

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = -6y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x - 6)^2 + (y - 6)^2 + (z - 6)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 20 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 10$, $BE = 9$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарик. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть девять коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$ являются пятым и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| + \left|y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| \leq 8$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle CBA = 46^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

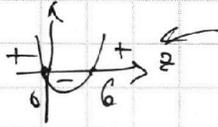
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решаем II:

$$\begin{cases} x=y \\ x+y+z=6 \\ z=6-2x \end{cases}$$



при IV. пусть $x > y > z$
 $z^2 - 6z = xy < z^2$
 $z < 0$
 $f(x) = z^2 - 6z$
 применяет
 $x > 0$ при $z \in (-\infty; 0) \cup (6; +\infty)$, т.е.
 $z^2 - 6z > 0 \Rightarrow x, y > 0$
 $z < 0 \Rightarrow x, y \in (0; 6)$

$$x(6-2x) = -6x + x^2$$

$$6x - 2x^2 = -6x + x^2$$

$$3x^2 - 12x = 0$$

$$\begin{cases} x=4 \\ x=0 \text{ или } y \neq 0 \end{cases}$$

значит, $x=4, y=4, z=-2$ Проверка:

$$xy = -6z + z^2$$

$$16 = -2(-6) + 4 \text{ верно}$$

$$xz = -6y + y^2$$

$$-8 = -24 + 16 \text{ верно}$$

Реш. Аналогично в II и III:

$$II \quad y=4, z=4, x=-2$$

$$III \quad z=4, x=4, y=-2$$

В любом из этих случаев:

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = (-2)^2 + (-2)^2 + (-6)^2 = 8 + 36 = 44$$

IV: $x+y+z=6$
 $x \neq y, y \neq z, z \neq x$

поделим (1) на (2) ($x, z \neq 0, x, z \neq 6$, т.е. обе части не равны 0)

$$\frac{x}{z} = \frac{-6z + z^2}{-6x + x^2} \Leftrightarrow z^2(z-6) = x^2(x-6)$$

Аналогично для (1) и (3) $\frac{y}{z} = \frac{z^2 - 6z}{y^2 - 6y} \Leftrightarrow y^2(y-6) = z^2(z-6)$

$$y^3 - 6y^2 = z^3 - 6z^2$$

$$(y-z)(y^2 + yz + z^2) - 6(y-z)(y+z) = 0$$

Аналогично $(y-z)(y^2 + yz + z^2 - 6y - 6z) = 0$
 $(z-x)(x^2 + z^2 + xz - 6x - 6z) = 0$
 $(x-y)(x^2 + y^2 + xy - 6x - 6y) = 0$

т.к. $x \neq z, z \neq y, y \neq x$

Ответ: 42



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = \underbrace{99 \dots 9}_{20001} = 10^{20001} - 1$$

$$n^3 = (10^{20001} - 1)^3 = 10^{60003} - 3 \cdot 10^{40002} + 3 \cdot 10^{20001} - 1$$

$$10^{60003} - 1 = \underbrace{99 \dots 99}_{60003}$$

(с кенца)

При возведении $3 \cdot 10^{40002}$ 9 на 40003 месте превратится

в 6, а при прибавлении $3 \cdot 10^{20001}$ 9 на 20002 месте

станет 2, произойдет перенос через разряд, из-за

которого, следующие 9 станут 0. Это будет

$$\begin{array}{r} + 9996 \quad 99 \dots 9 \\ \quad \quad \quad 30 \dots 0 \\ \hline 9997009 \dots 9 \end{array}$$

продолжаться, пока не дойдет до 6. Она станет 7-ой и все!

Т.е. все цифры на местах от 20002 до 40003 не будут 9, а остальные будут

Т.е. все 9 будет $\underbrace{20001}_{\text{до 2, где произошел перенос}}$ и $\underbrace{60003 - 40003 = 20000}_{\text{месте 7}}$.

Итого: $20001 + 20000 = \underline{40001}$

Ответ: 40001



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Доказано:

ω - окружность

AB - диаметр

$BC \cap \omega = \{B, D\}$

$DF \perp AC, F \in AC$

$DE \cap \omega = \{E\}$

$AC = 20$

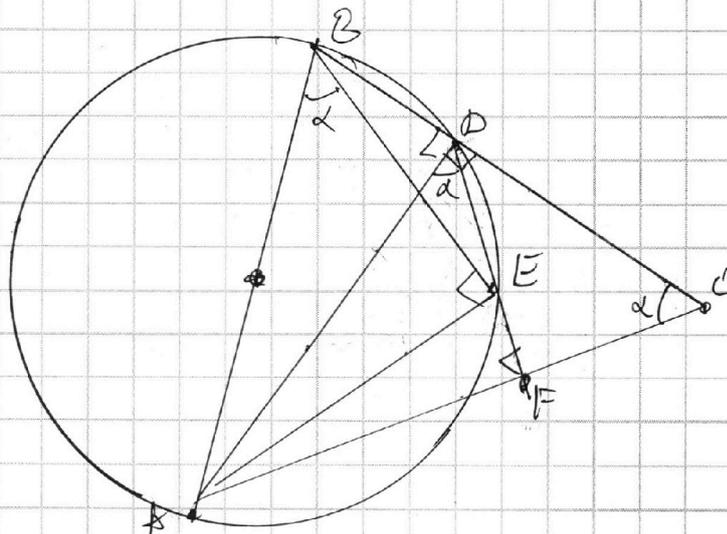
$AB = 10$

$BE = 9$

Найти:

AF

Решение:



Так как AB - диаметр, то $\angle ADB = \angle AEB = 90^\circ$.

