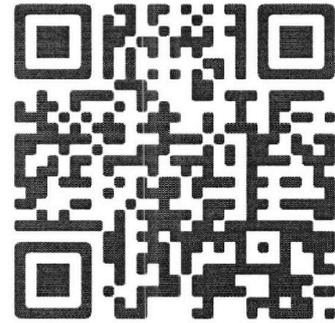


МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Ненулевые числа  $x, y, z$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения  $(x + 3)^2 + (y + 3)^2 + (z + 3)^2$ , если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа  $n$  состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа  $n^3$ ?
3. [5 баллов] Окружность  $\omega$  с диаметром  $AB$  пересекает сторону  $BC$  остроугольного треугольника  $ABC$  в точке  $D$ . Точка  $F$  выбрана на отрезке  $AC$  так, что  $DF \perp AC$ , а  $E$  — точка пересечения отрезка  $DF$  с окружностью  $\omega$ , отличная от  $D$ . Найдите  $AF$ , если  $AC = 10$ ,  $AB = 6$ ,  $BE = 5$ .
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарик. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых корни уравнения  $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$  являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения  $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$  являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура  $\Phi$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x, y)$  которых удовлетворяют неравенству  $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leq 3$ . Фигуру  $\Phi$  непрерывно повернули вокруг начала координат на угол  $\pi$  против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура  $\Phi$  при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе  $BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  выбраны точки  $P$  и  $Q$  так, что  $AB = BP$ ,  $AC = CQ$ . Внутри треугольника  $ABC$  выбрана точка  $D$ , для которой  $DP = DQ$ , а  $\angle PDQ = 90^\circ$ . Найдите  $\angle DBC$ , если известно, что  $\angle DCB = 20^\circ$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1. \begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{xy - z^2}{z} = 3 & (1) \\ \frac{yz - x^2}{x} = 3 & (2) \quad (\text{т.к. } x, y, z \neq 0) \\ \frac{zx - y^2}{y} = 3 & (3) \end{cases}$$

рав-во  
Рассм. (1) и (2):

$$\frac{xy - z^2}{z} = \frac{yz - x^2}{x}$$

$$x^2y - z^2x = yz^2 - zx^2$$

$$y(x-y)(x+y)$$

$$y(x-z)(z+x) + zx(x-z) = 0$$

$$(x-z)(yz + xy + zx) = 0$$

$$\text{т.е.} \begin{cases} x = z \\ yz + xy + zx = 0 \end{cases}$$

Рассм. рав-во (2) и (3):

$$\frac{yz - x^2}{x} = \frac{zx - y^2}{y}$$

$$y^2z - yx^2 = zx^2 - xy^2$$

$$z(y-x)(x+y) + xy(y-x) = 0$$

$$(y-x)(zx + zy + xy) = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

t.e. 
$$\begin{cases} x=y \\ z^2+yz+zx=0 \end{cases}$$

Предположим, что  $xy+yz+zx \neq 0$ .

Тогда т.к. (1), (2) и (3) вым. одновременно, то вым.  $x=z$  и  $x=y$  одновременно. т.е.  $x=y=z$ .

Пусть  $x=y=z=k$ , причём из усл. следует, что  $k \neq 0$ .

Перемесём усл. на (1):  
получим:

$$\frac{k \cdot k - k^2}{k} = 3$$

$$\frac{0}{k} = 3$$

$0=3$  - неверно

Получаем противоречие, тогда  $xy+yz+zx=0$ .

Тогда по системе из усл.  $z^2+3z+x^2+3x+y^2+3y=xy+yz+zx=0$

t.e.

$$x^2+y^2+z^2+3(x+y+z)=0$$

$$(x+y+z)^2 - \underbrace{2(xy+yz+zx)}_{=0} + 3(x+y+z) = 0$$

$$(x+y+z)(x+y+z+3) = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

получили:

$$\begin{cases} x+y+z = 0 \\ x+y+z = -3 \end{cases}$$

Получа:

$$\begin{aligned} (x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + 3x + 3z + 3y + \\ &+ 3x + 3y + 3z + 27 = (x^2 + 3x) + (y^2 + 3y) + (z^2 + 3z) + \\ &+ 3(x+y+z) + 27 \stackrel{\text{по системе}}{\text{из укл.}} = xy + yz + zx + 3(x+y+z) + 27 = \\ &= 3(x+y+z) + 27 \quad (\text{т.к. } xy + yz + zx = 0) \end{aligned}$$

