end{cases}$$

Заметим, что $x, y, z \neq 6$, иначе $-6x + x^2 = 0$, тогда y или z равен 0, что невозможно.

(1) - (2):

$$xy - yz = -6z + z^2 + 6x - x^2$$

$$-y(z - x) = -6(z - x) + (z - x)(z + x)$$

$$(z - x)(z + x + y - 6) = 0$$

$$\begin{cases} z = x \\ z + x + y = 6 \end{cases}$$

Аналогично для (2) и (3), (3) и (1):

$$\begin{cases} x = y \\ x + y + z = 6 \end{cases}, \begin{cases} y = z \\ x + y + z = 6 \end{cases} \quad (1)$$

Пусть $x = y = z$, то $x^2 = -6x + x^2$, т.е. тогда $x = 0$, что невозможно. Т.е. указанный условием возникает всего 4 возможных случая:

$$\text{I) } \begin{cases} x = y \text{ от (2)-(3)} \\ x + y + z = 6 \text{ от (1)-(2)} \\ y \neq z \end{cases}, \text{ II) } \begin{cases} y = z \text{ от (1)-(3)} \\ x + y + z = 6 \text{ от (2)-(1)} \\ z \neq x \end{cases}$$

$\begin{cases} x = y \\ y = z \\ z = x \end{cases}$
возможно не более 1.

$$\text{III) } \begin{cases} z = x \text{ от (1)-(2)} \\ x + y + z = 6 \text{ от (2)-(3)} \\ x \neq y \end{cases}, \text{ IV) } \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x \neq y \\ y \neq z \\ z \neq x \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решаем I:

$$\begin{cases} x=y \\ x+y+z=6 \\ z=6-2x \end{cases}$$

$$x(6-2x) = -6x + x^2$$

$$6x - 2x^2 = -6x + x^2$$

$$3x^2 - 12x = 0$$

$$\begin{cases} x=4 \\ x=0 \text{ или } x \neq 0 \end{cases}$$

значит, $x=4, y=4, z=-2$ проверка:

при IV.

$$\begin{cases} пусть x > y > z \\ z^2 - 6z = xy < z^2 \\ y \\ z < 0 \end{cases}$$

применяет
жн. > 0 при $z \in (-\infty; 0) \cup (6; +\infty)$, т.е.

$$\begin{aligned} z^2 - 6z > 0 &\Rightarrow x, y > 0 \\ xz < 0 &\Rightarrow x, y \in (0; 6) \\ xy < 0 &\Rightarrow x, y \in (0; 6) \end{aligned}$$

$$xy = -6z + z^2$$

$$16 = -2(-6) + 4 \text{ верно}$$

$$xz = -6y + y^2$$

$$-8 = -24 + 16 \text{ верно}$$

Да. Аналогично в II и III:

$$\text{II } y=4, z=4, x=-2$$

$$\text{III } z=4, x=4, y=-2$$

В любом из этих случаев:

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = (-2)^2 + (-2)^2 + (-6)^2 = 8 + 36 = 44$$

$$\text{IV: } x+y+z=6$$

$$x \neq y, y \neq z, z \neq x$$

поделим (1) на (2) ($x, z \neq 0, x, z \neq 6$, т.е. обе части не равны 0)

$$\frac{x}{z} = \frac{-6z + z^2}{-6x + x^2} \Leftrightarrow z^2(z-6) = x^2(x-6)$$

$$\text{Аналогично для (1) и (3) } \frac{y}{z} = \frac{z^2 - 6z}{y^2 - 6y} \Leftrightarrow y^2(y-6) = z^2(z-6)$$

$$y^3 - 6y^2 = z^3 - 6z^2$$

$$(y-z)(y^2 + yz + z^2) - 6(y-z)(y+z) = 0$$

$$(y-z)(y^2 + yz + z^2 - 6y - 6z) = 0$$

$$\text{Аналогично } (z-x)(x^2 + z^2 + xz - 6x - 6z) = 0$$

$$(x-y)(x^2 + y^2 + xy - 6x - 6y) = 0$$

т.к. $x \neq z, z \neq y, y \neq x,$

Ответ: 42



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = \underbrace{99 \dots 9}_{20001} = 10^{20001} - 1$$

$$n^3 = (10^{20001} - 1)^3 = 10^{60003} - 3 \cdot 10^{40002} + 3 \cdot 10^{20001} - 1$$

$$10^{60003} - 1 = \underbrace{99 \dots 99}_{60003}$$

(с конца)

При вычитании $3 \cdot 10^{40002}$ 9 на 40003 месте превратится

в 6, а при прибавлении $3 \cdot 10^{20001}$ 9 на 20002 месте

станет 2, пройдет перенос через разряд, у-я

которую, следующие 9 станут 0. Это будет продолжаться, пока не дойдет до

$+9996 \dots 99 \dots 9$ 6. Она станет 7-ой и всё:

$30 \dots 0$

$99970029 \dots 9$

Т.е. все цифры на местах от 20002 до 40003 не будут 9, а остальные будут

Т.е. все 9 будет 20001 и $60003 - 40003 = 20000$.

