



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



- ① [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

- ② [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?

- ③ [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.

- ④ [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шару. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?

- ⑤ [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.

6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leq 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура Φ при этом повороте.

- ⑦ [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.

$$\begin{array}{r} 889 \\ + 4 \\ \hline 3556 \\ + 144 \\ \hline 3700 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1024 \\ - 135 \\ \hline 889 \end{array}$$

5-ый
||
6-й 37 6+37

$$-2 = a_0 + 16 \Rightarrow a_0 = -18$$

$$\begin{array}{l} -18 + 16 \\ -18 + 20 \\ -18 + \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 180^\circ - 40^\circ - \\ - 2 - 39999 = \\ = 80^\circ - 39999 - 2 = \\ = 40001 - 2 = \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{1}$ $x, y, z \neq 0$

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 & (1) \\ yz = 3x + x^2 & (2) \\ zx = 3y + y^2 & (3) \end{cases} \quad (x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = ?$$

Обозначим $S = (x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = (x^2 + y^2 + z^2) + 6(x+y+z) + 27$

Вычтем $(1) - (2): y(x-z) = 3(z-x) + (z-x)(z+x)$

т.е. $3(z-x) + (z-x)(z+x) + y(z-x) = 0;$

$(z-x)(3+x+y+z) = 0;$

Тогда, разберем 2 случая: I.сл. $x=z$, подставляем в исходные ур-ия $\begin{cases} xy = 3x + x^2 & (1)^* \\ yx = 3x + x^2 & (2)^* \\ x^2 = 3y + y^2 & (3)^* \end{cases}$

Вычитаем $(2)^* - (3)^*:$
 $x(y-x) = 3(x-y) + (x-y)(x+y),$

т.е. $3(x-y) + (x-y)(x+y) + (x-y)x = 0;$

$(x-y)(3+2x+y) = 0;$ I.1: $x=y \Rightarrow x=y=z$, подст. в

$(1)^*:$ $x^2 = 3x + x^2 \Rightarrow x=0$ - а по условию числа ненулевые $\Rightarrow$ этот сл. Невозможен

I.2 $3+2x+y=0 \Rightarrow y = -3-2x$, подст. в $(1)^*$

$-3x - 2x^2 = 3x + x^2 \Rightarrow 6x + 3x^2 = 0; 3x(x+2) = 0$ - при этом

$x \neq 0$ по усл. $\Rightarrow x = -2, z = x = -2, y = -3 + 4 = 1$

$S = 4 + 4 + 1 + 6(-4 + 1) + 27 = 36 - 18 = 18$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

II сл. $x+y+z=-3 \Rightarrow S = x^2+y^2+z^2+6 \cdot (-3)+27 = 9 + (x^2+y^2+z^2)$

Складываем все 3 иск. ур-ия, данные по условию

$$xy+yz+zx = 3(\underbrace{x+y+z}_{-3}) + x^2+y^2+z^2;$$

$$\text{Тогда } \underbrace{(x+y+z)^2}_9 = x^2+y^2+z^2 + 2(\underbrace{xy+yz+zx}_{x^2+y^2+z^2-9})$$

$$\Rightarrow 9 = 3(x^2+y^2+z^2) - 18 \Rightarrow x^2+y^2+z^2=9, S=9+9=18$$

Ответ: 18.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$n = \underbrace{999 \dots 99}_{40000} = 10^{40000} - 1$$

$$\text{Тогда } n^3 = (10^{40000} - 1)^3 = 10^{120000} - 3 \cdot 10^{80000} + 3 \cdot 10^{40000} - 1$$

$$3 \cdot 10^{80000} = \underbrace{3000 \dots 0}_{80000 \text{ нулей}}$$

$$3 \cdot 10^{40000} = \underbrace{3000 \dots 0}_{40000 \text{ нулей}}$$

$$\begin{array}{r} \text{Тогда } 3 \cdot 10^{80000} - 3 \cdot 10^{40000} \\ \hline \begin{array}{r} 300 \dots 0 \\ - 300 \dots 0 \\ \hline 299 \dots 97000 \dots 0 \end{array} \end{array}$$

