



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = -6y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 20 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 10$, $BE = 9$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть девять коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$ являются пятым и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| + \left|y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| \leq 8$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle CBA = 46^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = \underbrace{999 \dots 999}_{20001} = (10^{20001} - 1)^3 = 10^{20001 \cdot 3} - 3 \cdot 10^{20001 \cdot 2} + 3 \cdot 10^{20001} - 1$$

$$\begin{array}{r} \textcircled{1} \quad \underbrace{1000000 \dots 0}_{20001} \\ - \underbrace{3000000 \dots 0}_{20001 \cdot 2} \\ \hline 999700000 \dots 000 \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{20001} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \textcircled{2} \quad \underbrace{999700000 \dots 000}_{20001} \\ + \underbrace{3000000 \dots 000}_{20001 \cdot 2} \\ \hline 999700030000 \dots 000 \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{20001} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \textcircled{3} \quad \underbrace{999700030000 \dots 000}_{20001} \\ - \underbrace{1000000000000 \dots 000}_{20001 \cdot 1} \\ \hline 999700029999 \dots 999 \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{20001} \end{array}$$

Итого девятков $20001 + 20000 = 40001$

Отв: 40001

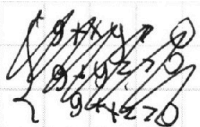


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

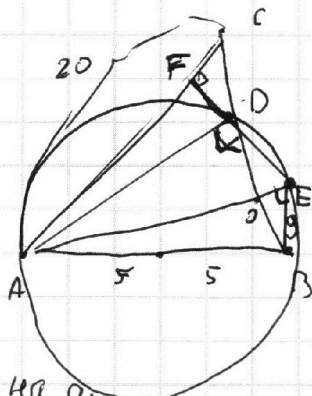
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



N 3



$\angle ADB = 90^\circ$, т.к. опр-ся на диаметр

$AC \cdot AF = AD^2$ из подобия. в прямоуго. Δ .

$\angle AEB = 90^\circ$ аналог.

$AE = \sqrt{100 - 81} = \sqrt{19}$ из т. Пиф. в ΔAEB

$\sin \angle EAB = \frac{9}{10}$

$\angle EAB = \angle EDB = \angle CDF$

близ.
опр
на 1 дугу

$\Delta OEB \sim \Delta ODA$ по 2-м угл.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N4

Пусть ведущий взял n коробок. (коробки с шарами назовём «выигрышными»)

Тогда искомая в-ть — кол-во способов выбрать 5 коробок так, что среди них 3 выигрышные, делённое на кол-во способов выбрать 5 коробок. Выбрать 5 коробок так, чтобы было 3 выигрышных ~~это~~ можно выбрать столько же кол-вом способов, сколько мы выбираем 2 ~~из~~ коробки из $(n-3)$ невыигрышных. Тогда искомая в-ть: $\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}$

~~$\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}$~~

Если участнику предстоит выбрать 9 коробок, в-ть аналогично будет: $\frac{C_{n-3}^6}{C_n^9}$

$$\begin{aligned} \text{Найдём отношение: } \frac{C_{n-3}^6 \cdot C_n^5}{C_n^9 \cdot C_{n-3}^2} &= \frac{(n-3)! \cdot n! \cdot 9! \cdot (n-9)! \cdot (n-5)! \cdot 2!}{6! \cdot (n-9)! \cdot 5! \cdot (n-5)! \cdot n! \cdot (n-3)!} = \\ &= \frac{9! \cdot 2!}{6! \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 7}{5} = \frac{42}{5} \end{aligned}$$

Ответ: в 8,4 раза



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N5

Пусть члены арифм. прогрессии имеют вид $n+4d; n+5d; n+6d; n+7d$.

По т. Виета
$$\begin{cases} a^2 - 4a = n+5d + n+6d \\ a^3 - 4a^2 = n+4d + n+7d \end{cases} \rightarrow a^2 - 5a + 4 = 0$$

При $a \neq 0$ у 1-го ур-я 2 корня, поэтому делим на a .

$$\begin{cases} a^2 - 5a + 4 = 0 \\ (a-4)(a-1) = 0 \end{cases}$$

~~Итак~~ $\begin{cases} a=4 \\ a=1 \end{cases}$

Теперь проверим, подходят ли такие значения.