до 2,

миле 7

Итого: $20001 + 20000 = 40001$ где произошел перенос через разряд

Ответ: 40001



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано:

ω - окружность

AB - диаметр

$BC \cap \omega = \{B\}$

$DF \perp AC, F \in AC$

$DE \cap \omega = \{E\}$

$AC = 20$

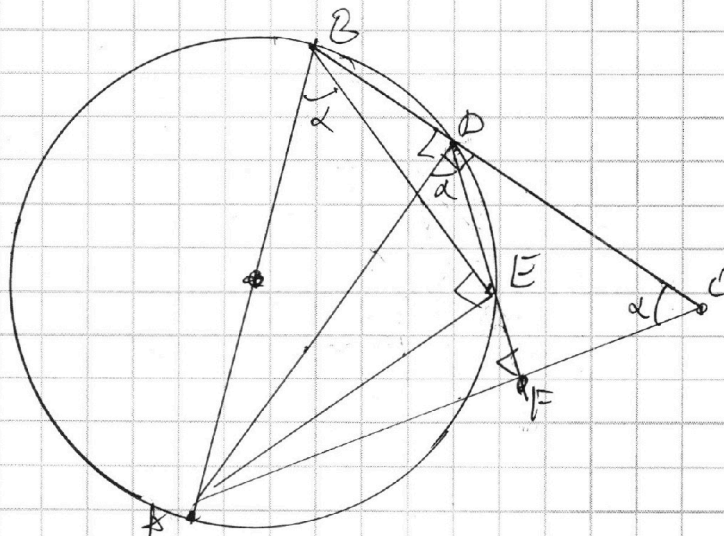
$AB = 10$

$BE = 9$

Найти:

AF

Решение:



Анализ. Так как AB - диаметр, то $\angle ABB = \angle AEB = 90^\circ$.

По т. Пифагора для $\triangle BEA$:

$$BE^2 + AE^2 = AB^2$$

$$81 + AE^2 = 100$$

$$AE = \sqrt{19}$$

Пусть $\angle ABE = \alpha$, тогда $\sin \alpha = \frac{\sqrt{19}}{10}$.

Так как ABDE - впис., то $\angle ADE = \alpha$.

Так как $\angle ADC = 90^\circ$, $\angle AFD = 90^\circ$, и $\angle DAC$ у $\triangle ADF$ и $\triangle ADC$ общие, то $\angle DCA = \alpha$.

По т. Пифагора для $\triangle ADC$:

$$AD^2 + DC^2 = AC^2$$

$$AD^2 = AF^2 \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \frac{AF^2}{\frac{19}{100}} = \frac{100 AF^2}{19}$$

$$DC^2 \cdot \cos^2 \alpha = (20 - AF)^2 = (FC)^2$$

$$DC^2 = \frac{(20 - AF)^2}{\cos^2 \alpha} = \frac{100(20 - AF)^2}{81}$$

$$100(20 - AF)^2 + 100 AF^2 = 20^2$$

$$100 \cdot 400 + AF^2 \cdot 100 + 100 \cdot AF^2 - 40 \cdot 100 \cdot AF = 20^2 \cdot 19$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☒☐☐☐☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$200AF^2 - 4000AF = 20^2 \cdot 19 - 40000$$

$$\frac{100(20-AF)^2}{81} + \frac{100 \cdot AF^2}{19} = 4000$$

$$1900(20-AF)^2 + 100AF^2 = 4 \cdot 19 \cdot 81$$

$$19(20-AF)^2 + 8AF^2 = 4 \cdot 19 \cdot 81$$

$$100AF^2 + 19 \cdot 400 - 19 \cdot 40 \cdot AF = 4 \cdot 19 \cdot 81$$

$$100AF^2 - 19 \cdot 40 \cdot AF - 19 \cdot 19 \cdot 4 = 0$$

$$(10AF)^2 - 19 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 2AF - (19 \cdot 2)^2 = 0$$

$$(10AF - 38)^2 = 0$$

$$AF = 3,8$$

Ответ: 3,8



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть у нас x коридор^{ов}

Человек водит коридоры C_x^5 способами. При этом возникает ^{наборов} комбинаций C_{x-3}^2 (бодер ^{коридор} ^{бодер 3-х} ^{бодер})

$$\frac{C_{x-3}^2}{C_x^5} = \frac{\frac{(x-3)!}{2!(x-5)!}}{\frac{x!}{5!(x-5)!}} = \frac{(x-3)! \cdot 5!}{x! \cdot 2!}$$