По т. Пифагора для $\triangle BEA$:

$$BE^2 + AE^2 = AB^2$$

$$81 + AE^2 = 100$$

$$AE = \sqrt{19}$$

Пусть $\angle ABE = \alpha$, тогда $\sin \alpha = \frac{\sqrt{19}}{10}$.

Т.к. ABDE - впис., то $\angle ADE = \alpha$.

Т.к. $\angle ADC = 90^\circ$, $\angle AFD = 90^\circ$, и $\angle DAC$ у $\triangle ADF$ и $\triangle ADC$ общие, то $\angle DCA = \alpha$.

По т. Пифагора для $\triangle ADC$:

$$AD^2 + DC^2 = AC^2$$

$$AD^2 = AF^2 \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \frac{AF^2}{\frac{19}{100}} = \frac{100 AF^2}{19}$$

$$DC^2 \cdot \cos^2 \alpha = (20 - AF)^2 = (FC)^2$$

$$DC^2 = \frac{(20 - AF)^2}{\cos^2 \alpha} = \frac{100(20 - AF)^2}{81}$$

$$100(20 - AF)^2 + 100 AF^2 = 20^2$$

$$100 \cdot 400 + AF^2 \cdot 100 + 100 \cdot AF^2 - 40 \cdot 100 \cdot AF = 20^2 \cdot 19$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$200AF^2 - 4000AF = 20^2 \cdot 19 - 40000$$

$$\frac{100(20-AF)^2}{81} + \frac{100 \cdot AF^2}{19} = 4000$$

$$\frac{1900(20-AF)^2}{81} + \frac{100AF^2}{19} = 4$$

$$19(20-AF)^2 + 8AF^2 = 4 \cdot 19 \cdot 81$$

$$100AF^2 + 19 \cdot 400 - 19 \cdot 40 \cdot AF = 4 \cdot 19 \cdot 81$$

$$100AF^2 - 19 \cdot 40 \cdot AF - 19 \cdot 19 \cdot 4 = 0$$

$$(10AF)^2 - 19 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 2AF - (19 \cdot 2)^2 = 0$$

$$(10AF - 38)^2 = 0$$

$$AF = 3,8$$

Ответ: 3,8



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть у нас x коридок ^{лсф}

Урок водружает коридки C_0^5 соседями. При этом возмозможны комбинации C_{x-3}^2 (порядок коридок для 3-х етпур)

$$\frac{C_{x-3}^2}{C_x^5} = \frac{\frac{(x-3)!}{2!(x-5)!}}{\frac{x!}{(x-5)! \cdot 5!}} = \frac{(x-3)! \cdot 5!}{x! \cdot 2!}$$

При 9 коридках вероятность ^(по аналогии с обратными) $\frac{C_{x-3}^2}{C_x^5} =$

$$= \frac{\frac{(x-3)!}{6!(x-9)!}}{\frac{x!}{(x-9)! \cdot 9!}} = \frac{(x-3)! \cdot 9!}{6! \cdot x!}$$

$$\frac{(x-3)! \cdot 9!}{6! \cdot x!} \cdot \frac{(x-3)! \cdot 5!}{x! \cdot 2!} = \frac{9! \cdot 2!}{6! \cdot 5!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{6 \cdot 7}{5} = 1,4$$

Ответ: 6 1,4 раза



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

и 5^{-}

$$x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0 \quad (1)$$

$$5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^2 - 6a - 15 = 0 \quad (2)$$

Пусть корни (1) - x_1 и x_2 , а (2) - x_3 и x_4 .

$$x_3 - x_4 = x_1 - x_2 = x_2 - x_3 = x_4 - x_1$$

$$x_1 - x_3 = x_4 - x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = x_3 + x_4$$

$$(1) \text{ имеет два корня } \Leftrightarrow (a^2 - 4a)^2 - 4(a^2 - 6a + 4) > 0$$

$$(2) \text{ имеет два корня } \Leftrightarrow (a^3 - 4a^2)^2 + 20(2a^2 + 6a + 15) > 0$$

По т. Виета для (1): $x_1 + x_2 = a^2 - 4a$, а $x_3 + x_4 =$
 $= \frac{a^3 - 4a^2}{5}$

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4$$

$$a^2 - 4a = \frac{a^3 - 4a^2}{5}$$

$$5a^2 - 20a = a^3 - 4a^2$$

$$a^3 - 9a^2 + 20a = 0$$

$$a(a^2 - 9a + 20) = 0$$

$$a(a - 4)(a - 5) = 0$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ a = 4 \\ a = 5 \end{cases}$$

при $a = 0$ $(a^2 - 4a)^2 - 4(a^2 - 6a + 4) =$
 $= 0 - 16 < 0$
 Т.е. $a \neq 0$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

при $a=4$:

$$(1) x^2 - 0 + 16 - 2x + 4 = 0$$

$$x^2 - 2x + 20 = 0$$

$$x = 2$$

$$x = -2$$

Но $x_2 - x_1 = 4$, а $x_1 - x_3 = -2 + \frac{\sqrt{16}x}{5}$

т.е. разность прогрессии

$4 \neq -2 + \frac{\sqrt{16}x}{5}$, значит, $a=4$ не подходит

$$(2) 5x^2 - (64-64)x - 2 \cdot 64 - 24 - 15 = 0$$

$$5x^2 - 128 - 24 - 15 = 0$$

$$x^2 = \frac{128+39}{5}$$

$$x^2 = \frac{167}{5}$$

$$x = \frac{\sqrt{167}}{5}$$

$$x = -\frac{\sqrt{167}}{5}$$

при $a=5$:

$$(1) x^2 - (25-20)x + 25 - 30 + 4 = 0$$

$$x^2 - 5x - 1 = 0 \quad D = 25 + 4 = 29$$

$$\begin{cases} x = \frac{5 + \sqrt{29}}{2} \\ x = \frac{5 - \sqrt{29}}{2} \end{cases}$$

$$x_3 = \frac{5 - 3\sqrt{29}}{2}$$

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{29}}{2}$$

$$x_2 = \frac{5 + \sqrt{29}}{2}$$

$$x_4 = \frac{5 + 3\sqrt{29}}{2}$$

Разность прогрессии равна $\sqrt{29} \neq 1$.
не подходит.