Получили:

$$\begin{cases} (x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = 3 \cdot 0 + 27 = 27 \\ (x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = 3 \cdot (-3) + 27 = 18 \end{cases}$$

Ответ: 18; 27



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2. n = \underbrace{99 \dots 9}_{40000 \text{ цифр}} = 10^{40000} - 1$$

$$\begin{aligned} \text{тогда } n^3 &= (10^{40000} - 1)^3 = 10^{120000} - 3 \cdot 10^{80000} + \\ &+ 3 \cdot 10^{40000} - 1 = 10^{120000} + 3 \cdot 10^{40000} - 3 \cdot 10^{80000} - 1 = \\ &= \underbrace{100 \dots 0}_{80000 \text{ цифр}} \underbrace{300 \dots 0}_{40001 \text{ цифра}} - \underbrace{3000 \dots 001}_{\substack{\cancel{80000} \\ 80001 \text{ цифра}}} \end{aligned}$$

посчитаем в столбик:

$$\begin{array}{r} \underbrace{1000 \dots 0}_{40000 \text{ цифр}} \underbrace{000000 \dots 0}_{40000 \text{ цифр}} \underbrace{3000 \dots 00}_{40001 \text{ цифра}} \\ - \phantom{1000 \dots 0} \phantom{000000 \dots 0} \underbrace{300000 \dots 00}_{40000 \text{ цифр}} \underbrace{0000 \dots 01}_{40001 \text{ цифра}} \\ \hline 1111 \phantom{000000 \dots 0} 11 \phantom{3000 \dots 00} 1111 \phantom{00} 11 \\ \hline \underbrace{999 \dots 9}_{39999 \text{ цифр}} \underbrace{70000 \dots 0}_{40001 \text{ цифра}} \underbrace{2999 \phantom{00}}_{40000 \text{ цифр}} \phantom{00} 99 \end{array}$$

Получим, что  $n^3$  содержит  $39999 + 40000 = 79999$  девяток.

ответ: 79999



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4. Пусть всего  $n$  коробок. Тогда выбрать 5 из них можно  $C_n^5$  способами. Если, сколькокими способами можно открыть 5 коробок и выиграть. Для того, чтобы выиграть нужно открыть 3 коробки с шариками и ещё какие-то две из оставшихся, т.е.  $C_{n-3}^2$  вариантов.

$$\text{Тогда вероятность выигрыша равна } \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{\frac{(n-3)!}{(n-3-2)! \cdot 2!}}{\frac{n!}{(n-5)! \cdot 5!}} = \frac{(n-3)! \cdot 5! \cdot (n-5)!}{n! \cdot 2! \cdot (n-5)!} = \frac{60(n-3)!}{n!}$$

Аналогичные рассуждения проведём для открытия шести коробок.

$$\text{Получим, что вероятность выигрыша тогда равна } \frac{C_{n-3}^3}{C_n^6} = \frac{\frac{(n-3)!}{(n-3-3)! \cdot 3!}}{\frac{n!}{(n-6)! \cdot 6!}} = \frac{(n-3)! \cdot 6! \cdot (n-6)!}{n! \cdot 3! \cdot (n-6)!} = \frac{120(n-3)!}{n!}$$

$$\text{Тогда вероятность увеличится в } \frac{\left(\frac{120(n-3)!}{n!}\right)}{\left(\frac{60(n-3)!}{n!}\right)} = \frac{120}{60} = 2 \text{ раз.}$$

Ответ: в 2 раза



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5. Пусть корни ур-ий  $x^2 - (d^2 - d)x + d - 5 = 0$  и  $4x^2 - (d^3 - d^2)x + 2d^4 + 2d^2 - d^6 - 4 = 0$  принадлежат ормул. прог.  $(C_n)$ . Тогда по формул.  $C_5$  и  $C_6$  корни ур-я  $x^2 - (d^2 - d)x + d - 5 = 0$ , а  $C_3$  и  $C_8$  корни ур-я  $4x^2 - (d^3 - d^2)x + 2d^4 + 2d^2 - d^6 - 4 = 0$ .