При 9 коридорах вероятность ^(по аналогии) $\frac{C_{x-3}^2}{C_x^5} =$

$$= \frac{\frac{(9-3)!}{6!(9-5)!}}{\frac{9!}{5!(9-5)!}} = \frac{(9-3)! \cdot 5!}{6! \cdot 9!}$$

$$\frac{(9-3)! \cdot 5!}{6! \cdot 9!} = \frac{(9-3)! \cdot 5!}{x! \cdot 2!} = \frac{9! \cdot 2!}{6! \cdot 5!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{6 \cdot 7}{5} = 1,4$$

Ответ: 6 1,4 раза



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☒6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

125

$$x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0 \quad (1)$$

$$5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^2 - 6a - 15 = 0 \quad (2)$$

Пусть корни (1) - x_1 и x_2 , а (2) - x_3 и x_4 .

$$x_1 - x_3 = x_2 - x_3 = x_4 - x_2$$

$$x_1 - x_3 = x_4 - x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = x_3 + x_4$$

$$(1) \text{ имеет два корня } \Leftrightarrow (a^2 - 4a)^2 - 4(a^2 - 6a + 4) > 0$$

$$(2) \text{ имеет два корня } \Leftrightarrow (a^3 - 4a^2)^2 + 20(2a^2 + 6a + 15) > 0$$

По т. Виета для (1): $x_1 + x_2 = a^2 - 4a$, а $x_3 + x_4 =$
 $= \frac{a^3 - 4a^2}{5}$

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4$$

$$a^2 - 4a = \frac{a^3 - 4a^2}{5}$$

$$5a^2 - 20a = a^3 - 4a^2$$

$$a^3 - 9a^2 + 20a = 0$$

$$a(a^2 - 9a + 20) = 0$$

$$a(a - 4)(a - 5) = 0$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ a = 4 \\ a = 5 \end{cases}$$

при $a = 0$ $(a^2 - 4a)^2 - 4(a^2 - 6a + 4) =$
 $= 0 - 16 < 0$
 Т.е. $a \neq 0$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

при $a=4$:

$$(1) x^2 - 0 + 16 - 2x + 4 = 0$$

$$x^2 - 2x + 20 = 0$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -2$$

Но $x_2 - x_1 = 4$, а $x_1 - x_3 = -2 + \frac{\sqrt{164}}{5}$,

т.е. разность прогрессии

$4 \neq -2 + \frac{\sqrt{164}}{5}$, значит, $a=4$

не подходит

при $a=5$:

$$(1) x^2 - (25-20)x + 25 - 30 + 4 = 0$$

$$x^2 - 5x - 1 = 0 \quad D = 25 + 4 = 29$$

$$\begin{cases} x = \frac{5 + \sqrt{29}}{2} \\ x = \frac{5 - \sqrt{29}}{2} \end{cases}$$

$$x_3 = \frac{5 - 3\sqrt{29}}{2}$$

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{29}}{2}$$

$$x_2 = \frac{5 + \sqrt{29}}{2}$$

$$x_4 = \frac{5 + 3\sqrt{29}}{2}$$

Разность прогрессии равна $\sqrt{29} \neq 1$.
не подходит.

Ответ: 5

$$(2) 5x^2 - (64-64)x - 2 \cdot 64 - 24 - 15 = 0$$

$$5x^2 - 128 - 24 - 15 = 0$$

$$x^2 = \frac{128 + 39}{5}$$

$$x^2 = \frac{167}{5}$$

$$x = \frac{\sqrt{167}}{5}$$

$$x = -\frac{\sqrt{167}}{5}$$

$$(2) 5x^2 - (125-100)x - 2 \cdot 125 - 30 - 15 = 0$$

$$5x^2 - 25x - 250 - 45 = 0$$

$$x^2 - 5x - 59 = 0$$

$$\begin{aligned} D &= 25 + 4 \cdot 59 = \\ &= 25 + 236 = \\ &= 261 = \\ &= 9 \cdot 29 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = \frac{5 + 3\sqrt{29}}{2} \\ x = \frac{5 - 3\sqrt{29}}{2} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☒	☐

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$ 2015

$5x^2 - (a^2 - 4a^2)x - 2a^2 - 6a - 15 = 0$

$|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}| + |y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}| \leq 8$ 2016