$$(2) 5x^2 - (125 - 100)x - 2 \cdot 125 - 30 - 15 = 0$$

$$5x^2 - 25x - 250 - 45 = 0$$

$$x^2 - 5x - 59 = 0$$

$$D = 25 + 4 \cdot 59 = 25 + 236 = 261 = 9 \cdot 29$$

$$\begin{cases} x = \frac{5 + 3\sqrt{29}}{2} \\ x = \frac{5 - 3\sqrt{29}}{2} \end{cases}$$

Ответ: 5



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 4

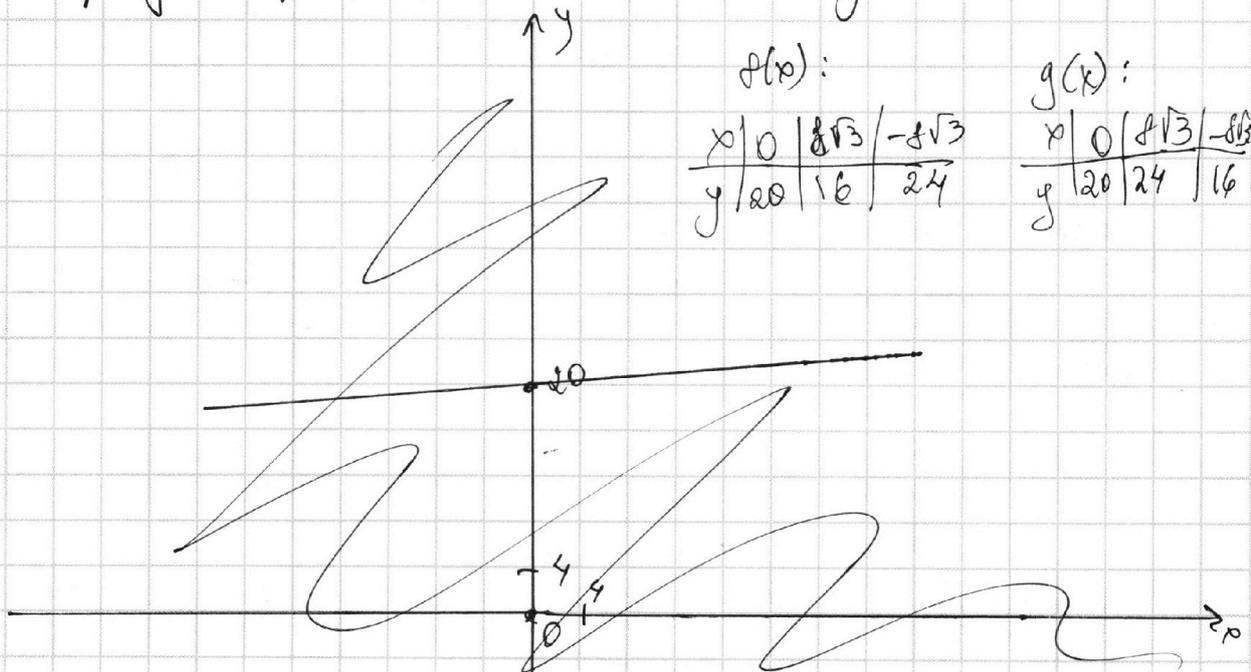
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0 \quad \text{22157}$$

$$5x^2 - (a^2 - 4a^2)x - 2a^2 - 6a - 15 = 0$$

$$|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}| + |y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}| \leq 8 \quad \text{126}$$

Нарисуем график. $f(x) = 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}$, $g(x) = 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}$

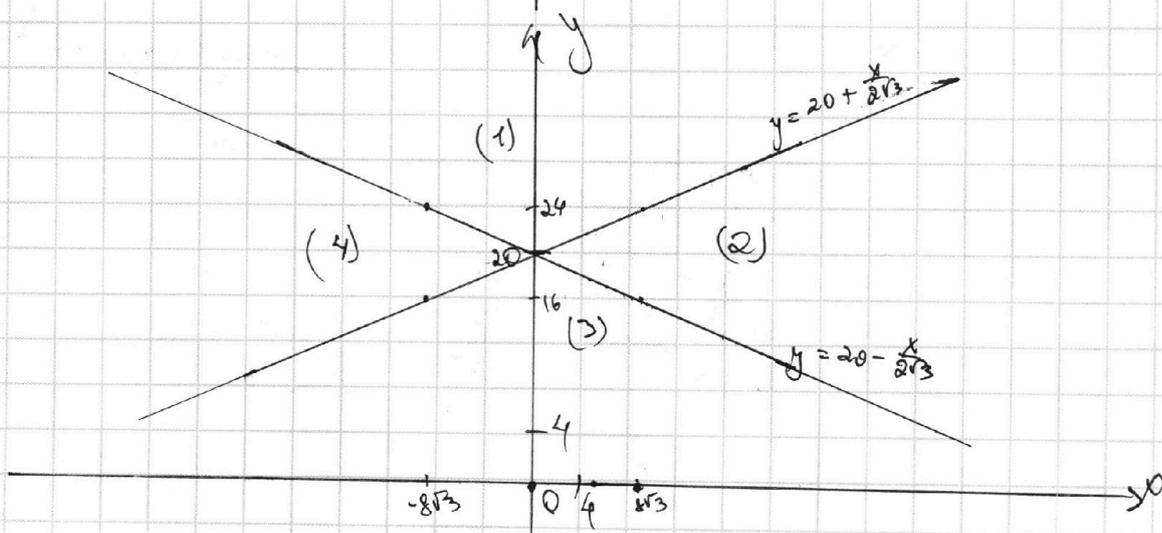


$f(x)$:

x	0	$8\sqrt{3}$	$-8\sqrt{3}$
y	20	16	24

$g(x)$:

x	0	$8\sqrt{3}$	$-8\sqrt{3}$
y	20	24	16





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Прямые дают плоскость на 4 полуплоскости.
(def OX и OY)

$$(1) : \begin{cases} y > 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \\ y > 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$(2) : \begin{cases} y < 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \\ y > 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$(3) : \begin{cases} y < 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \\ y < 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$(4) : \begin{cases} y < 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \\ y > 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

В (1) Φ содержит все точки, где $y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} + y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 8$,
это равносильно $y \leq 24$. В (3) аналогично $y \leq 16$.

$$y \geq 24 \quad -2y + 40 \leq 8 \Leftrightarrow y \geq 16.$$

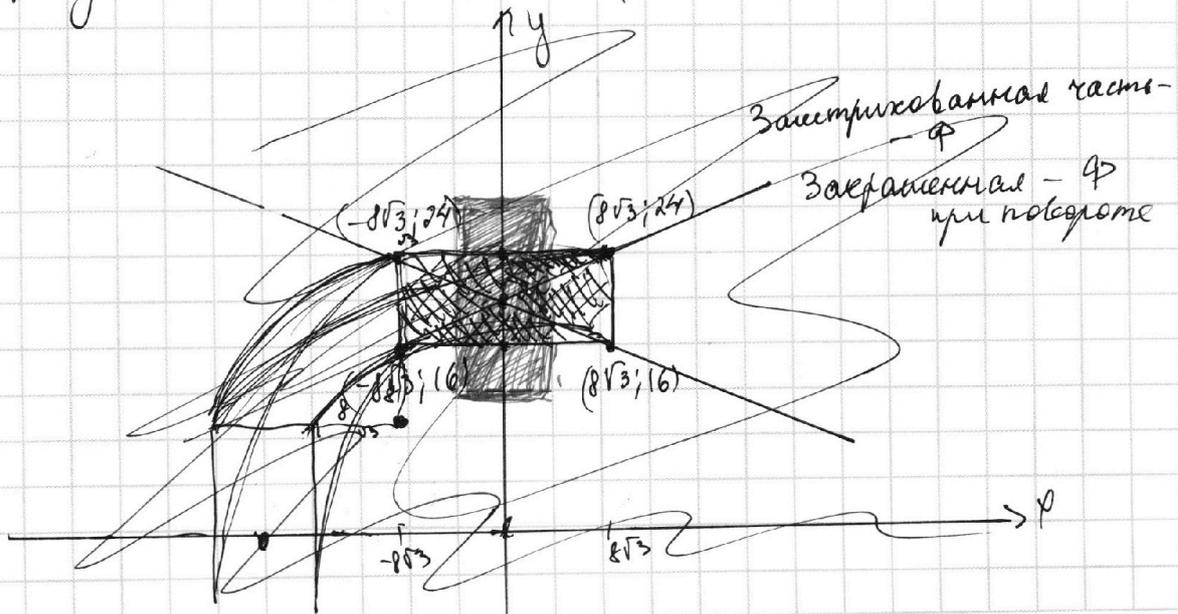
В (2) Φ содержит точки, где $y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} - (y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}) \leq 8$

$$y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} - (y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}) \leq 8$$

$$\frac{x}{\sqrt{3}} \leq 8$$

$$x \leq 8\sqrt{3}$$

Аналогично в (4) Φ имеет точки, где $x \geq -8\sqrt{3}$
Нерешу. Отметим эти точки



