



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

## ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 10 КЛАСС. Вариант 5



- ① [4 балла] Ненулевые числа  $x, y, z$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения  $(x + 3)^2 + (y + 3)^2 + (z + 3)^2$ , если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

- ② [2 балла] Десятичная запись натурального числа  $n$  состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа  $n^3$ ?

③ [5 баллов] Окружность  $\omega$  с диаметром  $AB$  пересекает сторону  $BC$  остроугольного треугольника  $ABC$  в точке  $D$ . Точка  $F$  выбрана на отрезке  $AC$  так, что  $DF \perp AC$ , а  $E$  — точка пересечения отрезка  $DF$  с окружностью  $\omega$ , отличная от  $D$ . Найдите  $AF$ , если  $AC = 10$ ,  $AB = 6$ ,  $BE = 5$ .

④ [4 балла] В теленгрипе ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарику. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игровому разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?

⑤ [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых корни уравнения  $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$  являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения  $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$  являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.

$$\begin{array}{r}
 889 \\
 + 4 \\
 \hline
 3556 \\
 + 144 \\
 \hline
 3700
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 11361 \\
 - 1024 \\
 \hline
 135
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 5-645 \\
 \parallel \\
 6-\sqrt{37} \\
 6+\sqrt{37}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 889 \\
 \text{measured}
 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                                       |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\boxed{\sqrt{1}} \quad x, y, z \neq 0$$

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \quad (1) \\ yz = 3x + x^2 \quad (2) \\ zx = 3y + y^2 \quad (3) \end{cases} \quad (x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 - ?$$

$$\text{Обозначим } S = (x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = (x^2 + y^2 + z^2) + 6(x+y+z) + 27$$

$$\text{Вычитем } (1)-(2): \quad y(x-z) = 3(z-x) + (z-x)(z+x)$$

$$\text{т.е. } 3(z-x) + (z-x)(z+x) + y(z-x) = 0;$$

$$(z-x)(3+x+y+z) = 0;$$

Тогда, разделяем 2 случая: I а).  $x=z$ , подставляем в исходные ур-ия

$$\begin{cases} xy = 3x + x^2 \quad (1)* \\ yx = 3x + x^2 \quad (2)* \\ x^2 = 3y + y^2 \quad (3)* \end{cases}$$

$$\text{Вычитаем } (2)^* - (3)^*:$$

$$x(y-x) = 3(x-y) + (x-y)(x+y),$$

$$\text{т.е. } 3(x-y) + (x-y)(x+y) + (x-y)x = 0;$$

$$(x-y)(3+2x+y) = 0; \quad \underline{\text{I.1}}: \quad x=y \Rightarrow x=y=z, \text{ подст. в}$$

(1)\*:  $x^2 = 3x + x^2 \Rightarrow x=0$  - а по условию числа не могут быть нулем  
 $\Rightarrow$  этот сл. невозможен

$$\underline{\text{I.2}} \quad 3+2x+y=0 \Rightarrow y = -3-2x, \text{ подст. в (1)*}$$

$$-3x - 2x^2 = 3x + x^2 \Rightarrow 6x + 3x^2 = 0; 3x(x+2) = 0 - \text{ при этом}$$

$$x \neq 0 \text{ по усл. } \Rightarrow x = -2, z = x = -2, y = -3 + 4 = 1$$

$$S = 4 + 4 + 1 + 6(-4 + 1) + 27 = 36 - 18 = 18$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

II вр.  $x+y+z = -3 \Rightarrow S = x^2 + y^2 + z^2 + 6(-3) + 27 = 9 + (x^2 + y^2 + z^2)$

Вычлигаем все 3 числ. ур-ия, дакиных по условию

$$xy + yz + zx = 3(x + y + z) + x^2 + y^2 + z^2;$$

Тогда  $\underbrace{(x+y+z)^2}_{9} = x^2 + y^2 + z^2 + 2\underbrace{(xy + yz + zx)}_{x^2 + y^2 + z^2 - 9}$

$$\Rightarrow 9 = 3(x^2 + y^2 + z^2) - 18 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 9, S = 9 + 9 = 18$$