$$\Rightarrow 10^{120000} - 3 \cdot 10^{80000} + 3 \cdot 10^{40000} =$$

$$\begin{array}{r} 100 \dots 0 \\ - 100 \dots 0 \\ \hline 299 \dots 97000 \dots 0 \end{array}$$

$$\text{Т.е. } 10^{120000} - 3 \cdot 10^{80000} + 3 \cdot 10^{40000} = \underbrace{199 \dots 97}_{39999} \underbrace{000 \dots 0}_{40000} \underbrace{3000 \dots 0}_{40000}$$

$\Rightarrow$ если ещё вычесть единицу, то получим

$$\underbrace{199 \dots 97}_{39999} \underbrace{000 \dots 0}_{40000} \underbrace{2999 \dots 9}_{40000} \Rightarrow \text{всего } 39999 \cdot 2 = 79998$$

Ответ: 79998.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

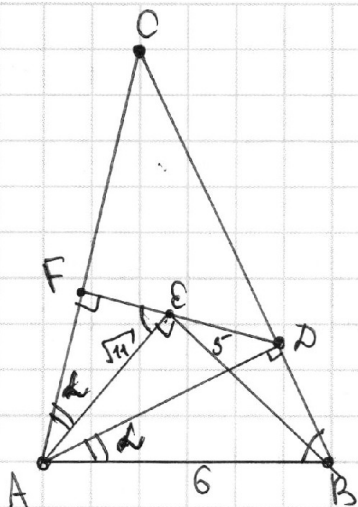
6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3



AF?

Решение: Т.к. $D \in \omega$ и AB - диаметр ω , то $\angle ADB = 90^\circ$ (как опр. на диаметр), и аналогично, т.к. $E \in \omega$, то $\angle AEB = 90^\circ$
2) В $\triangle AEB$ по т. Пифагора

$$AE^2 + BE^2 = AB^2 \Rightarrow AE = \sqrt{11}$$

$\begin{matrix} 25 & 36 \end{matrix}$

2) Обозначим $\angle B = \beta$, т.к. ч.-к. $AEDB$ - впис., то $\angle AEF = \beta = \angle B$,

Тогда посмотрим на 2 прямоуг. $\triangle AFE$ и $\triangle ADB$: $\angle AFE = \angle ADB = 90^\circ$ и $\angle AEF = \angle ABD = \beta \Rightarrow$ они подобны по 2-м углам $\Rightarrow$ из подобия $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AD}$, т.е. $\frac{\sqrt{11}}{6} = \frac{AF}{AD}$, также $\angle EAF = \angle DAB = 2^\circ$;

3) Посмотрим на 2 прямоуг. $\triangle$: $\triangle AEB$ и $\triangle ADC$: $\angle ADC = \angle AEB = 90^\circ$ и $\angle EAB = \angle CAD = 2 + \angle EAD \Rightarrow$ они подобны по 2-м углам $\Rightarrow$ из подобия $\frac{AB}{AC} = \frac{EB}{CD} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{6}{10} \Rightarrow AD = \frac{10AE}{6} = \frac{5AE}{3} = \frac{5 \cdot \sqrt{11}}{3}$

4) Из п. (2): $6 = AD \Rightarrow AF = AD \cdot \frac{\sqrt{11}}{6} = \frac{5\sqrt{11}}{3} \cdot \frac{\sqrt{11}}{6} =$

$$= \frac{55}{18}$$

Ответ: $\frac{55}{18}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4

Пусть всего в игре n коробок, где из усл. очев., что $n \geq 3$

Посчитаем вероятности выигрыша игрока в игре сиртаки

I сл. мы брать по 5 коробок, p (здесь и далее вероятность выигрыша) = $\frac{\text{кол-во благоприят. исх.}}{\text{кол-во исходов вообще}}$