По т. Виета получим.:

$$C_5 + C_6 = d^2 - d$$

$$C_3 + C_8 = \frac{d^3 - d^2}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{Заметим, что } d^2 - d = C_5 + C_6 &= C_1 + 4d + C_1 + 5d = \\ = C_1 + 2d + C_1 + 7d = C_3 + C_8 &= \frac{d^3 - d^2}{4}. \end{aligned}$$

Получим:

$$d^2 - d = \frac{d^3 - d^2}{4}$$

$$4d^2 - 4d = d^3 - d^2$$

$$4d^2 - 4d = d^3 - d^2$$

$$d^3 - 5d^2 + 4d = 0$$

$$d(d-1)(d-4) = 0$$

$$\begin{cases} d=0 \\ d=1 \\ d=4 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

①  $d=0$ :

Ур-я принимает вид:

$$x^2 - (0^2 - 0)x + 0 - 5 = 0$$

$$x^2 - 5 = 0$$

$$\left[ \begin{array}{l} x = \sqrt{5} \\ x = -\sqrt{5} \end{array} \right.$$

$$\left[ \begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array} \right.$$

$$4x^2 - (0^3 - 0^2)x + 2 \cdot 0^4 + 2 \cdot 0^2 - 0^6 - 4 = 0$$

$$4x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$\left[ \begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array} \right.$$

$$\left[ \begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array} \right.$$

Пусть  $\sqrt{5}$  и  $-\sqrt{5}$  могут быть пятым и

шестым членами <sup>ариф.</sup> прогр.  $(C_n)$ , а 1 и -1 третий и четвертый член  $(C_n)$ .  
Рассм. 2 случая:

1)  $C_5 = \sqrt{5}$ ,  $C_6 = -\sqrt{5}$

тогда  $d = C_6 - C_5 = -\sqrt{5} - \sqrt{5} = -2\sqrt{5}$

тогда получим:

$$C_3 = C_1 + 2d = C_1 + 4d - 2d = C_5 - 2d = \sqrt{5} - 2(-2\sqrt{5}) =$$

$$= 5\sqrt{5}$$

получаем противоречие, т.к.  $C_3 \notin \mathbb{N}$   $\left[ \begin{array}{l} C_3 = 1 \\ C_3 = 4 - 1 \end{array} \right.$

из второго ур-я. ~~Крестик~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) C_5 = -\sqrt{5}, C_6 = \sqrt{5}$$

тогда:

$$d = C_6 - C_5 = \sqrt{5} - (-\sqrt{5}) = 2\sqrt{5}$$

тогда получим:

$$C_3 = C_1 + 2d = C_1 + 4d - 2d = C_5 - 2d = \cancel{+\sqrt{5}} - \sqrt{5} - 2 \cdot 2\sqrt{5} = -5\sqrt{5}$$

получаем противоречие, т.к.  $\begin{cases} C_3 = 1 \\ C_3 = -1 \end{cases}$   
т.е.  $d=0$  не подходит

②  $d=1$ :

ур-я принимают вид:

$$x^2 - (1^2 - 1)x + 1 - 5 = 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$4x^2 - (1^3 - 1^2)x + 2 \cdot 1^4 + 2 \cdot 1^2 - 1^6 - 4 = 0$$

$$4x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
4 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $-2$  и  $2$  могут быть пятым и шестым членами арифм. прогр.  $(c_n)$ , а  $\frac{1}{2}$  и  $-\frac{1}{2}$  третьим и восьмым член  $(c_n)$ .

Рассм. 2 случая:

1)  $c_5 = -2, c_6 = 2$

тогда  $d = c_6 - c_5 = 2 - (-2) = 4$

тогда получим:

$$c_3 = c_1 + 2d = c_1 + 4d - 2d = c_5 - 2d = -2 - 2 \cdot 4 = -10$$

получаем противоречие, т.к.  $\begin{cases} c_3 = \frac{1}{2} \\ c_3 = -\frac{1}{2} \end{cases}$

2)  $c_5 = 2, c_6 = -2$

тогда  $d = c_6 - c_5 = -2 - 2 = -4$

тогда получим:

$$c_3 = c_1 + 2d = c_1 + 4d - 2d = c_5 - 2d = 2 - 2 \cdot (-4) = 10$$

получаем противоречие, т.к.  $\begin{cases} c_3 = \frac{1}{2} \\ c_3 = -\frac{1}{2} \end{cases}$

т.е.  $d = 1$  не подходит



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
4 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

③  $q=4$ :

уравнение примет вид:

$$x^2 - (4^2 - 4)x + 4 - 5 = 0$$

$$x^2 - 12x - 1 = 0$$

~~$$x = \frac{6 \pm \sqrt{40}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{10}}{2} = 3 \pm \sqrt{10}$$~~

