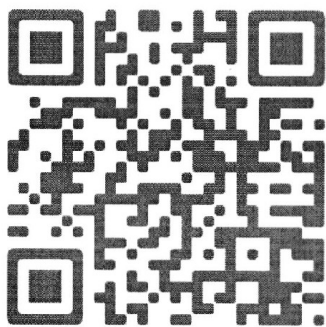




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2, \\ yz = -2x + x^2, \\ zx = -2y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 30 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?

3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 8$, $BE = 6$.

4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть семь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$ являются четвертым и девятым членами этой прогрессии.

6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| + \left|x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| \leq 4$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.

7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle BCA = 50^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(1) \quad xy = x \cdot (x-2)$$

$$x \neq 0 \rightarrow y = x-2$$

$$x^2 = (x-2)^2 - 2x + 4$$

$$0 = -4x + 4 - 2x + 4$$

$$6x = 8$$

$$x = \frac{4}{3} = z$$

$$y = \frac{4}{3} - 2 = -\frac{2}{3}$$

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{8}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 =$$
$$= \frac{4 + 64 + 4}{9} = \frac{72}{9}$$

где слагаев $x = y = z$.

$$\rightarrow \text{вети: } 8; \frac{72}{9}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = z - (z-2)(1) \\ yz = x - (x-2)(2) \\ xz = y - (y-2)(3) \end{cases}$$

$$(1)(2) \quad y \cdot (x-z) = 2 \cdot (x-z) + (z-x)(z+x)$$

$$(y+z+x^2)(x-z) = 0$$

$$1) \quad y+z+x-2=0$$

$$2) \quad x=z$$

$$x+y+z=2$$

симметричные по условиям.

$$(1) \cdot (2) \quad xz \cdot y^2 = xz \cdot (x-2)(z-2)$$

$$y^2 = (-y-z)(-x-y)$$

$$y^2 = (x+y)(y+z)$$

$$\text{аналог } x^2 = (x+y)(x+z)$$

$$(y-x)(y+x) = (x+y)(y-z)$$

$$\begin{aligned} x^2 &= x^2 + yz + yx + xz \\ yz + yx + xz &= 0 \end{aligned}$$

$$(1) + (2) + (3)$$

$$xy + yx + xz = (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 - 2 \cdot (z+x+y)$$

$$\begin{aligned} (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 &= x^2 + y^2 + z^2 - 4(x+y+z) + 3 \cdot 4 = \\ &= 0 - 2 \cdot (x+y+z) + 3 \cdot 4 = 2 \cdot 4 = 8 \end{aligned}$$

$$2) \quad x=z:$$

$$\begin{cases} xy = x^2 - 2x & (1) \\ xz = y^2 - 2y & (2) \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

В2 Пусть числоⁿ состоит из m '9'. Тогда $n = 10^m - 1$

$$(10^m - 1)^3 = 10^{3m} - 3 \cdot 10^{2m} + 3 \cdot 10^m - 1 = 10^{3m} - 1 - 3 \cdot 10^{2m} + 3 \cdot 10^m$$

$$10^{3m} - 1 = \underbrace{99 \dots 9}_{3m} \quad \text{Если вычесть } 3 \cdot 10^{2m}, \text{ то}$$

в разряде $2m$ появится 6 вместо 9, теперь прибавим

3 к разряду m , $9 + 3 = 12$, 2 будет в m , а '9' будет прибавлять и занимать следующие разряды, пока наконец не прибавится к '6' и не даст ей '7',
итоговое число:

$$\begin{array}{ccccccc} 3m-1 & & 2m & & m & & 0 \\ 9 & 9 & \dots & 7 & 0 & 0 & \dots & 2 & 9 & 9 & \dots \end{array}$$

итого ~~100~~ '9' в числе:

$$3m - (2m - m + 1) = 2m - 1$$

В данной задаче $m = 30001$

$$\text{всего '9'} = 2 \cdot 30001 - 1 = 60001$$

Ответ: 60001.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(24) n - количество коробок