Объем: 18.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2

$$n = \underbrace{999\dots99}_{40000} = 10^{40000} - 1$$

$$\text{Тогда } n^3 = (10^{40000} - 1)^3 = 10^{120000} - 3 \cdot 10^{80000} + 3 \cdot 10^{40000} - 1$$

$$3 \cdot 10^{80000} = \underbrace{3000\dots0}_{80000 \text{ нулей}}$$

$$3 \cdot 10^{40000} = \underbrace{3000\dots0}_{40000 \text{ нулей}}$$

$$\begin{array}{r} 3 \cdot 10^{80000} - 3 \cdot 10^{40000} \\ \cancel{3000\dots0} \quad \cancel{3999\dots9} \\ \hline 300\dots0000\dots0 \\ 300\dots0 \\ \hline 299\dots97000\dots0 \\ 399999 \end{array}$$

$$\Rightarrow 10^{120000} - 3 \cdot 10^{80000} + 3 \cdot 10^{40000} =$$

$$\begin{array}{r} 399999 \quad 399999 \quad 40000 \\ \cancel{100\dots0} \quad \cancel{000\dots0000\dots0} \\ \hline 299\dots97000\dots0 \\ 199\dots99700\dots03000\dots0 \end{array}$$

$$\text{T.C. } 10^{120000} - 3 \cdot 10^{80000} + 3 \cdot 10^{40000} = \underbrace{199\dots97}_{39999} \underbrace{000\dots0}_{39999} \underbrace{300\dots0}_{\text{надо}} \overset{40000}{\text{надо}}$$

⇒ если еще вычислить единичку, то получим

$$199\dots97000\dots0 \quad 2999\dots9 \Rightarrow \text{всего } 19999 \cdot 2 = 79998$$

Ответ: 79998,9.

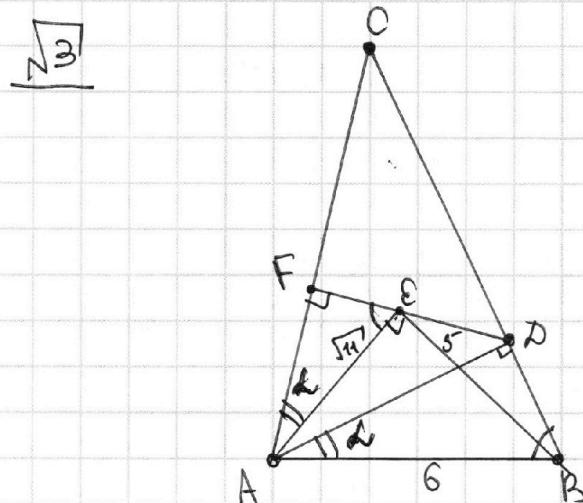


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



AF?

Решение: АТ-к. ДЕWU AB-  
диаметр W, то  $\angle ADB = 90^\circ$   
(как остр. на диаметр), и

Анализично, т.к.  $\vec{E} \in \omega$ , то

2) В ДАЕВ по Th. Писарчука

$$AE^2 + \frac{BE^2}{25} = AB^2 \Rightarrow AE = \sqrt{117}$$

2)  $\odot\text{означим} \angle B = \beta$ , т.к.  $U-K$  АЕДВ-бисс., то  $\angle AEF = \beta = \angle B$ ,

Тогда получим  $\triangle AFE \sim \triangle ADB$ :  $\angle AFE = \angle ADB = 90^\circ$  и  $\angle AEF = \angle ABD = \beta \Rightarrow$  эти углы не  $\sim$  другим углам  $\Rightarrow$  из подобия

$$\frac{AF}{AB} = \frac{AE}{AD} = \frac{AF}{AD}, \text{ т.е. } \frac{\sqrt{11}}{6} = \frac{AF}{AD}, \text{ значит } AF = \frac{\sqrt{11}}{6} \cdot AD.$$

$$\angle EAF = \angle DAB = 2^\circ; \text{ then}$$

3) Постройте на 2 квадрате  $\Delta = \Delta AEB \cup \Delta ADC$ :  $\angle AEC = \angle AEB = 90^\circ$  и  $\angle EAB = \angle CAD = \alpha + \angle EAD \Rightarrow$  они лежат по 2-му признаку  $\Rightarrow$  из №-

$$\text{дано } \frac{AB}{AC} = \frac{EB}{CD} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{6}{10} \Rightarrow AD = \frac{10AE}{6} = \frac{5AE}{3} =$$

$$4) \text{ wZ } n.(2) = \frac{\sqrt{11}}{6} = \frac{AF}{AD} \Rightarrow AF = AD \cdot \frac{\sqrt{11}}{6} = \frac{5\sqrt{11}}{3} \cdot \frac{\sqrt{11}}{6} =$$

$$= \frac{55}{18} \quad \underline{\text{Offset}} = \frac{55}{18}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4

Пусть всего в магазине  $n$  коробок, где из ус. очев., что  $n \geq 3$

Посчитаем вероятности вынимания коробок в следующем порядке:

I а). мог бы взять  $n$  коробок,  $P$  (здесь и далее вероятность вынимания) =  $\frac{\text{количество благоприят. исх.}}{\text{количество исходов}}$

Более к-во исх.  $= C_n^5$  - ровно столько способов выбирать 5 коробок из  $n$

Благоприят. исходы  $\Leftrightarrow$  он взял 3 пустых коробки и какие-то 2 коробки из оставшихся  $(n-3)$   $\Rightarrow$  благоприятных исходов