$a=4$: $\begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ 5x^2 - (88 - 16 \cdot 4)x - 2 \cdot 64 - 6 \cdot 4 - 15 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \\ 5x^2 - 167 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x=2 \\ x=-2 \\ x = \sqrt{\frac{167}{5}} \\ x = -\sqrt{\frac{167}{5}} \end{cases}$

Не подходит

$a=1$: $\begin{cases} x^2 + 3x - 1 = 0 \\ 5x^2 + 3x - 23 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{-3 \pm \sqrt{439}}{10} \end{cases}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{5}a^3 - \frac{4}{5}a^2 - a^2 + 4a = 0$$

$$a^3 - 4a^2 - 5a^2 + 20a = 0$$

$$a(a^2 - 9a + 20) = 0$$

$$a(a-4)(a-5) = 0$$

$$\begin{cases} a=0 \\ a=4 \\ a=5 \end{cases}$$

Проверим, какие значения подходят.

$a=0$: не подходит, т.к. 2-е ур-е не имеет решений

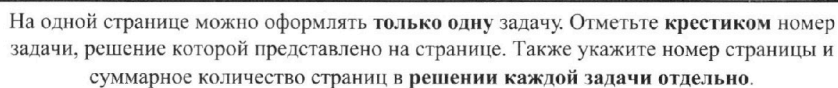
$$a=4: \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ 5x^2 - 167 = 0 \end{cases} \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \\ x=\sqrt{\frac{167}{5}} \\ x=-\sqrt{\frac{167}{5}} \end{cases}$$

$$a=5: \begin{cases} x^2 - 5x + 25 - 30 + 4 = 0 \\ 5x^2 - 25x - 250 - 30 - 15 = 0 \end{cases} \begin{cases} x^2 - 5x + 1 = 0 \\ 5x^2 - 25x - 295 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 1 = 0 \\ x^2 - 5x - 59 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = \frac{5 + \sqrt{29}}{2} \\ x = \frac{5 - \sqrt{29}}{2} \\ x = \frac{5 + 3\sqrt{29}}{2} \\ x = \frac{5 - 3\sqrt{29}}{2} \end{cases}$$

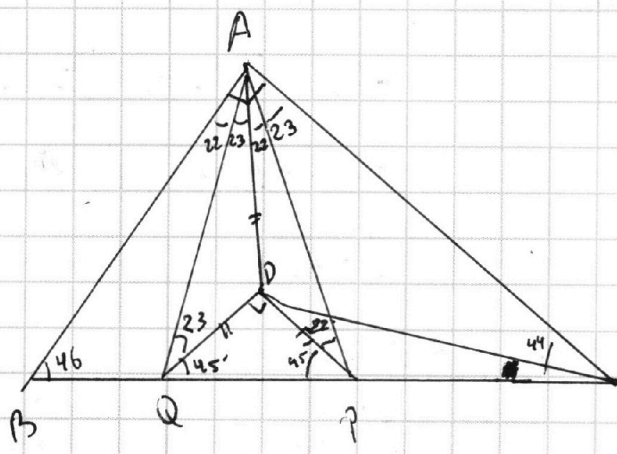
Это действительно корни а.р. с разностью $\sqrt{29}$

Ответ: 5



СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\angle ACB = 44^\circ$ по т.о. сумма $\angle \Delta$

$\angle DPQ = \angle DQP = 45^\circ$ по 6-му п/5 Δ и т. о. сумма $\angle D$

 $\angle BAP = \angle APB = 67^\circ$; $\angle CAQ = \angle AQC = 68^\circ$ аналогично
$$\angle \text{orga} \leftarrow \angle \text{APD} = 22^\circ; \angle \text{AQD} = 23^\circ$$

$\angle QAP = 67^\circ + 68^\circ - 90^\circ = 45^\circ \Rightarrow A$ лежит на окр-ти с центром D и радиусом DQ (т.к. $\angle QAP = \frac{\angle QDP}{2}$) $\Rightarrow DA = DQ = DP$

Потому $\triangle ADC = \triangle QDC$ по 3-м сторонам



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\angle DCQ = \angle DCA = \frac{44^\circ}{2} = 22^\circ$$

Отв. 22° .