I: N : ~~вы~~ зафиксируем коробки так, что ~~1~~, 2, 3 - есть шарик, а в остальных (до n) - нет

I: N : количество способов выбрать 5 коробок из n C_n^5

M : количество способов выбрать 3 и любые 2 оставшиеся

$$\omega_1 = \frac{M_1}{N_1} = \frac{1 \cdot C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{(n-3)! \cdot 5! \cdot \cancel{(n-5)!}}{2! \cdot \cancel{(n-5)!} \cdot n!} = \frac{(n-3)! \cdot 5!}{2 \cdot n!}$$

II: N : количество способов выбрать 7 коробок из n C_n^7

M : количество способов выбрать 3 и любые 4 оставшиеся $1 \cdot C_{n-3}^4$

$$\omega_2 = \frac{M_2}{N_2} = \frac{C_{n-3}^4}{C_n^7} = \frac{(n-3)! \cdot \cancel{(n-7)!} \cdot 7!}{4! \cdot \cancel{(n-7)!} \cdot n!} = \frac{(n-3)! \cdot 7!}{n! \cdot 4!}$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{7! \cdot 2}{4! \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 6}{4 \cdot 5} = \frac{7}{2} = 3,5$$

Ответ: в 3,5 раза.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☒6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Сумма члн 9 членов арифм. прогрессии = сумме 6 члн 7 членов прогрессии.

$$a_1 + a_9 = a_6 + a_7$$

из ур-я 1 ч т. выст. $\rightarrow a_6 + a_7 = -\frac{-(a^2 - 2a)}{1} =$

$$= a^2 - 2a$$

из ур-я 2 ч т. выст. $\rightarrow a_4 + a_9 = \left(\frac{-(a^3 - 2a^2)}{3}\right) =$
 $= \frac{a^3 - 2a^2}{3}$

$$a^2 - 2a = \frac{a^3 - 2a^2}{3}$$

$$3a^2 - 6a = a^3 - 2a^2 \quad | : a \neq 0$$

1) $a_0 = 0$

$$3a - 6 = a^2 - 2a$$

$$a^2 - 5a + 6 = 0$$

из т. выст.

$$x_1 + x_2 = 5$$

$$x_1 \cdot x_2 = 6$$

$$\begin{pmatrix} a_1 = 2 \\ a_2 = 3 \end{pmatrix}$$

Теперь проверим найденные a , ведь у ур-ий может не быть решений при данных a . (или корни могут быть равны)

1) $a_0 = 0$:

$$x^2 - 7 = 0$$

есть 2 р-м-я

$$3x^2 + 6 = 0 - \text{нет р-м.} \rightarrow a_0 \text{ не подходит}$$

2) $a_1 = 2$:

$$x^2 - 5 = 0$$

есть 2 р-м-я

$$3x^2 - 26 = 0$$

есть 2 р-м-я

подходит

3) $a_2 = 3$:

$$x^2 - 3x - 1 = 0$$

$D = 9 + 4 > 0$ есть 2 р-м-я

$$3x^2 - (27 - 18)x + 6 - 3^5 = 0$$

$$x^2 - 3x + \frac{2 - 81}{-27} = 0$$

$D > 0$ - есть 2 р-м-я

подходит

Ответ: $a \in \{2; 3\}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) если оба ~~выражения~~ ~~выражения~~ под модулем ≥ 0 или ≤ 0 ,
то это будет $2x - 20 \leq 4 \Leftrightarrow x \leq 12$
 $-2x + 20 \leq 4 \Leftrightarrow x \geq 8$