$C_{n-3}^2$  - т.к. благоприятные исходы различаются именно

тем, какие 2 коробки из оставшихся взял участник

$$\Rightarrow P = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{\frac{(n-3)!}{2!(n-5)!}}{\frac{n!}{5!(n-5)!}} = \frac{5! \cdot (n-3)!}{2 \cdot (n-5)! n!}$$

II а). мог бы взять  $n$  коробок  $\Rightarrow$  аналогично I а. - более

к-во исходов  $= C_n^6$ , а благоприятных:  $C_{n-3}^3$  - т.к. благоприятные исходы различаются тем, какие 3 коробки взял из оставшихся участнику помимо коробок с подсул-

$$\text{кам} \Rightarrow P = \frac{C_{n-3}^3}{C_n^6} = \frac{\frac{(n-3)!}{3!(n-6)!}}{\frac{n!}{(n-6)! 6!}} = \frac{6! \cdot (n-3)!}{3! \cdot n!}$$

$\Rightarrow$  считаем отключение 2-ух вероятностей:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{6! \cdot (n-3)!}{3! \cdot n!} = \frac{2 \cdot 4!}{5! \cdot (n-3)!} = \frac{6}{3} = 2$$

Ответ: 6 2 раза.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

III вл.:  $a=4 \Rightarrow 1\text{-oe ур-ие: } x^2 - 12x - 1 = 0 \Rightarrow$  корни  

$$\frac{12 \pm \sqrt{148}}{2} = \frac{12 \pm 2 \cdot \sqrt{37}}{2} = 6 \pm \sqrt{37}$$

2-ое ур-ие:  $4x^2 - 48x + (2 \cdot 4^4 + 2 \cdot 4^2 - 4^6 - 4) = 0;$   
 $x^2 - 12x + (2 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^5 - 4^{10} - 1) = 0;$   
 $x^2 - 12x + (2^7 + 2^3 - 2^{10} - 1) = 0;$   
 $x^2 - 12x + (128 + 8 - 1024 - 1) = 0;$   
 $x^2 - 12x - 889 = 0; D = 144 + 4 \cdot 889 = 3700 \Rightarrow$  корни

$$\frac{12 \pm \sqrt{3700}}{2} = \frac{12 \pm 10\sqrt{37}}{2} = 6 \pm 5\sqrt{37}$$

$\Rightarrow$  действительно есть пример: пусть  $d = 2\sqrt{37}$

$6 - \sqrt{37}$  - 5-ый вл.,  $6 + \sqrt{37}$  - шестой вл.,  $6 - 5\sqrt{37}$  - четырех вл.,  $6 + 5\sqrt{37}$  - восьмой вл.

$a_0 = 6 - 9\sqrt{37} \Rightarrow$  девятый.  $a_0 + 5d = 6 + \sqrt{37} =$  шестой вл.

$a_0 + 4d = 6 - \sqrt{37} =$  5-ый вл.

$a_0 + 2d = 6 - 5\sqrt{37} =$  четырех вл.

$a_0 + 7d = 6 + 5\sqrt{37} =$  8-ый вл.

Ответ: при  $a = 4$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи** отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N5

$$x^2 - (a^2 - a)x + (a - 5) = 0; \text{ пусть } x_1, x_2 - \text{корни}$$

$$4x^2 - (a^3 - a^2)x + (2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4) = 0; \text{ пусть } x_3, x_4 - \text{корни}$$

Обозначим  $a_0$  - первый член некоторой квадратичной прогрессии,  $d$  - её разность; пусть без ог. буду.

$x_1, x_2$  - 4-ый и 6-ой члены прогрессии соответственно

$x_3, x_4$  - 7-ый и 8-ой члены этой прогрессии

Это равносильно тому, что  $x_1 = a_0 + 4d, x_2 = a_0 + 5d$

$$x_3 = a_0 + 2d, x_4 = a_0 + 7d$$

Тогда заметим, что  $x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 2a_0 + 9d$

По Th. Виета:  $x^2 - (a^2 - a)x + (a - 5) = 0; x_1, x_2 - \text{корни} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = a^2 - a \quad \text{и} \quad$$

$$4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0; x_3, x_4 - \text{корни} \Rightarrow$$

$$x_3 + x_4 = \frac{a^3 - a^2}{4}$$

$$\text{т.е. имеем } a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{4}, \text{ т.е. } 4a(a-1) = a^2(a-1)$$

т.е.  $a(a-1)(4-a)=0$ ; т.е. нужно разобрать члены 3 способом

$$\underline{\text{Из:}} \quad a=0 \Rightarrow \text{первое ур-ие: } x^2 - 5 = 0;$$

$$\text{второе ур-ие: } 4x^2 - 4 = 0;$$

$$\Rightarrow \text{корни 1-ого: } \pm \sqrt{5}, \text{ а второго: } \pm 1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

можут ли эти числа быть членами однократн. ариф. прогр.?