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{37}}{2}$$

~~$$\begin{cases} x = 3 - \sqrt{10} \\ x = 3 + \sqrt{10} \end{cases}$$~~

$$\begin{cases} x = \frac{6 + \sqrt{37}}{2} \\ x = \frac{6 - \sqrt{37}}{2} \end{cases}$$

$$4x^2 - (4^3 - 4^2)x + 2 \cdot 4^4 + 2 \cdot 4^2 - 4^6 - 4 = 0$$

$$x^2 - (4^2 - 4)x + 2 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4 - 4^5 - 1 = 0$$

$$x^2 - 12x + 128 + 8 - 1024 - 1 = 0$$

$$x^2 - 12x + 136 - 1025 = 0$$

$$x^2 - 12x + 889 = 0$$

$$D = 36 + 889 = 925 = 37 \cdot 25$$

$$x = \frac{6 \pm 5\sqrt{37}}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{6 + 5\sqrt{37}}{2} \\ x = \frac{6 - 5\sqrt{37}}{2} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
6 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Покажем, что  $\frac{6-\sqrt{37}}{2}$ ,  $\frac{6+\sqrt{37}}{2}$  могут быть пятым и шестым членами арифм. прогр.  $(C_n)$ , а  $\frac{6-5\sqrt{37}}{2}$ ,  $\frac{6+5\sqrt{37}}{2}$  третьим и восьмым членами прогр.  $(C_n)$ .

$$\text{пусть } C_1 = \frac{6-9\sqrt{37}}{2}, \text{ и } d = \sqrt{37}.$$

Получим:

$$C_3 = \frac{6-9\sqrt{37}}{2} + 2 \cdot \sqrt{37} = \frac{6-5\sqrt{37}}{2}$$

$$C_5 = \frac{6-9\sqrt{37}}{2} + 4 \cdot \sqrt{37} = \frac{6-\sqrt{37}}{2}$$

$$C_6 = \frac{6-9\sqrt{37}}{2} + 5 \cdot \sqrt{37} = \frac{6+\sqrt{37}}{2}$$

$$C_8 = \frac{6-9\sqrt{37}}{2} + 7 \cdot \sqrt{37} = \frac{6+5\sqrt{37}}{2}$$

т.е.  $4=4$  подходит

ответ: 4



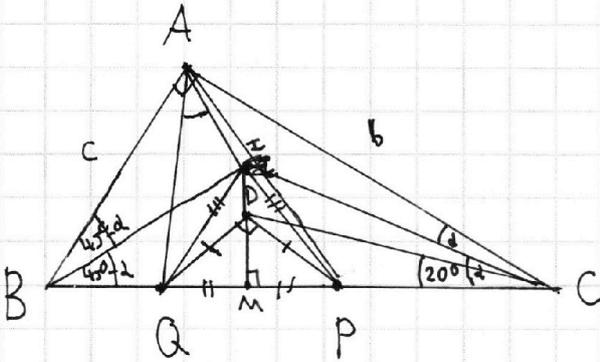
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

7.



1) пусть  $AB = c$ ,  
 $AC = b$ ,  $BC = a$

2) D - лежит на  
сер. перп. ~~на~~  
сегментом  
перпендикулярно к  
PQ, т.к.  $DQ = DP$   
пусть этот сегмент-  
ный перпендикуляр  
будет DM, где M тогда  
середина PQ.

$$3) BC = BP + CQ \neq a - CQ =$$

$$= AB + AC - CQ$$

т.е.

$$CQ = BC - AB + AC = a - c + b = \frac{c+b-a}{2}$$

тогда:

$$QM = PM = \frac{PQ}{2} = \frac{c+b-a}{2}$$

$$4) BM = BP - MP = AB - \frac{c+b-a}{2} = c - \frac{c+b-a}{2} =$$

$$= \frac{2c - c - b + a}{2} = \frac{a+c-b}{2} = p - b, \text{ где } p - \text{полупериметр}$$

5) т.к.  $BM = p - b$ , то M - точка касания  
вписанной окр-ти, а DM - перпендику-  
ляр к касательной (кас. к стороне BC), тогда  
на прямой DM лежит центр впис. окр-ти



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6) предположим, что  $D$  не ммцентр,  
пусть  $I$  - ммцентр, примем  $I$  лежит  
на  $DM$