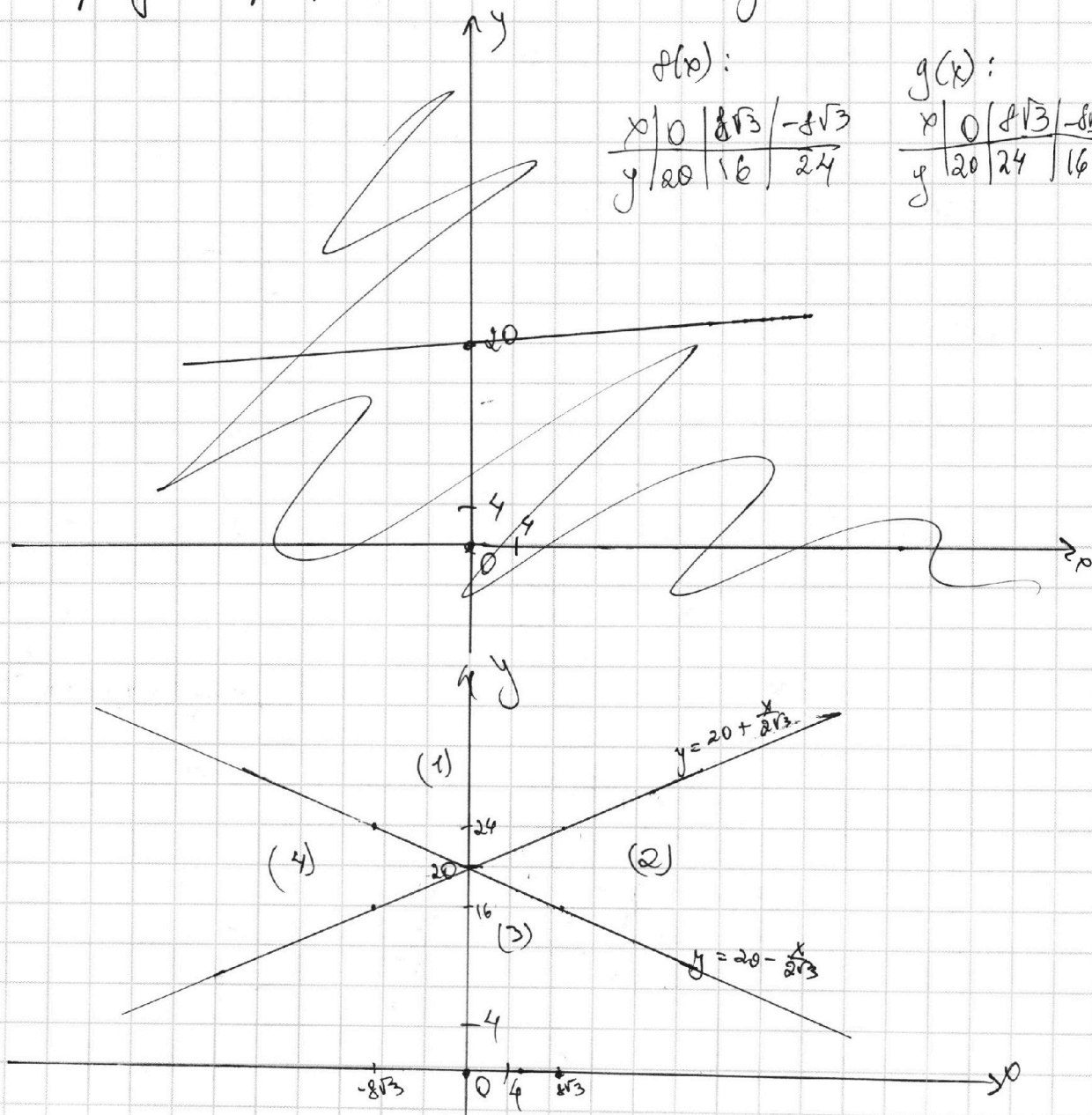
Нарисуем график. $f(x) = 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}$, $g(x) = 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}$

$f(x)$:

x	0	$8\sqrt{3}$	$-8\sqrt{3}$
y	20	16	24

$g(x)$:

x	0	$8\sqrt{3}$	$-8\sqrt{3}$
y	20	24	16





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Прямые дают плоскость на 4 полуплоскости.
(дел Ox и Oy)

$$(1): \begin{cases} y > 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \\ y > 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$(2): \begin{cases} y < 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \\ y > 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$(3): \begin{cases} y < 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \\ y < 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$(4): \begin{cases} y < 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \\ y > 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