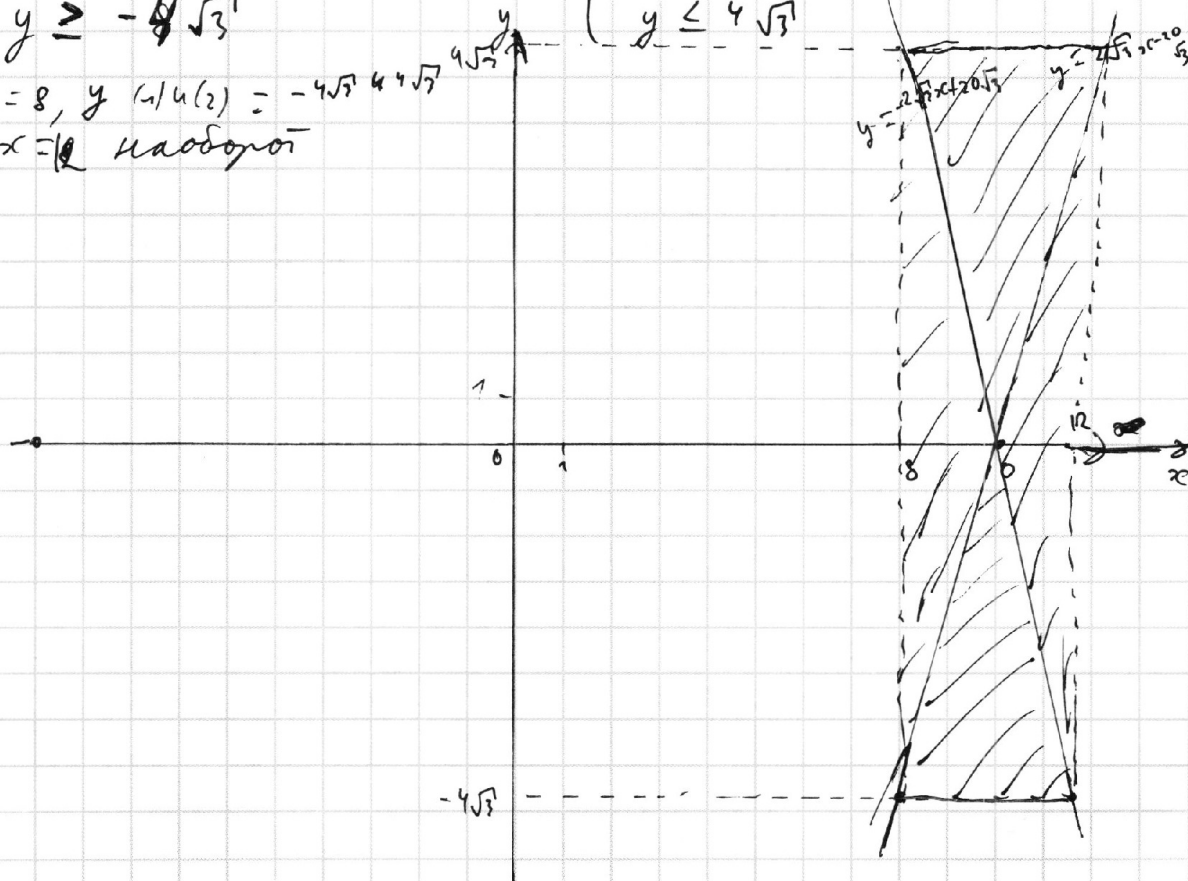
2) если $y > 0$, то ~~снова~~ ~~второе~~ ~~выражение~~ ~~будет~~, поэтому условие $x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} \geq 0$

$$\begin{cases} x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} \geq 0 \\ x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} \leq 0 \\ -\frac{2y}{2\sqrt{3}} \leq 4 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} \geq 0 \\ x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} \leq 0 \\ \frac{2y}{2\sqrt{3}} \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq 2\sqrt{3}x - 20\sqrt{3} & (1) \\ y \leq -2\sqrt{3}x + 20\sqrt{3} & (2) \\ y \geq -4\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq -2\sqrt{3}x + 20\sqrt{3} \\ y \geq 2\sqrt{3}x - 20\sqrt{3} \\ y \leq 4\sqrt{3} \end{cases}$$