7) ~~докажем~~ докажем, что <sup>тогда</sup>  $\angle PIQ = 90^\circ$

8)  $PI = IQ$ , т.к. лежит на сер. пере. к  
 $PQ$ , тогда  $\angle QIM = \angle PIM$ , т.к.  $\triangle PIQ$   
 $\rightarrow \text{р/б}$ , ведь  $PI = IQ$ , а в р/б  $\triangle$  высота  
равна бис-се

9) пусть  $\angle B \overset{CI}{\cancel{AI}} = 2$ , тогда  $\angle A \overset{CI}{\cancel{AI}} = 2$   
т.к.  $CI$  - бис-са

10) т.к.  $AI$  - бис-са, то  $\angle BAI = \angle CAI = \cancel{90}$   
 $= \frac{\angle BAC}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$

11)  $\angle ABC = 90^\circ - 2\alpha$  (по сумме угл -  $\text{об } \triangle ABC$ )

12)  $\angle ABI = \angle CBI = \frac{\angle ABC}{2} = \frac{90^\circ - 2\alpha}{2} = 45^\circ - \alpha$ , т.к.  $BI$   
бис-са

13)  $\triangle CAQ$  - р/б  $\triangle$ , т.к.  $CA = CQ$   
тогда  $\angle CAQ = \angle CQA = \frac{180^\circ - \angle ACQ}{2} = 90^\circ - \alpha$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

14)  $\angle QAI = \angle CAQ - \angle CAI = 90^\circ - \alpha - 45^\circ = 45^\circ - \alpha$

15) тогда  $AIQB$  - вписанный ~~дв.~~

(т.к.  $\angle CBI = 45^\circ - \alpha = \angle QAI$  (сторона вписана под одним углом из двух вершин))

16) тогда  $\angle PQI = \angle BAI = 45^\circ$

17)  $\angle QIM = 45^\circ$  по сумме углов в  $\triangle QIM$ , тогда  $\angle PIM = \angle PIM + \angle QIM = \angle QIM + \angle QIM = 90^\circ$

18) заметим, что если  $D \neq I$  не совпадают, то сумма углов в  $\triangle QIPM$   $\triangle QDP$  будут не равны, т.к.  $\angle QDP = 90^\circ = \angle PIQ$ , т.е.  $D \equiv I$

19) тогда по усл.  $20^\circ = \angle PDP$  и  $\angle PDP = \alpha$ , т.к.  $D \equiv I$ , т.е.  $\alpha = 20^\circ$

20) тогда:

$\angle DBC = 45^\circ - \alpha = 45^\circ - 20^\circ = 25^\circ$ , т.к.

$D \equiv I$ ,  $\angle CBI = 45^\circ - \alpha$

ответ:  $25^\circ$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2. n = \underbrace{9 \dots 9}_{40000 \text{ цифра}} = 10^{40001} - 1$$

$$\text{тогда } n^3 = (10^{40001} - 1)^3 = \cancel{10^{120003}} - \cancel{3 \cdot 10^{80002}} + 3 \cdot 10^{40001} - 1 =$$

$$= 10^{120003} - 3 \cdot 10^{80002} + 3 \cdot 10^{40001} - 1 =$$

$$= 10^{120003} + 3 \cdot 10^{40001} - 3 \cdot 10^{80002} - 1 =$$

$$= \underbrace{1000 \dots 0}_{80002 \text{ цифра}} \underbrace{300 \dots 00}_{40002 \text{ цифра}}$$