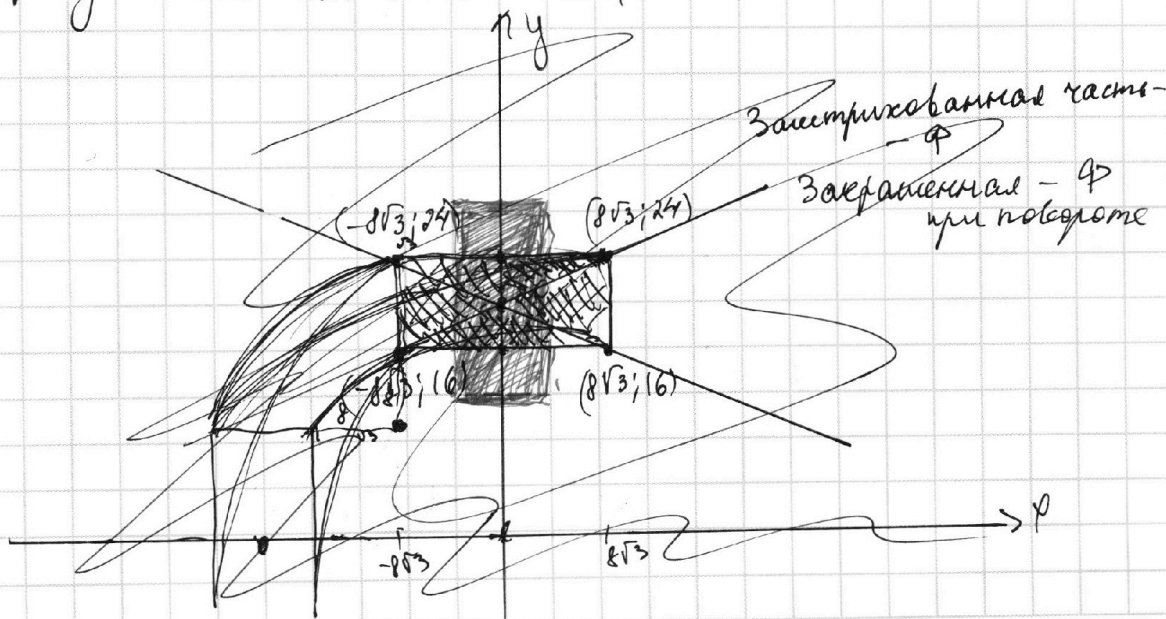
В (1) Φ содержит все точки, где $y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} + y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 8$,
это равносильно $y \leq 24$. В (3) Φ точки, где
 $y \geq 16$ $-2y + 40 \leq 8 \Leftrightarrow y \geq 16$.

В (2) Φ содержит точки, где $y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} - (y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}) \leq 8$

$$\frac{x}{\sqrt{3}} \leq 8$$

$$x \leq 8\sqrt{3}$$

Аналогично в (4) Φ имеет точки, где $x \geq -8\sqrt{3}$
Нерешу. Отметим эти точки