Общее кол-во исх. = C_n^5 - равно столько способов выбрать 5 коробок из n

Благоприят. исходы $\Leftrightarrow$ он взял 3 нулевых коробки и какие-то 2 коробки из оставшихся $(n-3) \Rightarrow$ благоприятных исходов C_{n-3}^2 - т.к. благоприятные исходы различаются именно

тем, какие 2 коробки из оставшихся взял участник

$$\Rightarrow p = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{\frac{(n-3)!}{2!(n-5)!}}{\frac{n!}{5!(n-5)!}} = \frac{5! \cdot (n-3)!}{2 \cdot n!}$$

II сл. мы брать по 6 коробок $\Rightarrow$ аналогично I сл. - общее

кол-во исходов = C_n^6 , а благоприятных = C_{n-3}^3 - т.к. благоприятные исходы различаются тем, какие 3 коробки взял из оставшихся участник помимо коробок с нулями

$$\Rightarrow p = \frac{C_{n-3}^3}{C_n^6} = \frac{\frac{(n-3)!}{3!(n-6)!}}{\frac{n!}{6!(n-6)!}} = \frac{6! \cdot (n-3)!}{3! \cdot n!}$$

$\Rightarrow$ считаем отношение 2-ух вероятностей:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{6! \cdot (n-3)!}{3! \cdot 4!} \cdot \frac{2 \cdot 4!}{5! \cdot (n-3)!} = \frac{6}{3} = 2$$

Ответ: в 2 раза.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1-ое ур-ие: $X^2 - 12X - 1 = 0 \Rightarrow$ корни

$$\frac{12 \pm \sqrt{148}}{2} = \frac{12 \pm 2 \cdot \sqrt{37}}{2} = 6 \pm \sqrt{37}$$

2-ое ур-ие: $4X^2 - 48X + (2 \cdot 4^4 + 2 \cdot 4^2 - 4^6 - 4) = 0;$

$$X^2 - 12X + (2 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4 - 4^5 - 1) = 0;$$

$$X^2 - 12X + (2^7 + 2^3 - 2^{10} - 1) = 0;$$

$$X^2 - 12X + (128 + 8 - 1024 - 1) = 0;$$

$$X^2 - 12X - 889 = 0; D = 144 + 4 \cdot 889 = 3700 \Rightarrow \text{корни}$$

$$\frac{12 \pm \sqrt{3700}}{2} = \frac{12 \pm 10 \sqrt{37}}{2} = 6 \pm 5 \sqrt{37}$$

$\Rightarrow$ действительно есть пример: пусть $d = 2\sqrt{37}$

$6 - \sqrt{37}$ - 5-ый ч., $6 + \sqrt{37}$ - шест. член, $6 - 5\sqrt{37}$ - нулевой ч., $6 + 5\sqrt{37}$ - ~~восемь~~ восьмой

$a_0 = 6 - 9\sqrt{37} \Rightarrow$ действ. $a_0 + 5d = 6 + \sqrt{37}$ - шест. ч.

$a_0 + 4d = 6 - \sqrt{37}$ - 5-ый ч.

$a_0 + 2d = 6 - 5\sqrt{37}$ - нулевой ч.

$a_0 + 7d = 6 + 5\sqrt{37}$ - 8-ой ч.

Ответ: при $a = 4$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№51

$$x^2 - (a^2 - a)x + (a - 5) = 0; \text{ пусть } x_1, x_2 - \text{корни}$$

$$4x^2 - (a^3 - a^2)x + (2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4) = 0; \text{ пусть } x_3, x_4 - \text{корни}$$

Обозначим a_0 - первый член некоторой неост. арифм. прогрессии, d - её ~~разности~~ разность; пусть без арг. доп.

x_1, x_2 - пятый и шестой члены прогрессии соответственно

x_3, x_4 - третий и восьмой члены этой прогрессии

Это равносильно тому, что $x_1 = a_0 + 4d, x_2 = a_0 + 5d$

$$x_3 = a_0 + 2d, x_4 = a_0 + 7d$$

Тогда заменим, что $x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 2a_0 + 9d$