$$10^2 - 1 = 99$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

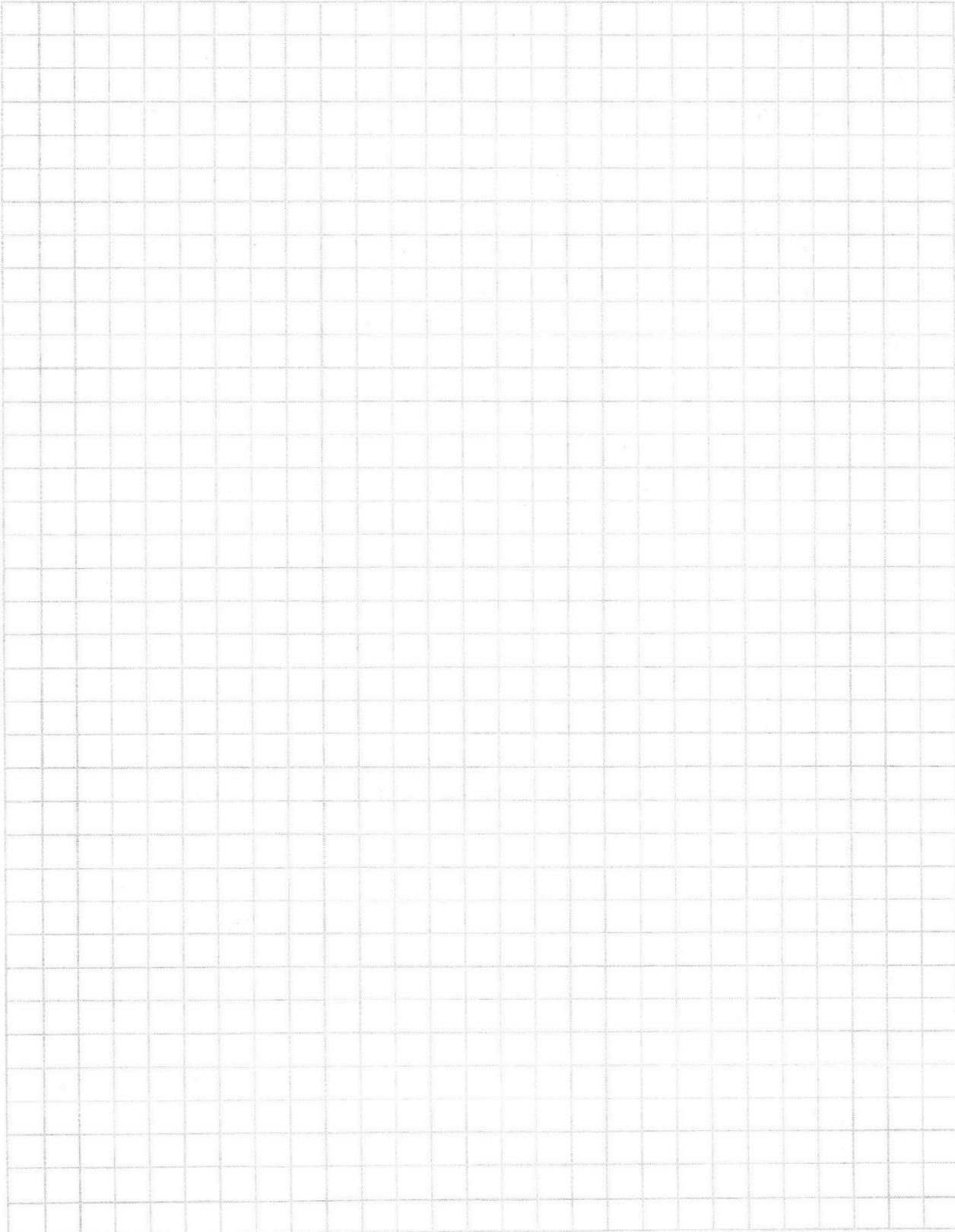
5

6

7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1     2     3     4     5     6     7

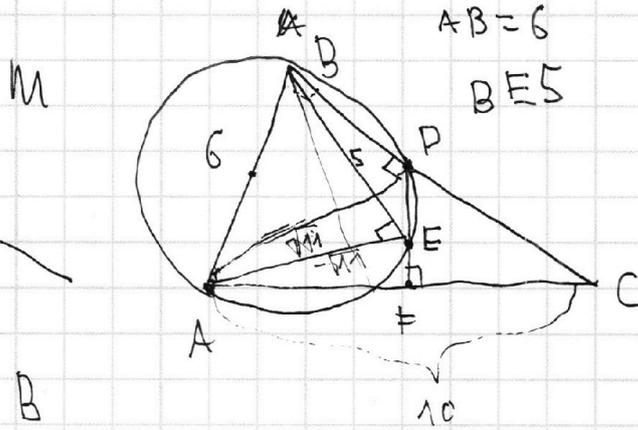
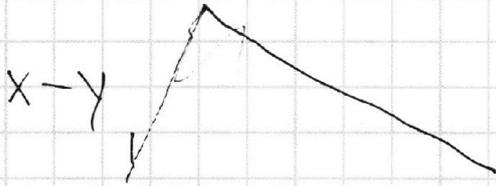
СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