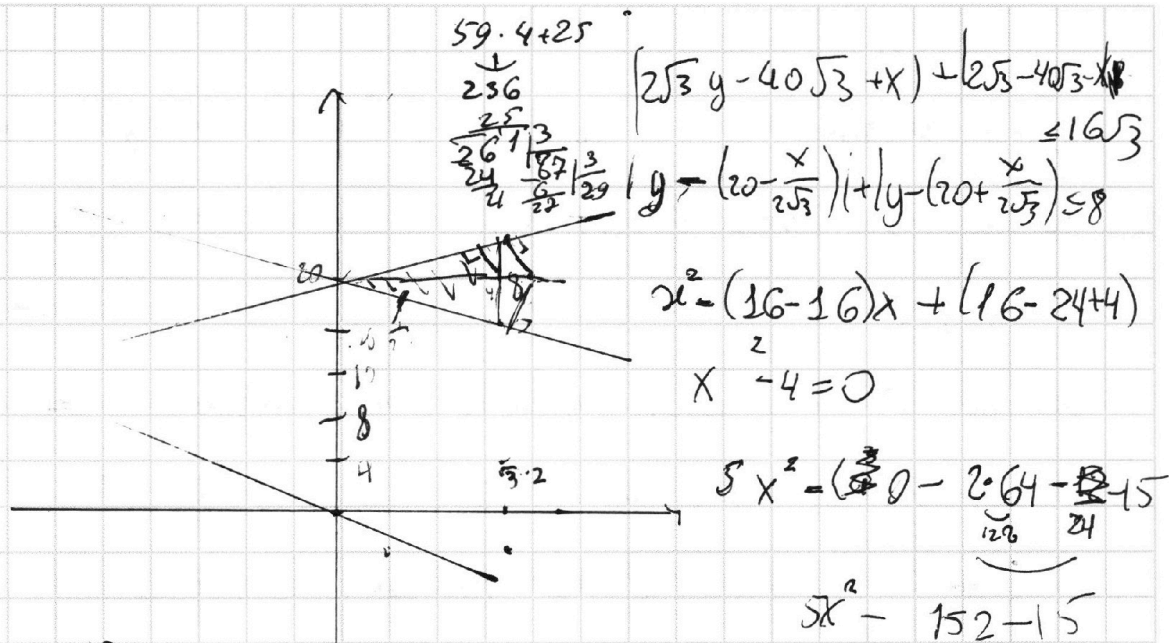
$$16 - 24 + 4$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\left(y - 20 + \frac{x}{25}\right)^2 + \left(y - 20 - \frac{x}{25}\right)^2 + 2 \left| \left| \right| \right| \leq 64$$

$$y^2 + 400 + \frac{x^2}{12} + y^2 + 400 + \frac{x^2}{12} - 64 \leq -2 \left| (y-20)^2 - \frac{x^2}{12} \right|$$

$$2y^2 + \frac{x^2}{6} + (800 - 64) \leq 2 \left| (y-20)^2 - \frac{x^2}{12} \right| \leq 0$$

$$2y^2 + \frac{x^2}{6} + 736 \leq -2 \left| (y-20)^2 - \frac{x^2}{12} \right|$$

$$y^2 + 400 + \frac{x^2}{12} - 40y - \frac{40x}{25} + \frac{2yx}{25} + y^2 + 400 + \frac{x^2}{12} - 40y + \frac{40x}{25} - \frac{2yx}{25} \leq 8$$

$$2y^2 + \frac{x^2}{6} + 800 \leq 64 - 2 \left| (y-20)^2 - \frac{x^2}{12} \right|$$

$$2y^2 + \frac{x^2}{6} + 736 \leq -2 \left| \dots \right|$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 12y - 12z + 36 \cdot 3$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy - z) - 2(yz - x^2) - 2(zx - y^2) = 0$$