По т. Вьета: $x^2 - (a^2 - a)x + (a - 5) = 0; x_1, x_2 - \text{корни} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = a^2 - a$$

$4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0; x_3, x_4 - \text{корни} \Rightarrow$

$$x_3 + x_4 = \frac{a^3 - a^2}{4}$$

т.е. имеем $a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{4}$, т.е. ~~4a(a-1) = a^2(a-1)~~

т.е. $a(a-1)(4-a) = 0$; т.е. нужно разобрать только 3 случая

1-й $a = 0 \Rightarrow$ первое ур-ие: $x^2 - 5 = 0$;

второе ур-ие: $4x^2 - 4 = 0$;

$\Rightarrow$ корни 1-ой: $\pm\sqrt{5}$, а вторую: ± 1



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

могут ли эти числа быть членами одной арифм. прогр.? ~~если $d > 0$, то тогда каждый след. член больше пред.~~

заменим, что $d = \text{шест. член} - \text{5-й член}$, а мы знаем, что корни 1-го ур-ия $\pm \sqrt{5} \Rightarrow$

$$\begin{cases} d = \sqrt{5} - (-\sqrt{5}) = 2\sqrt{5} \\ d = -\sqrt{5} - \sqrt{5} = -2\sqrt{5} \end{cases}$$

В обоих сл. $d \in \mathbb{R} \Rightarrow$ если в последовательности вернулось

арифм. число, то оно $\max 1$, т.к. если такое число ≥ 2 (первое

из них имеет вид $a_0 + x d$, а второе $a_0 + y d$, то их разность это $d(y-x)$, где $y \neq x$

$\Rightarrow d \cdot (\text{натуральное} \cdot \text{рац. число}) = \text{целое число}$, а мы

знаем, что раз-ть двух рац. чисел = рац. число - противор.

$\Rightarrow$ если $d = \pm 2\sqrt{5}$, то не может быть такого, что корни 2-го ур-ия (± 1) принадлежат одной арифм. прогр. - противоречие

II сл. $a = 1$: первое ур-ие $x^2 - 4 = 0$; т.е. ± 2 - корни

второе: $4x^2 - 1 = 0$; корни: $\pm \frac{1}{2}$

пусть $d > 0 \Rightarrow$ каждый след. член $>$ пред. член $\Rightarrow$ из чисел ± 2 :

-2 : пятый член, 2 - шестой

среди чисел $\pm \frac{1}{2}$: $-\frac{1}{2}$ - третий член, $\frac{1}{2}$ - 8-ой член. $\Rightarrow$ покажем, что 8-ой член $<$ 6-ой - противор.

$d \leq 0 \Rightarrow$ каждый след. член $<$ пред. член $\Rightarrow$ 2: пятый
 -2 : шестой

$-\frac{1}{2}$: 8-ой

$\frac{1}{2}$: 3-ий

$\Rightarrow$ покажем, что пятый член $>$ 3-ий член - противор. $\Rightarrow$ этот сл. тоже не реализуем т.е. $a \neq 1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

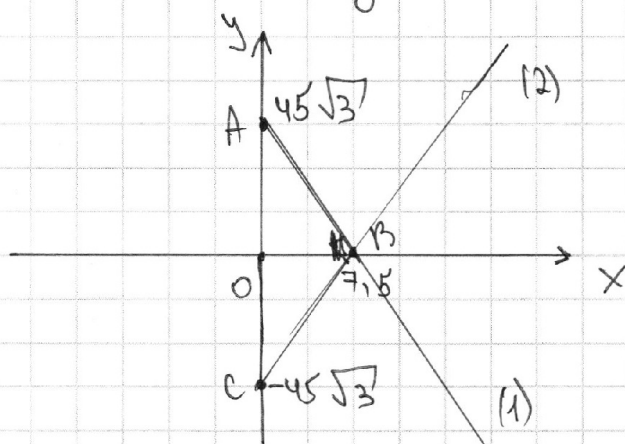
26

$$\left| x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| + \left| x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| \leq 3; \quad S = ? \text{ при повороте на } \pi$$