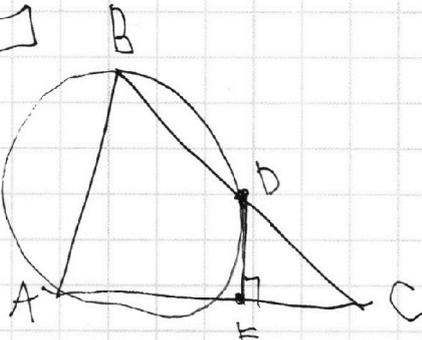
$$\begin{array}{r}
 10000 \dots 01000 \\
 - \quad 10000 \\
 \hline
 11100001111 \\
 \hline
 099990000099
 \end{array}$$

$$\sqrt{36-25} = \sqrt{11} \\
 AC = 10$$

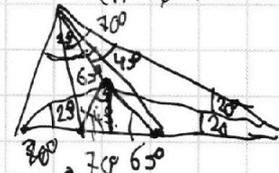
$$\frac{3x^2 + x^2}{x} = \frac{5x + y^2}{x}$$



$$\frac{C_{n-3}^2}{C_n^{85}} = \dots$$



$$\frac{C_{n-3}^3}{C_n^6} = \frac{(n-6)! \cdot 6!}{(n-3)! \cdot 3!}$$



$$= \frac{(n-5)! \cdot 5!}{(n-5)! \cdot 2!} = \dots$$

$$\frac{120}{60} = 2$$

$$\frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = \dots$$

$$\frac{(n-3)!}{(n-5)! \cdot 2!} = \frac{60(n-3)!}{n!}$$

$$\frac{n!}{(n-5)! \cdot 5!} = \dots$$

$$\frac{(n-3)!}{(n-6)! \cdot 3!} = \frac{(n-6)! \cdot 6! \cdot (n-2)! \cdot 2!}{(n-5)! \cdot 5! \cdot (n-3)! \cdot 3!} = \frac{(n-6) \cdot 6^4}{(n-3) \cdot 3} = \dots$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 = X(X+3) \\ 2x = 3y + y^2 \end{cases}$$

$$z^2 + 3z - xy = 0$$

$$X+3 = \frac{yz}{x} \quad z = -3 \pm \sqrt{9 + 4xy}$$

$$z+3 = \frac{xy}{2} \quad xy + yz + 2x + (x+y+z) + 27$$

$$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9 = x^2 + 3x + \frac{yz + 3yz}{x} \quad -2yz = yzx$$

$$x = -2$$

$$z+3 = \frac{xy}{2} \quad xy + 3x + 9 \quad xy + yz + 2x + 3(x+3)$$

$$yz \quad 3(x+3) \quad 3(y+3)$$

$$x+3 = \frac{yz}{x} = yz + \frac{3yz}{x} \quad yz = yzx + 3yz$$

$$\left(\frac{yz}{x}\right)^2 = yz + \frac{3yz}{x} \quad \left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{zx}{y}\right)^2 \Rightarrow$$

$$(z+3)(x+3)(y+3) = xyz$$

$$xyz + \frac{3xy+27}{x^2} + \frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{z^2x^2}{y^2}$$

$$\frac{y^4z^4}{x^2z^2y^2}$$

$$\frac{z^3}{y^3}$$

$$100 \dots 1000$$

$$\begin{array}{r} 100000 \\ - 100000 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 100000000 \\ - 10000000 \\ \hline \end{array}$$

$$2x - \frac{15}{2}$$

$$\begin{aligned} (d^2 - 2db + 4b^2)(a-b) &= 9 \\ &= d^3 - 6d^2 + 3db^2 - 2db^2 + 4b^3 - 4b^3 \\ &= d^3 - 3db^2 + 3db^2 - 4b^3 \\ &= d^3 - 4b^3 \end{aligned}$$

$$(a-b)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$0 = x^2 + y^2 + z^2 + 3x + 3z + 3y = (x+y+z)^2 - 2xy - 2yz - 2zx =$$