или $x = 8, y = -4\sqrt{3}$ и $y = 4\sqrt{3}$
или $x = 12$ наоборот





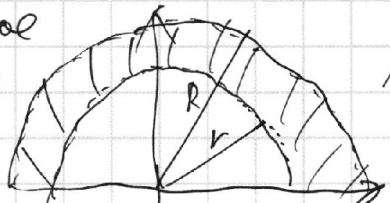
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
 2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Чтобы повернуть плоский прямоугольник вокруг нат. коорд., надо повернуть каждую его точку по дуге окружности радиусом, равным расстоянию от нат. коорд. до точки. Т.е. нарисуйте такой круг с наименьшим радиусом r от точки до нат. коорд., т.



т.е. $\varnothing$, (перпендикуляр координатной)

а R = наибольшее расстояние т.е. до самой дальней точки
 $= \sqrt{12^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{12^2 + 12 \cdot 4} = 4\sqrt{9+3} =$
 $= 4\sqrt{12} = 8\sqrt{3}$.

$$S_{\text{искомая}} = S_R - S_r = \frac{1}{2} \pi R^2 - \frac{1}{2} \pi r^2 = \frac{1}{2} \pi \cdot (192 - 64) =$$

$$= \frac{1}{2} \pi \cdot 128 = 64\pi$$

(площадь большого полу- (площадь мал. полу-
 круга) круга)

Ответ: 64π .

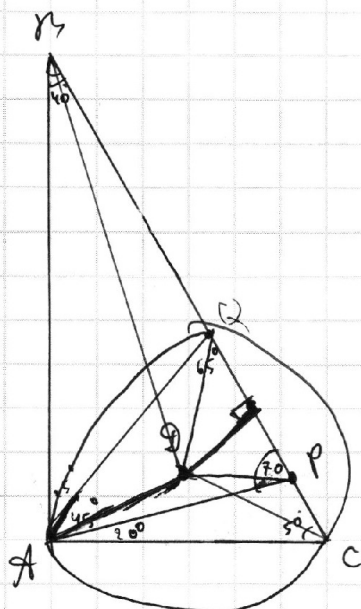


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle MCA = 50^\circ$$

$$\Rightarrow \angle AMC = 40^\circ$$

$$\triangle APB - \text{пр}$$

$$\Rightarrow \angle A = \angle P = 70^\circ$$

$$\triangle AQC - \text{пр}$$

$$\Rightarrow \angle A = \angle Q = 65^\circ$$

D - центр окр. перп.

к QP

$$\angle QDP = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle Q = \angle P = 45^\circ$$

D - центр окр. окр. $\triangle AQP$

$$\text{т.к. } \angle A = \frac{1}{2} \angle D = 45^\circ = 70^\circ - 25^\circ$$

$$DQ = DP = DA$$

$$\angle ADQ = 2 \cdot \angle C = 90^\circ$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

черн.

$$xy = x^2 - 2x$$

$$x^2 = y^2 - 2y$$

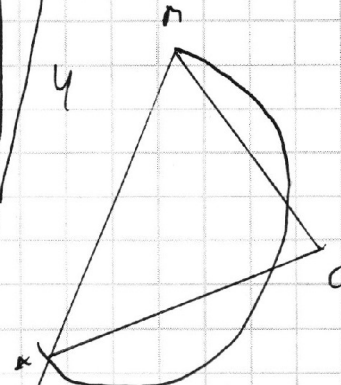
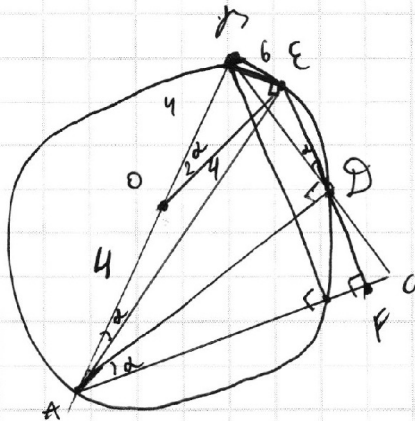
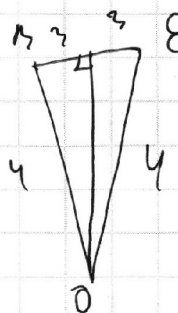
$$xy = y^2 - 2y - 2x$$