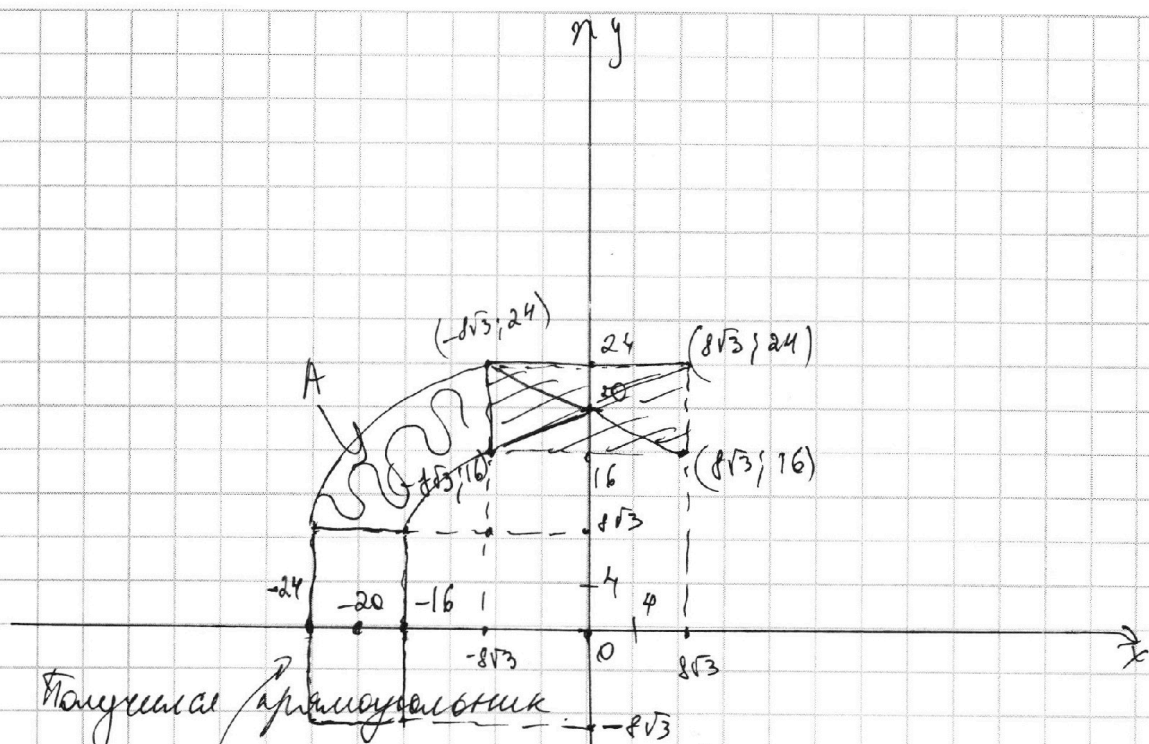


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



При повороте

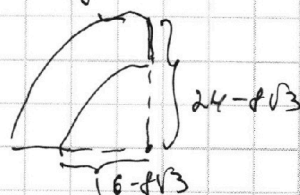
Назовем фигуру, отмеченную
внешней линией - A.

$$S_A = \frac{(24-8\sqrt{3})^2 \pi}{4} - \frac{(16-8\sqrt{3})^2 \pi}{4}$$

площадь
четверти круга
с рад $24-8\sqrt{3}$

площадь
четверти
круга с рад.
 $16-8\sqrt{3}$

Заметим область,
заштрихованную
внешней линией
+ прямоугольник



$$S_A = \frac{24^2 \cdot \pi - 16^2 \pi - 24 \cdot 8\sqrt{3} \cdot 2\pi + 16 \cdot 8\sqrt{3} \cdot 2\pi}{4} = \frac{40 \cdot 8 \cdot \pi - 8\sqrt{3} \pi (48 - 32)}{4}$$

$$= 40 \cdot 2 \cdot \pi - 8\sqrt{3} \pi \cdot 16 = 80\pi - 32\sqrt{3}\pi = \pi(80 - 32\sqrt{3})$$

$$S_{\text{пр}} = (16 + 2\sqrt{3}) \cdot 8 = 80 + 16\sqrt{3} = 128 + 16\sqrt{3}$$

$$S = S_{\text{пр}} + S_A = \pi(80 - 32\sqrt{3}) + 128 + 16\sqrt{3}$$

заметим



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА

4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: $\pi(10 - 32\sqrt{3}) + 128 + 16\sqrt{3}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$16 - 2x - 2y = 0$$

$$xy = -6z + z^2$$

$$yz = -6x + x^2$$

$$zx = -6y + y^2$$

$$x + y + z = 6$$

$$z = x$$

$$x + y + z = 6$$

$$2x + z = 6$$

$$0$$

$$x^2 = -6(6-2x) + (6-2x)^2 = yz - yx - yz$$

$$x^2 = -36 + 12x + 36 - 24x + 4x^2 = -yx - 2x - 2y = 0$$

$$3x^2 = 12x - 2x - 2y$$

$$3x(x-4) = 0$$

$$x = 4$$

$$4 \quad 4 \quad -2$$

$$z = x = y$$

$$x^2 = -6x + x^2$$

$$x = 0$$

$$(x+y+z-z)$$

$$(x-y)(y-z)(z-x)$$

$$2xy - y^2 + yz - zx$$

$$(x+y)(z-x) = -x^2 - yz + yx + xz$$

$$(z-x)(y-z) = -z^2 - xy + xz + zy$$

$$y^2 + yz - 6y = z^2 + yz - 6z$$

$$y^2 + yz - 6y = z^2 + yz - 6z$$

$$y^2 + yz - 6y = z^2 + yz - 6z$$

$$y^2 + yz - 6y = z^2 + yz - 6z$$

$$y^2 + yz - 6y = z^2 + yz - 6z$$

$$y^2 + yz - 6y = z^2 + yz - 6z$$

$$y^2 + yz - 6y = z^2 + yz - 6z$$

$$y^2 + yz - 6y = z^2 + yz - 6z$$

$$y^2 + yz - 6y = z^2 + yz - 6z$$

$$y^2 + yz - 6y = z^2 + yz - 6z$$

$$xy - yz = z^2 - x^2 - 6(z-x)$$

$$-y(z-x) = (z-x)(x+y) - 6(z-x)$$

$$(z-x) \cdot (-y) = (z-x)(x+y-6)$$

$$(x+y+z-6)(z-x) = 0$$

$$z = x$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$y = x$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + z = 6$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$y^2 + yz + z^2 - 6y - 6z = x^2 + xz + z^2 - 6x - 6z$ Черновик