$$= (x+y+z)^2 + 3(x+y+z) = (x+y+z)(x+y+z+3)$$

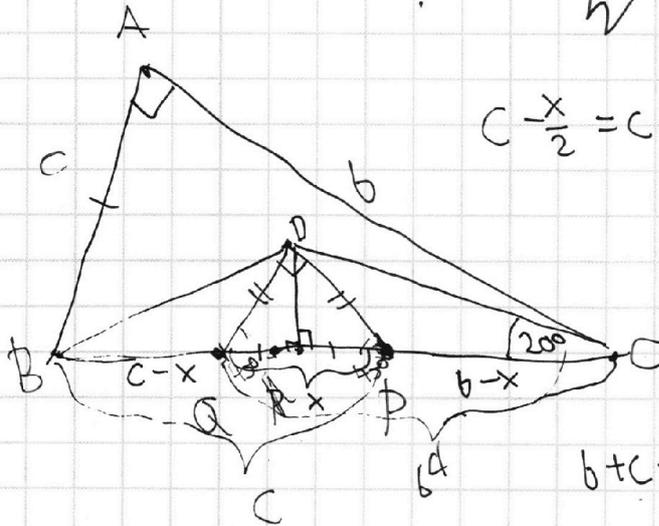
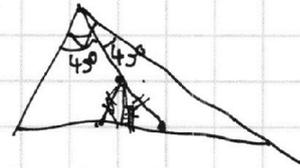
$-\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$

$27$   
 $18$

$-2 \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 2$

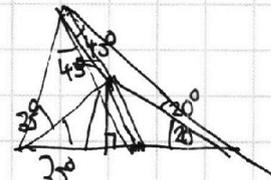
$$x+y+z=0$$

$$x+y+z=-3$$



$$c - \frac{x}{2} = c - \frac{b+c-d}{2} =$$

$$= \frac{c+d-b}{2} = \frac{4+b+c-2b}{2} =$$

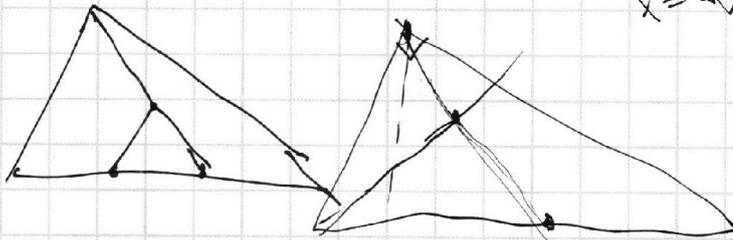


$$b+c-2x=d$$

$$x = \frac{b+c-d}{2}$$



$$|c_0 - c_5| = |d|$$



$$\frac{37 \cdot 15}{185}$$

$$\frac{37}{555}$$

92

$$\begin{array}{r} 1025 \\ - 136 \\ \hline 889 \end{array}$$

$$\frac{37 \cdot 25}{185}$$

$$\frac{74}{925}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_\_ ИЗ \_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases}$$

$k=0 \quad x^2 = (x+3)^2 + 3(x+3) \quad \frac{1}{2} \sqrt{15}k = \frac{1}{2}$   
 $y = 3+x \quad k^2 = \frac{3k+k^2}{2} + 3 = \frac{yz}{x} \quad 9k+18=0 \quad 4 \cdot (0.8-0.3) \quad 5 \cdot 5 \quad x=-2$   
 $(x+3)^2 = 3 \cdot (x+3) + (x+3)^2 \quad 4.5 \quad 4.8 \quad 0.6$   
 $(d-4)(d-1) = 0 \quad -7.5 \quad -1 \quad 1 \quad 7.5$   
 $x^2 - 5x = 0 \quad 7.5 \quad (x+3)=0$   
 $4x^2 - 4 = 0 \quad -7.5 \quad x=-3$   
 $z = \frac{2x-y}{y} = y=1 \quad -1 \quad 2x+2y+xy=0$   
 $x=-2$   
 $x^2 - (d^2-d)x + d-5 = 0$   
 $4x^2 - (d^3-d^2)x + 2d^4 + 2d^2 - d^6 - 4 = 0$   
 $(2 \cdot 1) + (2 \cdot 2) + (2 \cdot 1) \cdot 1 \quad d^2 - d = \frac{d^3 - d^2}{2}$   
 $\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^2 = \frac{25+10\sqrt{21}+21}{4} = \frac{46+10\sqrt{21}}{4} = \frac{23+5\sqrt{21}}{2}$   
 $d^2(2d^2+2-d^4) =$   
 $= d^2 \left( -(d^2-1)^2 + 3 \right) \quad 4^2 - 5d + 1 = 0$   
 $z^2 + x^2 + y^2 + 3x + 3z + 3y = 0$   
 $\left(\frac{41-\sqrt{21}}{2}\right) \cdot x +$   
 $3x + 3z + 3y + 27$