$$x \cdot y = x \cdot (x-2)$$

$$y = x-2$$

$$(x-2)^2 = (x-2)(x-2)$$

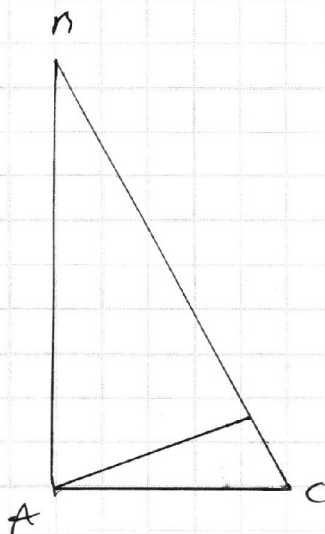
$$x^2 \geq (x-2)^2 - 2x + 4$$



$$\cos \angle EPO = \frac{3}{4}$$

$$AF \cdot AC = AD^2$$

$$AD = AF / \cos 2$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$y > 0:$$

$$y \leq$$

$$y < 0$$

$$y < 0: |x-5| + |x+5|$$

$$x-10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} \leq 0$$

$$2\sqrt{3}x - 20\sqrt{3} = -2\sqrt{3}x + 20\sqrt{3}$$

$$2\sqrt{3}x = 20\sqrt{3}$$

$$x = 10$$

$$y^2 = (y+x)(y+z)$$

$$x^2 = (z+x)(y+x)$$

$$(y-x)(y+x) = (y+x)(z-x)$$

$$y+x = z-x$$

$$4\sqrt{21}$$

$$\sqrt{144+48} = \sqrt{192}$$

$$4\sqrt{12}$$

$$16 \cdot 12 = 160 + 32$$

AE

$$FE \cdot FD = FK \cdot AF$$

$$\frac{FD}{AD} = \frac{CD}{AC}$$

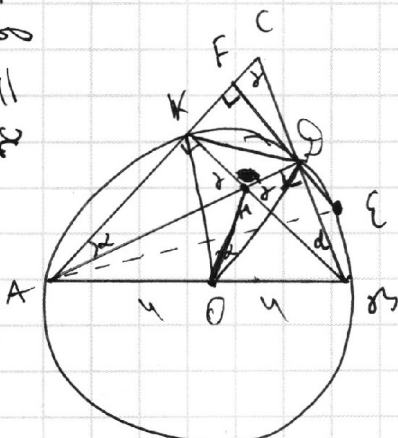
$$\frac{FD}{CD} = \frac{AD}{AC} = \sin \gamma$$

$$AD = AC \cdot \sin \gamma$$

$$\frac{CD}{DM} = \frac{CF}{FK}$$

$$\gamma = 90^\circ -$$

$$\angle KAD$$



$$\frac{KC}{BC} = \frac{CD}{AC}$$

$$y^2 = (x-2)^2$$

$$x^2 = y^2 - 2y$$

$$x^2 - y^2 = -2y$$

$$x^2 - y^2 = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

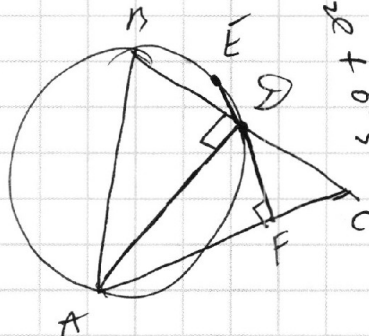
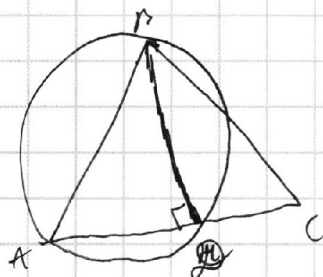
1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