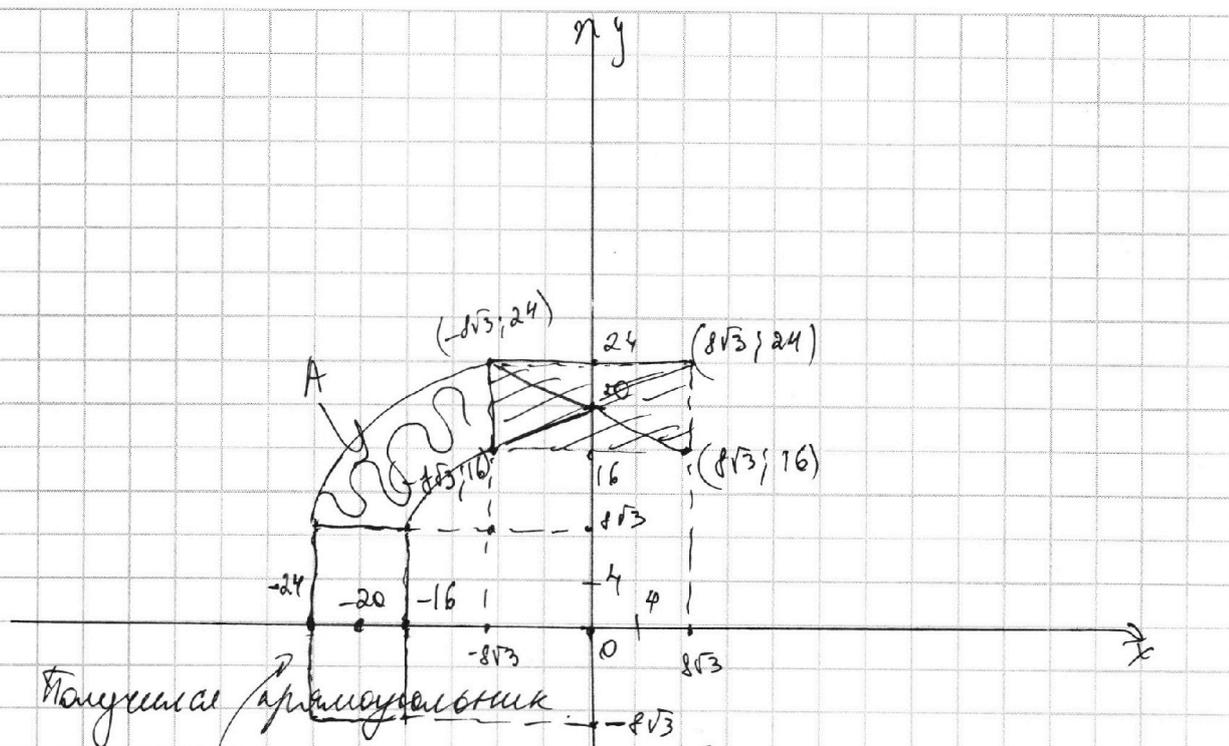


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



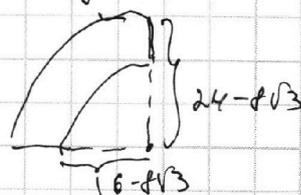
При повороте

Назовем фигуру, отмеченную
вышестой мышью - A.

$$S_A = \frac{(24-8\sqrt{3})^2 \pi}{4} - \frac{(16-8\sqrt{3})^2 \pi}{4}$$

площадь
четверти круга
с рад $24-8\sqrt{3}$

площадь
четверти
круга с рад.
 $16-8\sqrt{3}$



Заметим область,
заштрихованную
вышестой мышью
+ прямоугольник

$$S_A = \frac{24^2 \cdot \pi - 16^2 \pi - 24 \cdot 8\sqrt{3} \cdot 2\pi + 16 \cdot 8\sqrt{3} \cdot 2\pi}{4} = \frac{40 \cdot \pi - 8\sqrt{3} \pi (48-32)}{4}$$

$$= 40 \cdot 2 \cdot \pi - 8\sqrt{3} \pi \cdot 16 = 80\pi - 32\sqrt{3}\pi = \pi(80 - 32\sqrt{3})$$

$$S_{\text{ф}} = (16 + 2\sqrt{3}) \cdot 8 = 80 + 16\sqrt{3} = 12\pi + 16\sqrt{3}$$

$$S = S_{\text{ф}} + S_A = \pi(80 - 32\sqrt{3}) + 12\pi + 16\sqrt{3}$$

заметим



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: $\pi(10 - 32\sqrt{3}) + 128 + 16\sqrt{3}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

~~16~~
 $yx + zx + zy = 0$

$xy = -6z + z^2$

$yz = -6x + x^2$

$zx = -6y + y^2$

$x + y + z = 6$

$z = x$

$x + y + z = 6$

$2x + z = 6$

$xy - yz = z^2 - x^2 - 6(z - x)$

$-y(z - x) = (z - x)(x + y) - 6(z - x)$

$(z - x) \cdot (-y) = (z - x)(x + y - 6)$

$(x + y + z - 6)(z - x) = 0$

$y^2 + yz + z^2 - (x + y + z)y$

$\begin{cases} z = x \\ x + y + z = 6 \end{cases}$

$\begin{cases} y = x \\ x + y + z = 6 \end{cases}$

$0 = 2z - 6$

$x^2 = -6(6 - 2x) + (6 - 2x)^2 = yz - yx - yz$

$x^2 = -36 + 12x + 36 - 24x + 4x^2 = -yx - 2x - 2y = 0$

$3x^2 - 12x = 0$

$3x(x - 4) = 0$

$x = 4$

$4 \quad 4 \quad -2$

$z = x = y$

$x^2 = -6x + x^2$

$x = 0$

$z = x$

$x + y + z = 6$

$2x + y = 6$

$16 = -6 \cdot (-2) + 4$

$-2 \cdot 4 = -24 + 16$

$x + y + z = 6$

$z = (6 - x - y)$

$y(6 - x - y) = -6x + x^2$

$x^2 = 6x$

$-6z + z^2 = xy > z^2$

$-6z > 0$

$z < 0$

$-60 + x^2$

$x > 0$

$zx < x^2$

$xy > zx$

$(z - x)(y - z) = -z^2 - xy + xz + zy$

$y^2 + yz - 6y = z^2 + yz + z^2 - 6y - 6z + x^2 + z^2 + 2xz - 6x - 6z + x^2 + y^2 + xy - 6x - 6y$

$x^2 + y^2 - 6y + 6x + yz - xz = 0 \cdot y + \sqrt{2} \cdot z + \sqrt{2} \cdot x$

$= x^2 + y^2 + 6(x - y) = z(x - y) = x^2 + y^2 + (x - y)(x - y) =$

$y^2 + yz + z^2 - 6y - 6z + x^2 + z^2 + 2xz - 6x - 6z + x^2 + y^2 + xy - 6x - 6y$

$(x + y + z - 6)(z - x) = 0$

$(x - y)(y - z) = -z^2 - xy + xz + zy$

$z^2 + yz + z^2 - 6y - 6z + x^2 + z^2 + 2xz - 6x - 6z + x^2 + y^2 + xy - 6x - 6y$