$$3(x^2 + y^2 + z^2) - 2xy - 2yz - 2zx + 36 \cdot 3 = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$$

$$D = (a^2 - 4a)^2 - 4(a^2 - 6a + 4) = a^4 - 8a^3 + 16a^2 - 4a^2 + 24a - 16 = a^4 - 8a^3 + 12a^2 + 24a - 16$$

$$x^2 - (a^2 - 4a)$$

$$n^2 - (a^2 - 4a)n + a^2 - 6a + 4 = 0$$

$$(n+d)^2 - (a^2 - 4a)(n+d) + a^2 - 6a + 4 = 0$$

$$2nd + d^2 - a^2d + 4ad = 0$$

$$5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$$

$$5(n-d)^2 - (a^3 - 4a^2)(n-d) - 2a^3 - 6a - 15 = 0$$

$$5(n+2d)^2 - (a^3 - 4a^2)(n+2d) - 2a^3 - 6a - 15 = 0$$

$$20nd + 10d^2 - 10nd - 5d^2 - 2da^3 + 8ad^2 = 0$$

$$a^3d + 4a^2d = 10nd - 5d^2 - 3da^3 + 12ad^2$$

$$\begin{cases} 2n + d - a^2 + 4a = 0 \\ 10n - 15d - a^3 + 12a^2 = 0 \end{cases}$$

$$2n = a^2 - 4a - d$$

$$5a^2 - 20a - 5d - 15d - a^3 + 12a^2 = 0$$

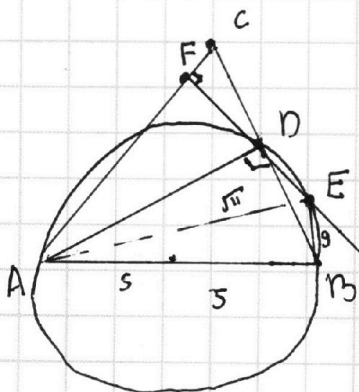
$$5a^2 - 20a - a^3 - 20d + 12a^2 = 0$$

$$a^3 - 4a^2 - a^2 + 4a = n + 4d + n + 7d - n - 5d - n - 6d = 0$$

$$a^3 - 4a^2 - a^2 + 4a = 5a^2 + 4a$$

$$a^2 - 5a + 4$$

$$a = 4$$



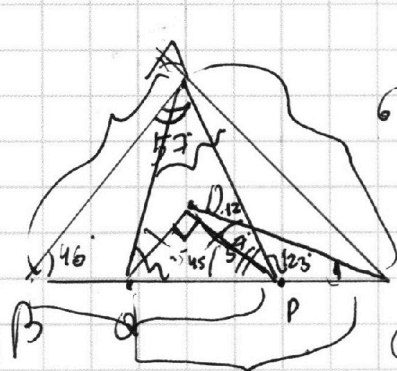


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

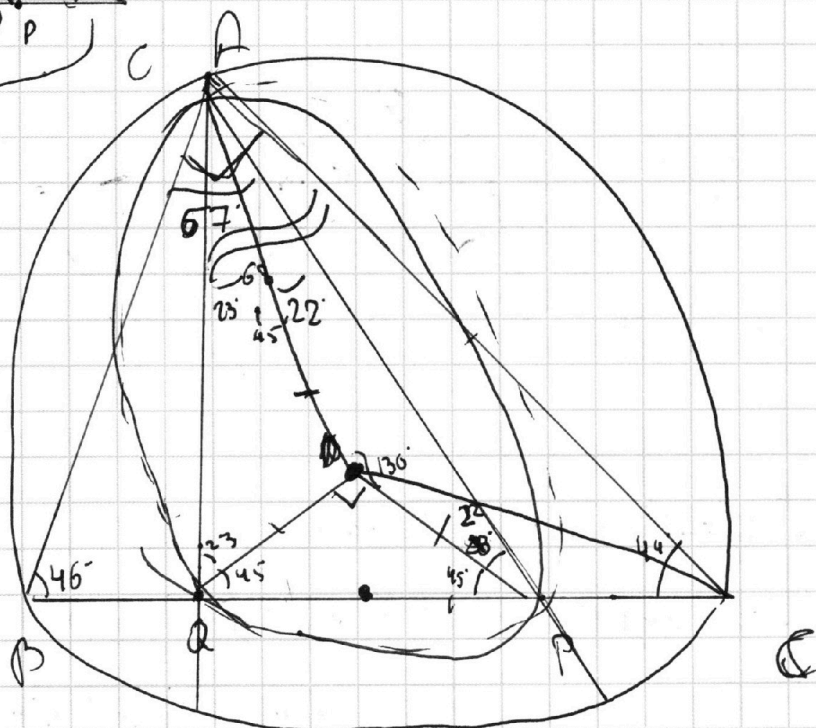
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$135$$
$$67 + 68 - 90^\circ +$$