Решение: для начала поймём, как расположены прямые

$$x = \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \Leftrightarrow y = -6\sqrt{3}x + 45\sqrt{3} \quad (1)$$

$$x = \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \Leftrightarrow y = 6\sqrt{3}x - 45\sqrt{3} \quad (2)$$



Теперь нам нужно понять, как выглядит фигура Φ , для этого нужно понять, как раскрываем модули

$$\begin{cases} x \leq \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \\ x \leq \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow \text{это о.п. это } \triangle ABC, \text{ который ограничивают прямые (1) и (2), оба модуля рас-}$$

крыв. с "-": $-x + \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} - x + \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \leq 3$

$$-2x + 15 \leq 3 \Rightarrow -2x \leq -12, \quad (x \geq 6)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

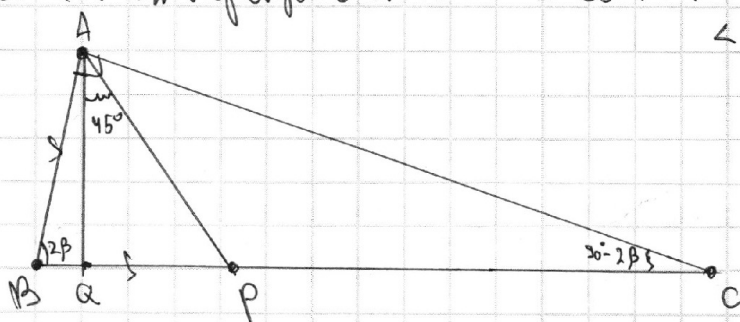
СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

7

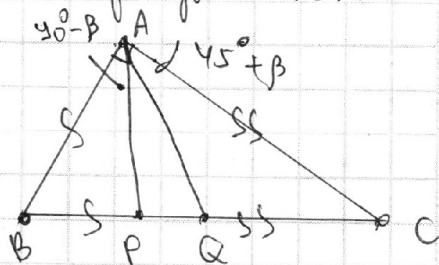
Решение: 1) докажем, что всегда Т. D - центр опис. ок-ти $\triangle APQ$, ~~где D - центр опис. ок-ти~~ пусть без оц. д.у. $AB \leq AC \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ теперь разберём 2 сл.:

I: точки Q и P ~~не~~ перекрываются $\Rightarrow$ если $\angle B = 2\beta$, то $\angle C = 90^\circ - 2\beta$



Т.к. $\triangle ABP$ и $\triangle AQC$ - р.о., то можем найти в них углы при основаниях AP и AQ соответственно: $\angle BPA = \angle BAP = \frac{180^\circ - \angle B}{2} = 90^\circ - \beta$, $\angle AQC = \angle CAQ = \frac{180^\circ - 90^\circ + 2\beta}{2} = 45^\circ + \beta \Rightarrow$ в $\triangle AQP$: $\angle QAP = 45^\circ$ ($180^\circ - 90^\circ + \beta - 45^\circ - \beta = 45^\circ$)

II: Т. P и Q не перекрываются $\Rightarrow$ если $\angle B = 2\beta$, $\angle C = 90^\circ - 2\beta$



в $\triangle BAP$ - р.о.: $\angle BAP = \angle BPA = \frac{180^\circ - 2\beta}{2} = 90^\circ - \beta$

в $\triangle AQC$ - р.о.: $\angle CAQ =$

$= \angle CQA = 45^\circ + \beta \Rightarrow \angle PAQ = 90^\circ - (90^\circ - \beta) - (45^\circ - \beta) = 45^\circ$, т.е.

$\angle QAP = 45^\circ$ - на самом деле этот сл. невозможен, т.к.