$(x + y + z - 6)(z - x) = 0$

$(x - y)(y - z) = -z^2 - xy + xz + zy$

$z^2 + yz + z^2 - 6y - 6z + x^2 + z^2 + 2xz - 6x - 6z + x^2 + y^2 + xy - 6x - 6y$

$(x + y + z - 6)(z - x) = 0$

$(x - y)(y - z) = -z^2 - xy + xz + zy$

$z^2 + yz + z^2 - 6y - 6z + x^2 + z^2 + 2xz - 6x - 6z + x^2 + y^2 + xy - 6x - 6y$

$(x + y + z - 6)(z - x) = 0$

$(x - y)(y - z) = -z^2 - xy + xz + zy$

$z^2 + yz + z^2 - 6y - 6z + x^2 + z^2 + 2xz - 6x - 6z + x^2 + y^2 + xy - 6x - 6y$

$(x + y + z - 6)(z - x) = 0$

$(x - y)(y - z) = -z^2 - xy + xz + zy$

$z^2 + yz + z^2 - 6y - 6z + x^2 + z^2 + 2xz - 6x - 6z + x^2 + y^2 + xy - 6x - 6y$

$(x + y + z - 6)(z - x) = 0$

$(x - y)(y - z) = -z^2 - xy + xz + zy$

$z^2 + yz + z^2 - 6y - 6z + x^2 + z^2 + 2xz - 6x - 6z + x^2 + y^2 + xy - 6x - 6y$

$(x + y + z - 6)(z - x) = 0$

$(x - y)(y - z) = -z^2 - xy + xz + zy$

$z^2 + yz + z^2 - 6y - 6z + x^2 + z^2 + 2xz - 6x - 6z + x^2 + y^2 + xy - 6x - 6y$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$y^2 + yz + z^2 - by - bz = x^2 + xz + xz - bx - bz$$

$$y(6-x) + z^2 - by - bz = 0 \quad by = -bz + z^2$$

$$x(6-x-z) = -bz + z^2$$

$$y^2 - xz + z(y-x) - by + bx = 0$$

$$z(x+z) \quad (y-x)(y+z) + z(y-x) - by + bx = 0$$

$$x^2 - bz - bx - xz \geq 0$$

$$y-x \quad (y+x+z) - by + bx = 0$$

$$by - bx - by$$

$$C^5_x \quad C^2_{x-3} \quad C^3_x$$

$$\frac{C^2_{x-3}}{C^5_x} = \frac{(x-3)!}{2! \cdot (x-5)!} = \frac{(x-3)! \cdot 5!}{2! \cdot x!}$$

$$xy = -bz + z^2$$

$$yz = -bx + xz$$

$$zx = -by + y^2$$

$$\frac{(x-3)! \cdot 9!}{6! \cdot x!} : \frac{(x-5)! \cdot 5!}{2! \cdot x!} = \frac{9!}{6!}$$