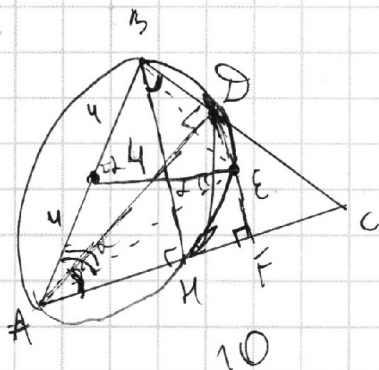
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Чернов.

W3



$$27 - 18 = 9$$
$$3 \cdot 2 - 9 = 2 + 6 - 3 = 5$$



(AE)

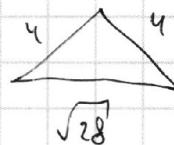
(AE)

$$AF \perp AC = AD^2$$

AD - ?

$$CF \cdot AF = DF^2$$

$$CM \cdot CA = CD \cdot n$$



2*sqrt(7)

1 2 3 4 5 6 7 8 ...

$$AE = \sqrt{8^2 - 6^2} = \sqrt{28}$$



$$1 \cdot (n-3) \cdot (n-4)$$

$$1 \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot (n-5) \cdot (n-6)$$

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = x^2 - 2x + 2^2 - 2z + y^2 - 2y + 12$$
$$+ cy + yz + zx$$

$$y \cdot (x+z) = -2 \cdot (x+z)$$
$$(x+z)(y+2+x+z)$$
$$(x+z)^2 - 2xz$$
$$y^2 - 2y$$
$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 - 12 = x^2 - 2x - y^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$9^3 =$$

$$9 = 10 - 1$$

$$99 = 10^2 - 1$$

$$999 = 10^3 - 1$$

Черт.

$$9^3 = 10^3 - 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 - 1$$

$$\underbrace{99 \dots 9}_n = 10^n - 1$$

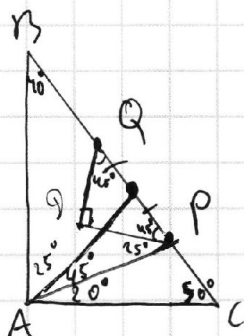
$$\underbrace{10^{3n} - 3 \cdot 10^{2n} + 3 \cdot 10^n - 1}_{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13}$$

$$6 + 1 = 7$$

$$\underbrace{9 \dots 9}_{3n} \dots 00002$$

$$999^3 = \begin{matrix} 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ \downarrow & \dots & \downarrow & & & & & & \\ 6 & & & & & & & & 2 \end{matrix}$$

$$p: [n; 2n] \\ n+1 - \text{черт.}$$



70°

$$xyz = z \cdot (z-2)$$

$$xz = x \cdot (x-2)$$

$$zx = y \cdot (y-2)$$

$$xyz = (x-2)(y-2)(z-2)$$

$$y^2 = (x-2)(z-2)$$

$$(x-2)(z-2) \cdot z^2 = x^2 \cdot (x-2)^2$$

$$2z^2 + 2x^2 + y^2 - 4 \cdot (z+x+y) - 2xy - 2yz - 2zx = 0$$

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 - 2(x+y+z) - 2xy - 2yz - 2zx = 0$$

$$x^2 + y^2 = (x-2)(z-2) + (z-2)(y-2) + (y-2)(x-2)$$

$$x^2 - a \cdot (a-2)x + a^2 - a - 2 = 0$$

$$\underbrace{a_4 + a_9}_{a^3 - 2a^2} = \underbrace{a_6 + a_7}_{a^2 - 2a}$$

$$\frac{a^3 - 2a^2}{a}$$