$y(6-x) + z^2 - 6y - 6z - x^2 = 0$ $xy = -6z + z^2$
 $x(6-x-z) = -6z + z^2$

$y^2 - x^2 + z(y-x) - 6y + 6x = 0$

$y(x+z)$ $z(x+z)$ $(y-x)(y+x) + z(y-x) - 6y + 6x = 0$
 $x^2 - 6z + 6x - z^2 \geq 0$ $y - x$ $(y+x+z) - 6y + 6x = 0$

$6y - 6x - 6y$ C_5^x C_{x-3}^2 C_x^3 $\frac{C_{x-3}^2}{C_x^3} = \frac{(x-3)!}{2! \cdot (x-5)!} \cdot \frac{x!}{(x-5)! \cdot 5!} = \frac{(x-3)! \cdot x!}{2! \cdot 5!}$

$xy = -6z + z^2$ $yz = -6x + x^2$ $zx = -6y + y^2$ $\frac{(x-3)!}{2! \cdot 5!} \cdot \frac{x!}{(x-5)! \cdot 5!} = \frac{(x-3)! \cdot x!}{6! \cdot 5!}$

$\frac{(x-3)! \cdot 9!}{6! \cdot x!} : \frac{(x-5)! \cdot 5!}{2! \cdot x!} = \frac{9!}{6!}$

$z^2 - 6z \geq 0$ $(z^2 - 6z) \geq 0 \Rightarrow z < 0$
 $x, y > 0$ $x, y > 0$

$zx < 0$ $xz, yz < 0$
 $y^2 - 6y \in (0; 6)$ $x, y \in (0; 6)$
 $yz < 0$ $xz = -6y + y^2$
 $x \in (0; 6)$ $y^2 < 0$

$y(x+z) =$ $y(x-z) = (z-x)(z+x) =$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

20001
4 → 3 → 3
3 → 3 → 4
3 → 1 → 3

$y = \frac{6 \pm 2\sqrt{9+8x}}{2} = 3 \pm \sqrt{9+8x}$

$xy = -6z + z^2$
 $yz = -6x + x^2$
 $zx = -6y + y^2$

$y^2 - 6y - zx = 0$
 $\sqrt{36+4zx} = 2\sqrt{9+8x}$

$x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$
 $5x^2 - (a^2 - 4a)x - 2a^2 - 6a - 15 = 0$

$(a^2 - 4a)^2 - 4(a^2 - 6a + 4) =$
 $= a^4 - 8a^3 + 16a^2 - 4a^2 + 24a - 16 =$
 $= a^4 - 8a^3 + 12a^2 + 24a - 16$
 $= (a-2)^2(a^2 - 4a + 12)$

$(a^2 - 6a + 4)(a^2 - 4a + 12)$

$|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}| + |y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}| < 8$
 $y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} > 0, y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} > 0$
 $y > 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}$

$xy = -6z + z^2$
 $yz = -6x + x^2$
 $zx = -6y + y^2$
 $6^2 - 6 \cdot 3 = 3^2$
 $6^2 - 6 \cdot 3 = 3^2$

$x(y+z) = z^2 - 6z - 6y + y^2$
 $x(y+z) + 2zy = (y+z)^2 - 6(z+y)$
 $x(y+z) + 2zy = (y+z-6)(y+z)$
 $(y+z)(y+z-6-x) = 2zy$

$(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 =$
 $x^2 + y^2 + z^2 + 36 \cdot 3 - 2(6x + 6y + 6z) =$
 $= xy + yz + zx - 6x - 6y - 6z + 96 - 3$

$xy = f(z)$
 $yz = f(x)$
 $zx = f(y)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\begin{cases} xy = -6z + z^2 \\ yz = -6x + x^2 \\ zx = -6y + y^2 \end{cases}$

$(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2$

$(z + \frac{1}{2}x)^2 = z^2 + xz + \frac{1}{4}x^2 = z^2 - 6y + y^2 + \frac{1}{4}x^2$