$$z^2 - bz \geq 0 \quad (z^2 - bz) > 0 \quad z < 0$$

$$x, y > 0 \quad x, y > 0$$

$$zx < 0 \quad xz, yz < 0$$

$$y^2 - by \in (0; 6) \quad x, y \in (0; 6)$$

$$x^2 - bx < 0 \quad xz = -by + y^2$$

$$x \in (0; 6) \quad yz < 0$$

$$y(x+z) = (z-x)(z+x)$$

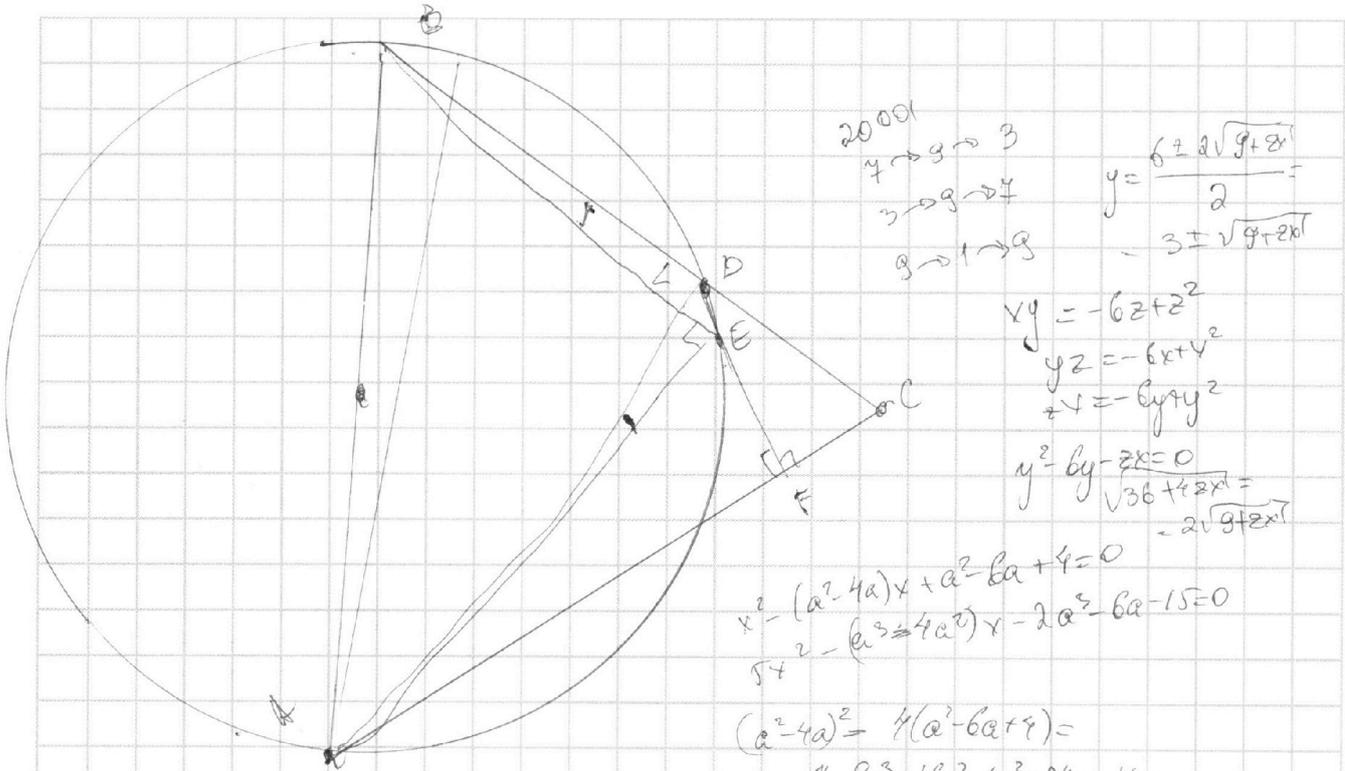


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



2000
 $4 \rightarrow 3 \rightarrow 3$
 $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$
 $3 \rightarrow 1 \rightarrow 3$

$$y = \frac{6 \pm \sqrt{9+2x}}{2} = 3 \pm \sqrt{9+2x}$$

$$xy = -6z + z^2$$

$$yz = -6x + x^2$$

$$zx = -6y + y^2$$

$$y^2 - 6y - 2x = 0$$

$$\sqrt{36+42x} = -2\sqrt{9+2x}$$

$$x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$$

$$y^2 - (a^2 - 4a)y - 2a^2 - 6a - 15 = 0$$

$$(a^2 - 4a)^2 - 4(a^2 - 6a + 4) =$$

$$= a^4 - 8a^3 + 16a^2 - 4a^2 + 24a - 16 =$$

$$= a^4 - 8a^3 + 12a^2 + 24a - 16$$

$$(a^2 - 4a - 4)(a^2 - 4a + 4)$$

$$\left| y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \right| + \left| y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \right| < 8$$

$$y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} > 0, y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} > 0$$

$$y > 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{32}{6} < 6$$

$$\frac{1}{4} - \frac{8}{43} > \frac{8}{43}$$

$$+ \frac{12\sqrt{16}}{16} + \frac{24}{9} - 16 =$$

$$= 32 + 12 \cdot 16 + 24 \cdot \frac{4}{9} - 16 \cdot 9$$

$$xy = -6z + z^2$$

$$yz = -6x + x^2$$

$$zx = -6y + y^2$$

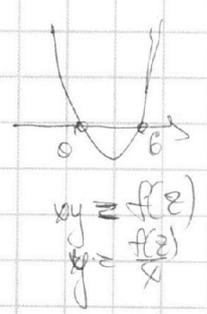
$$6^2 - 6 \cdot 3 = 3^2$$

$$x(y+z) = z^2 - 6z - 6y + y^2$$

$$x(y+z) + 2zy = (y+z)^2 - 6(z+y)$$

$$x(y+z) + 2zy = (y+z-6)(y+z)$$

$$(y+z)(y+z-6-x) = 2zy$$



$$(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 =$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 36 \cdot 3 - 2(6x + 6y + 6z) =$$

$$= xy + yz + zx - 6x - 6y - 6z + 36 \cdot 3$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper, including algebraic derivations and geometric diagrams.

Algebraic Equations:

- $xy = -6z + z^2$
- $yz = -6x + x^2$
- $zx = -6y + y^2$
- $z^2 + x^2 + 2xz = z^2 + x^2 + 6x$
- $xy - yz = z - x)(z+x) - 6(z-x)$
- $-y(z-x) = (z-x)(z+x-6)$
- $(z-x)(z+x+y-6) = 0$
- $z+x+y = 6$
- $z = x$
- $x(6-y-x) = -6x + x^2$
- $6y - y^2 - yx = -6x + x^2$
- $x^2 - 6x + y^2 - 6y + yx = 0$
- $x(6-x-y) = -6y + y^2$
- $yx^2 = -6(6-x-y) + (6-x-y)^2$
- $xy + yz + zx = x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y - 6z$
- $xy + 36 = (z-6)^2$
- $z^2 - 6z = z(z-6)$
- $z^2 - 6z - xy = 0$
- $z = 3 \pm \sqrt{9+xy}$
- $z^3 = x^3 + 36x - 12x^2 - 6xy + 36y$
- $xy + yz + zx = x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y - 6z$
- $xy + 36 = (z-6)^2$
- $z^2 - 6z - xy = 0$
- $z = 3 \pm \sqrt{9+xy}$
- $z^3 = x^3 + 36x - 12x^2 - 6xy + 36y$

Geometric Diagrams:

- Diagram 1: A triangle with vertices A, B, C and various internal points and lines, possibly representing a geometric proof or construction.
- Diagram 2: A sphere with points A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z marked on its surface and along its axes.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$CH = CA = CD = CB$
 $2\alpha - \varphi$
 $90^\circ = 180^\circ + \alpha + \beta$
 $2\alpha + 2\beta = 180^\circ + 90^\circ = 270^\circ$
 $\alpha + \beta = 135^\circ$
 $\rightarrow 9 \rightarrow 3$
 $7 \quad 3 \rightarrow 9 \rightarrow 7$
 $9 \rightarrow 9 \rightarrow 9$
 $D - y$ опис. ΔAPO
 $x + z = 2\alpha$
 $2\beta - x = \dots$
 $2\alpha + 2\beta = 90^\circ$
 $180^\circ - x - 2\beta + x = 180^\circ - 2\beta$
 $y + z = 65^\circ$
 $y = 180^\circ - 90^\circ + \beta - \beta^2 + \beta - \alpha^2 = 2\beta - \alpha$
 $y = x - 2\alpha$
 $2y = 2\beta - 2\alpha$
 $y = \beta - \alpha$
 $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
 $(1000 \dots 0 - 1)^3$
 $10 \dots 0 - 1 = 3 \cdot 10 \dots 0 + 3 \cdot 10 \dots 0$
 60003
 40002
 20001
 20001
 40003
 20002
 20001
 $1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