$$(a - (5 - 5)) (a + 5\sqrt{3})$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a^2 - 4a = 1 \quad 16 + 4$$

$$a^2 - 4a - 1 = 0$$

$$a - b - 6$$

$$6(a - 1) = 0$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$a^2 - 4a - 1$$

$$a^2c + b^3 + c^3 + 2abc + 2b^2c + 2ac^2 = 0$$

$$\begin{aligned} & a^3 + b^3 + c^3 + 3ab^2 + 3a^2b + 3ac^2 + 3a^2c \\ & + 3c^2b + 3b^2c + 6abc \end{aligned}$$

$$9 \dots 9$$

$$20001 \dots$$

$$(9 \cdot 10^{20000} + 9 \cdot 10^{19999} + \dots + 9)$$

$$9^3 \cdot 10^{20000 \cdot 3} + 9 \cdot 10^{19999 \cdot 3} + \dots + 9$$

$$9^3 \cdot 10^{20000 \cdot 3} + 9^3 \cdot 10^{19999 \cdot 3} + \dots + 9^3$$

$$+ 3 \cdot 9^3 \cdot 10^{20000 \cdot 2 + 19999 \cdot 2} + 3 \cdot 9^3 \cdot 10^{20000 + 19999} + \dots + 3 \cdot 9^3 \cdot 10^{1+0} + 6 \cdot 9^3 \cdot 10^{20000 + 19999 + \dots + 1}$$

$$\begin{array}{r} 888 \\ 9999 \\ 9999 \\ \hline 899991 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 899991 \\ + 899991 \\ \hline 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 899991 \\ \times 20001 \\ \hline 8999991 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11111 \\ 6999999 \\ + 17999982 \\ \hline 269999819991 \end{array}$$

$$9^3 (10^{20000})$$

$$6ab$$

$$(a^2 - 2ab + b^2)(a - b)$$

$$a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3$$

$$400$$

$$(10^{20001} - 1)^3 = 10^{20001 \cdot 3} - 3 \cdot 10^{20001 \cdot 2} + 3 \cdot 10^{20001} - 1$$

$$9 + 2023$$

$$450$$

$$\begin{array}{r} 10000001 \\ 10000 \\ 3000 \\ \hline 400021 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10097000 \\ 40000002 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10097600 \\ 40000002 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ 128 \\ 24 \\ \hline 152 \\ 15 \\ \hline 167 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2 \\ yz = -6x + x^2 \\ zx = -6y + y^2 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y - 6z - xy - yz - zx = 0$$

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 - 36 + 36 + 36 - 36 - 36 - 36 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 36$$

$$16 = 4 + 16$$

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 36$$

$$4 = 12 + 4$$

$$36 - 4(y^2 + z^2 - 6y - 6z - yz) > 0$$

$$(x+y+z)^2 + (x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 3 \cdot 36$$

$$36 + y^2 + z^2 - 12y - 2yz - 12z - 4y^2 - 4z^2 + 24y + 24z + 4yz$$

$$36 - 3y^2 - 3z^2 + 12y + 12z + 2yz > 0$$

$$36 - 3x^2 - 3y^2 + 12x + 12y + 2xy > 0$$

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 + (x-3)^2 - 12(x+y+z) = 0$$

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 + x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx = 0$$

$$- (x+y+z)^2 + 4xy + 4yz + 4zx$$