по нерав-ву $\triangle$: $BC < BA + AC$, а у нас наоборот $\Rightarrow$ его можно не рассм.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

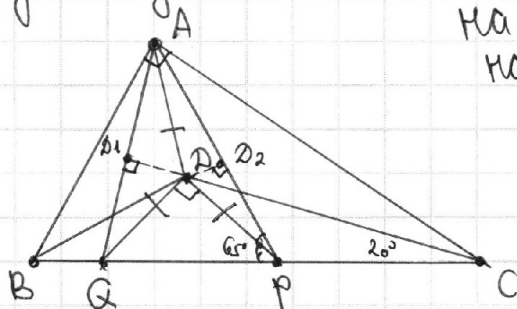
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Итак, только что мы показали, что всегда выполняется условие: $\angle PAQ = 45^\circ$, но т.к. по условию $\angle PDQ = 90^\circ = 2 \cdot \angle PAQ$

и $DP = DQ$, то в $\triangle APQ$: т. D — точка на сред. перпендикуляре к стороне PQ, для которой выполняется: $\angle PDQ = 2 \cdot \angle PAQ$, а такой т. на ср. перек. PQ и насаждающейся ~~внутри~~ с т. A по одну сторону от PQ ^{***} является только центр опис. ок-ти $\triangle APQ \Rightarrow DP = DQ = DA$

! ** а это верно т.к. по усл. D — внутри $\triangle ABC$

~~⇒ слова давайте разберёмся~~
рисую картинку:



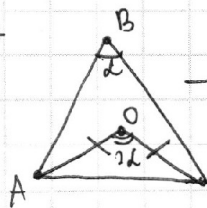
т.к. $AC = CQ$, то S лежит на ср. перек. к AQ и D лежит на ср. перек. к AQ $\Rightarrow DC \perp AQ$, т.е. DC — ср. перек. к AQ $\Rightarrow$ если продлим DC до пересек. с AQ в т. D1, то $\angle CD1Q = 90^\circ$

и совершенно аналогично: BD — ср. перек. к AP $\Rightarrow$ если продлим BD до пересек. с AP в т. D2, то $\angle BD2P = 90^\circ$;

$\angle D1CQ = 20^\circ \Rightarrow$ в прямоугол. $\triangle QD1C$: $\angle CQD1 = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$, а в

$\triangle AQP$: доказали, что $\angle QAP = 45^\circ$, $\angle CQD1 = 70^\circ \Rightarrow$ по тл.о. unique угол $\angle = \angle APQ = 65^\circ \Rightarrow$ в прямоугол. $\triangle BD2P$: $\angle D2BP = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$

Ответ: 25° .



— известная картинка: $\angle AOC = 2 \angle ABC$ как центр. угол в 2 раза $>$ соответств. ему впис., а если двигать O, то $\angle AOC$ будет меняться от 180° до $0^\circ \Rightarrow$ в единств.