$(z + x + y - 3)^2 = z^2 + x^2 + y^2 - 6z - 6y - 6x + 9 + 2xz + 2xy + 2yz$

$3(xy + yz + zx) + 9 \geq 0$
 $xy + yz + zx \leq -3$

$\begin{cases} y = -6z + z^2 \\ yz = -5 \\ z = -6y + y^2 \end{cases}$

$f(z) = f(y)$
 $f(z) = y$ $f(f(z)) =$

$f(z) = xy$
 $f(x) = yz$
 $f(y) = zx$

$(xy)^2 = 6xy$

$z > 6$ $xy > 0$
 1) $x < 0$ $y < 0$
 $f(x) > 0$ $f(y) > 0$
 $yz < 0$

$0 < z < 6$
 $xy < 0$
 $x, y, z > 6$
 $x = y = z = 6$
 $x = 6$ $y = 0$ $y \neq 0$
 $z = 0$

$z < 6$
 $xy < 0$
 $x < 0$ $y > 0$
 $f(x) < 0$, $xy > 0$

$z < 0$
 $f(z) > 0$ $x, y > 0$ $x, y < 0$
 $f(x), f(y)$
 $x > 6$ $f(x) > 0$
 $6 > x > 0$ $f(x) < 0$ $f(z) > 0$
 $6 > y > 0$ $f(y) < 0$

$\frac{y}{z} = \frac{z(z-6)}{y(y-6)}$

$y^2(y-6) = z^2(z-6)$
 $y^3 - 6y^2 = z^3 - 6z^2$
 $(y-z)(y^2 + yz + z^2) - 6(y-z)(y+z) =$
 $= (y-z)(y^2 + yz + z^2 - 6y - 6z)$
 $y - z = 6$ $y^2 + yz + z^2 - 6y - 6z$
 $y = 6 + z$ $y^2 + y(z-6) + z(z-6)$
 $(6+z)^2 - 6(6+z) + z(z-6) =$
 $6^2 + 12z + z^2 - 36 - 6z + z^2 - 6z =$
 $z^2 - 12z + 36 = (z-6)^2$
 $z^2 - 12z + 36 = (z-6)^2$
 $z^2 - 12z + 36 = z^2 - 12z + 36$
 $z^2 - 12z + 36 = z^2 - 12z + 36$

$\frac{y}{z} = \frac{z(z-6)}{y(y-6)}$ $\frac{x}{z} = \frac{z(z-6)}{x(x-6)}$
 $\frac{y}{z} = \frac{x}{z} = \frac{y(y-6)}{x(x-6)}$

$z^2 - 6z - 6y + zy + y^2 = 0$

$z^2 - 6z^2 - y^3 + 6y^2 =$
 $= (z-y)(z^2 + zy + y^2)$
 $- 6(z-y)(z+y) =$
 $-(z-y)(z^2 - 6z + 6y + zy + y^2)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} xy &= -6z + z^2 \\ yz &= -6x + x^2 \\ zx &= -6y + y^2 \end{aligned}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{y(y-6)}{x(x-6)}$$

$$\frac{x}{z} = \frac{z(z-6)}{x(x-6)}$$

$$\frac{y}{z} = \frac{z(z-6)}{y(y-6)}$$

$$y(y-6) = x(x-6) = z(z-6) \quad x, y = 6, 0$$

$$y^3 - 6y^2 - x^3 + 6x^2 = 0$$

$$(y-x)(y^2 + yx + x^2 - 6y - 6x) = 0$$

$$(y-x)(y^2 + yx + x^2 - 6y - 6x) = 0$$

$$y^2 + yx + x^2 - 6y - 6x = 0$$

$$y^2 + y(x-6) + x(x-6) = 0$$

$$(y+x)(x-6) = 0$$

$$y(x+y) + y(x-6) = 0$$

$$y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} > 0$$

$$2y \quad y \leq 24$$

$$y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} > 0$$

$$y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} < 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{3}} &\leq 8 \\ x &\leq 8\sqrt{3} \\ 0 &\geq -8\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xy &= -6z + z^2 \\ yz &= -6x + x^2 \\ zx &= -6y + y^2 \end{aligned}$$

$$\left(20 - \frac{CD \cdot \sqrt{19}}{10}\right)^2 + DC^2 = 20^2$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{19}}{10} \cdot AD + \frac{\sqrt{19}}{10} \cdot CD &= 20 \\ \frac{\sqrt{19}}{10} \cdot AD + \frac{\sqrt{19}}{10} \cdot AD + DC^2 &= 20^2 \\ \sqrt{19}(AD + CD) &= 200 = 20^2 \\ AD^2 + BD^2 &= 100 \end{aligned}$$

$$400 + CD^2 \frac{19}{100} - 4\sqrt{19} \cdot CD + DC^2 = 400 \quad CD^2 \cdot \frac{19}{100} = 4\sqrt{19} \cdot CD$$

$$CD = \frac{400\sqrt{19}}{119}$$