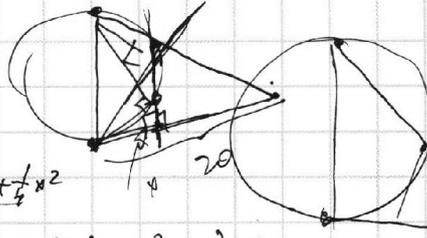
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2 \\ yz = -6x + x^2 \\ zx = -6y + y^2 \end{cases}$$

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2$$



$$\begin{aligned} z^2(z-6) &= \\ &= y^2(y-6) = \\ &= x^2(x-6) \end{aligned}$$

$$(z + \frac{1}{2}x)^2 = z^2 + xz + \frac{1}{4}x^2 = z^2 - 6y + y^2 + \frac{1}{4}x^2$$

$$(z+x+y-3)^2 = z^2 + x^2 + y^2 - 6z - 6y - 6x + 9 + 2xz + 2yz + 2zx$$

$$3(xy + yz + zx) + 9 \geq 0$$

$$xy + yz + zx \leq -3$$

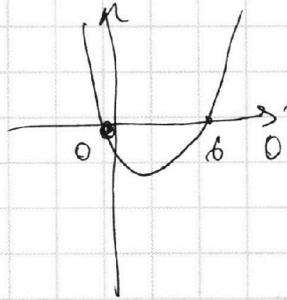
$$\begin{cases} y = -6z + z^2 \\ yz = -6x + x^2 \\ z = -6y + y^2 \end{cases}$$

$$f(z) = f(y) \\ f(z) = y \quad f'(f(z)) =$$

$$z^2 - 6z = xy$$

$$\begin{aligned} f(z) &= xy \\ f(x) &= yz \\ f(y) &= zx \end{aligned}$$

$$(xy)^2 = 6xy$$



$z > 6$ $xy > 0$

1) $x < 0$
 $y < 0$
 $f(x) > 0$
 $f(y) > 0$

2) $x > 0$
 $y > 0$
 $yz < 0$

$f(y) > 0$
 $xy > 6$

$0 < z < 6$
 $xy < 0$
 $x, y, z > 6$
 $x = y = z = 6$
 $x = 6, y = 0, z \neq 0$
 $z = 0$

$z < 6$
 $xy < 0$
 $x < 0, y > 0$
 $f(x) < 0, \text{ но } y, z > 0$

$z < 0$
 $f(z) > 0$
 $f(x), f(y)$

$x > 6, f(x) > 0$
 $6 > x > 0, f(x) < 0$
 $6 > y > 0, f(y) < 0$

$$\frac{y}{z} = \frac{z(z-6)}{y(y-6)}$$

$$y^2(y-6) = z^2(z-6)$$

$$y^3 - 6y^2 = z^3 - 6z^2$$

$$(y-z)(y^2 + yz + z^2) - 6(y-z)(y+z)$$

$$= (y-z)(y^2 + yz + z^2 - 6y - 6z)$$

$$y-z = 6 \quad y^2 + yz + z^2 - 6y - 6z$$

$$y = 6 + z$$

$$y^2 + y(z-6) + z(z-6)$$

$$(6+z)^2 - z = z^2(z-6)$$

$$(z-6)^2 + 4z(z-6) =$$

$$xy = -6y + y^2$$

$$= z^2 - 2z + z^2(z-6) - 3z - 6 =$$

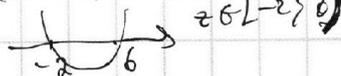
$$y^2 = -6x + x^2$$

$$z = -3(z-6)(z+2)$$

$$xy = -6y - 6x + y^2$$

$$(z-6)(z+2) \leq 0$$

$$y(x+6)$$



$$\frac{y}{z} = \frac{z(z-6)}{y(y-6)}$$

$$\frac{x}{z} = \frac{z(z-6)}{x(x-6)}$$

$$\frac{x}{z} = \frac{y}{y} = \frac{y(y-6)}{x(x-6)}$$

$$z^2 - 6z - 6y + zy + y^2 = 0$$

$$z^3 - 6z^2 - y^3 + 6y^2 =$$

$$= (z-y)(z^2 + zy + y^2)$$

$$- 6(z-y)(z+y) = (z-y)(z^2 - 6z + 6y + zy + y^2)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$y = 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}$
 $= 20 + \frac{\sqrt{3}}{2}x$
 $|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}| + |y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}| \leq 8$
 $|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}| < 0$
 $|y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}| < 0$
 $y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} < 0$
 $y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} < 0$
 $20 - y - \frac{x}{2\sqrt{3}} < 0$
 $20 - y - \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 8$
 $-\frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 8$
 $x \geq -8\sqrt{3}$
 $x \geq 0$
 $16 - 24 = C^3 \cdot 3! \cdot C^2 \cdot 2$
 $4 + 2 + 5 + 4 + 10 + 6 = 20 + 7 + 4 = 31$
 $v^2 = 5x + 20 = 30 + 4 = 0$
 $x^2 - 5x - 1 = 0$
 $25 + 4 = 29$
 $a(a-4)(a-5) = a(a^2 - 9a + 20)$
 $a^3 - 4a^2 = 5a^2 - 20a$
 $a^3 - 9a^2 + 20a = 0$