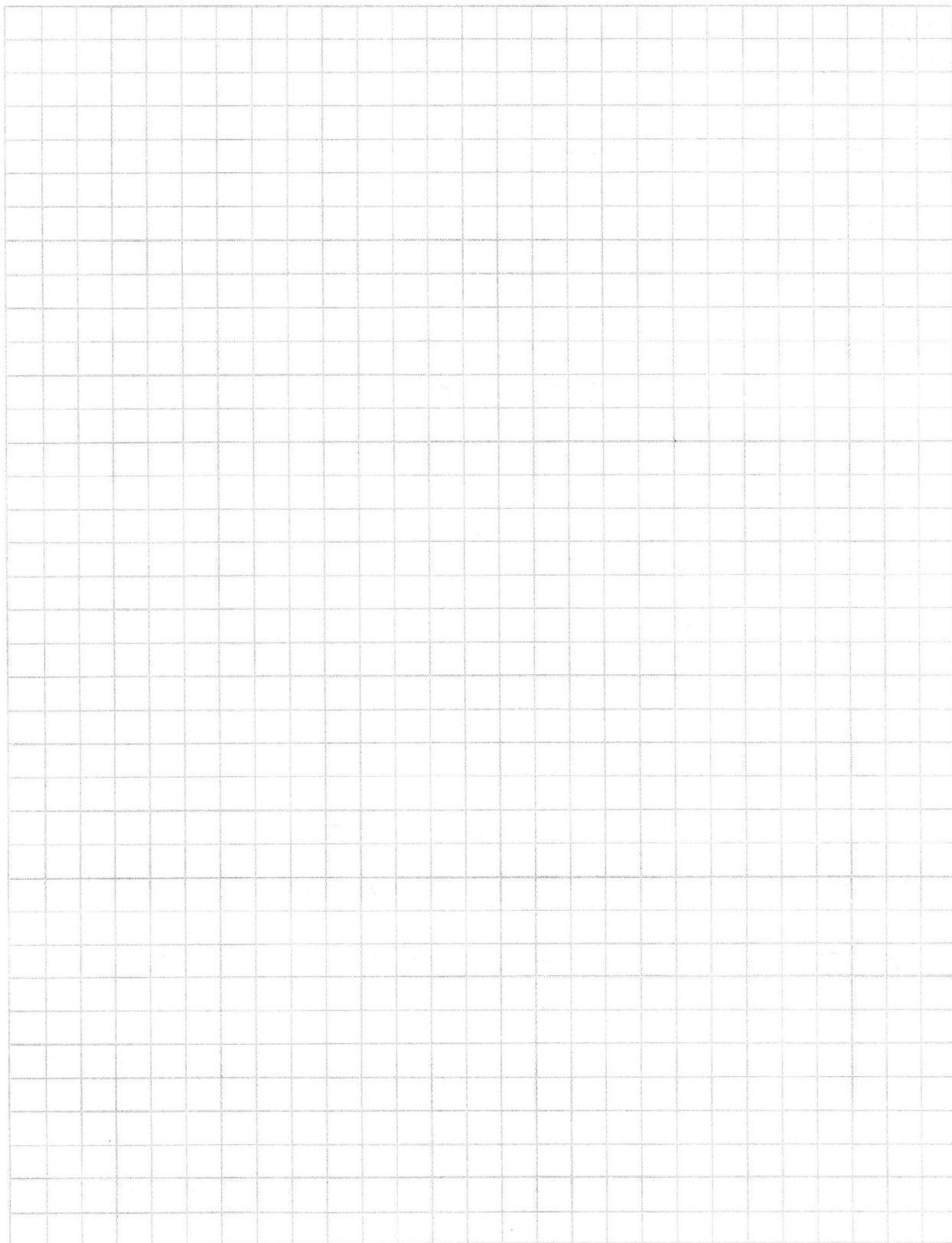


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

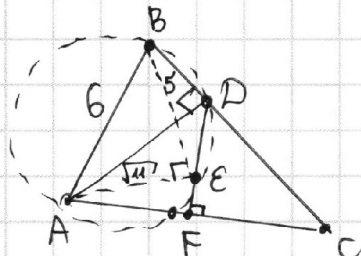
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

X 2 3 4 5 6 7

r=3



④ Корреспондент n ⇒ равные:

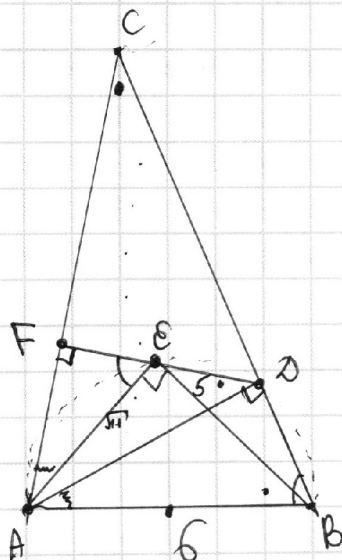
$$\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{\frac{(n-3)(n-2)}{2}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120}} = \frac{\frac{(n-3)!}{2(n-5)!}}{\frac{n!}{5!(n-5)!}} = \frac{5! \cdot (n-3)!}{n!}$$

теперь $\frac{C_{n-3}^3}{C_n^6} = \frac{\frac{(n-3)!}{3!(n-6)!}}{\frac{n!}{6!(n-6)!}} =$

$$a(x-x_1)(x-x_2) = a(x^2 - x(x_1+x_2))$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

③



AF-?

$$\frac{6}{\sqrt{11}} = \frac{AD}{AF} = \frac{DB}{FE}$$

~~AF = 6\sqrt{11}~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases}$$

$$(x+z)^2 + (y+z)^2 + (z+z)^2?$$

$$(x^2 + y^2 + z^2) + 6(x+y+z) + 27 = 9 + x^2 + y^2 + z^2$$

$$y(z-x) = 3(x-z) + (x-z)(x+z) \Rightarrow (x-z)(3+x+z+y) = 0 \Rightarrow x+y+z = -3$$

$$x = -3 - y - z \Rightarrow \begin{cases} -3y - y^2 - 2y = 3z + z^2 \\ -3z - yz - z^2 = 3y + y^2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 1 \ 2 \ 1 \\ 1 \ 1 \\ \hline 1 \ 1 \\ 2 \ 2 \\ 1 \ 1 \\ \hline 1 \ 3 \ 3 \ 1 \end{array}$$

$$xy + yz + zx = 3(-3) + x^2 + y^2 + z^2$$

$$(x+y+z)^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2) - 18 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

②

$$n = \underbrace{999 \dots 9}_{40000} \equiv$$

$$n^3 \equiv 10^{40000} - 1$$

$$\begin{array}{r} 1 \ 3 \ 3 \ 1 \\ 7 \ 2 \ 9 \\ \hline 7 \ 2 \ 9 \\ 2 \ 1 \ 8 \ 7 \\ + 2 \ 1 \ 8 \ 7 \\ \hline 7 \ 2 \ 9 \\ \hline 9 \ 7 \ 0 \ 2 \ 9 \ 9 \end{array}$$

$$9 - 9^3 = 729$$

$$99 \rightarrow 99^3 = 9^3 \cdot 11^3 = 729 \cdot 1331$$

$$n^3 = (10^{40000} - 1)^3$$

$$n = 10^{40000} - 1$$

$$\Rightarrow n^3 = 10^{120000} - 3 \cdot 10^{80000} + 3 \cdot 10^{40000} - 1 =$$

$$\approx 10^{120000} - 3 \cdot 10^{80000} + 3 \cdot 10^{40000} - 1$$



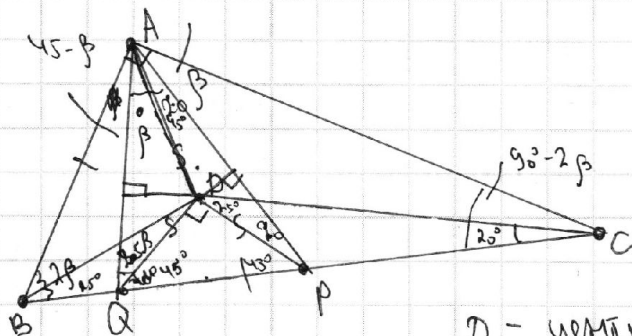
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

⑦



$$\begin{cases} AC = CQ \\ AB = BP \end{cases} \quad \begin{aligned} \angle DCB &= 20^\circ \\ \angle DBC &? \end{aligned}$$

D - центр опис. ок. т.ч. ΔAPQ

②

$$N = 10^{40000} - 1$$

$$\Rightarrow N^3 = 10^{120000} - 3 \cdot 10^{80000} + 3 \cdot 10^{40000} - 1$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ \hline 100 \dots 0 \\ - 3000 \dots 0 \\ \hline 999 \dots 970 \dots 000 \\ \hline \end{array}$$

1 80000

$$\begin{array}{r} 39999 \\ \hline 79998 \end{array}$$