~~если d > 0, то тогда кратный шаг. член больше пред.~~  $\Rightarrow$  ~~проверка~~

Заменим, что  $d = \text{шаг. шаг.} - \text{б-член.}$ , а мы знаем, что корни 1-го ур-ия  $= \pm \sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} d = \sqrt{5} - (-\sqrt{5}) = 2\sqrt{5} \\ d = -\sqrt{5} - \sqrt{5} = -2\sqrt{5} \end{cases}$

В общем сл.  $d \in \mathbb{R} \Rightarrow$  если в последовательности встретилось

натур. число, то это  $\max$  1, т.к. если максимум чисел  $\geq 2$  (первое

из них имеет вид  $a_0 + xd$ , а второе  $a_0 + yd$ ), то их разность это  $d(y-x)$ , где  $y \neq x$

$\Rightarrow d \cdot (\text{некирье все · пну. число}) = \text{пну. число}$ , а мы

знаем, что раз-ть двух натур. чисел = пну. число - противор.

$\Rightarrow$  если  $d = \pm 2\sqrt{5}$ , то не может быть такого, что корни 2-го ур-ия ( $\pm 1$ ) являются членами однократн. ариф. прогр. - противоречие

II сл.  $a = 1$ : первое ур-ие  $x^2 - 4 = 0$ ; т.е.  $\pm 2$  - корни

второе:  $4x^2 - 1 = 0$ ; корни:  $\pm \frac{1}{2}$

поскольку  $d \geq 0 \Rightarrow$  кратный шаг. член  $>$  пред. член  $\Rightarrow$  из чисел  $\pm 2$ :

-2: пятый член, 2-шестой

среди чисел  $\pm \frac{1}{2}$ :  $-\frac{1}{2}$  - третий член,  $\frac{1}{2}$  - 8-ой член.  $\Rightarrow$  но знаем, что 8-ой чл.  $<$  6-ой - противор.

$d < 0 \Rightarrow$  кратный шаг. чл. < пред. член  $\Rightarrow$  2: пятый  
-2: шестой

$-\frac{1}{2} = 8 - a_1 \Rightarrow$  напомним, что пятый член > 3-ий член -

$\frac{1}{2} = 3 - a_1$  - противор.  $\Rightarrow$  2 сл. Т.к. неизвестны  
т.е.  $a \neq 1$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1    2    3    4    5    6    7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

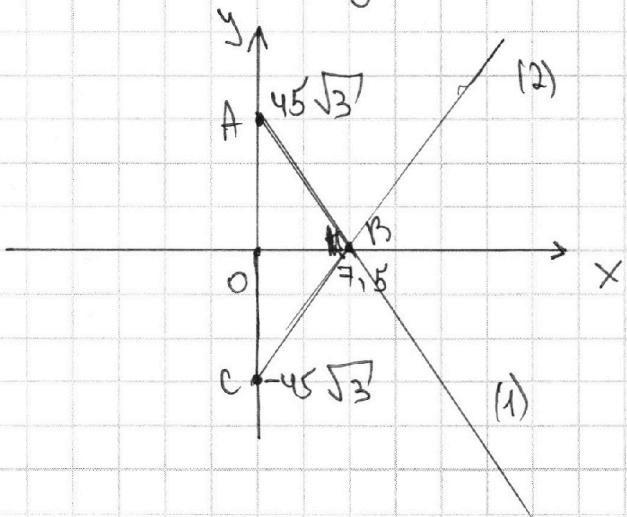
№6

$$\left| x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| + \left| x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| \leq 3; \quad S=? \text{ при } \text{извергте на X}$$

Решение: для начала поймей, как расположены прямые

$$x = \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \Leftrightarrow y = -6\sqrt{3}x + 45\sqrt{3} \quad (1)$$

$$x = \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \Leftrightarrow y = 6\sqrt{3}x - 45\sqrt{3} \quad (2)$$



Теперь нам нужно понять, как выглядит фигура  $\varphi$ , для этого нужно понять, как раскрываются модули

$$\begin{cases} x \leq \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \\ x \leq \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow \text{Это фиг. это } \triangle ABC, \text{ который охватывает прямые (1) и (2), где модуль рас-}$$

Ключ. с "—" :  $-x + \frac{15}{2} - \cancel{\frac{y}{6\sqrt{3}}} - x + \frac{15}{2} + \cancel{\frac{y}{6\sqrt{3}}} \leq 3$   
 $-2x + 15 \leq 3 \Rightarrow -2x \leq -12, \quad (\cancel{x \geq 6})$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7

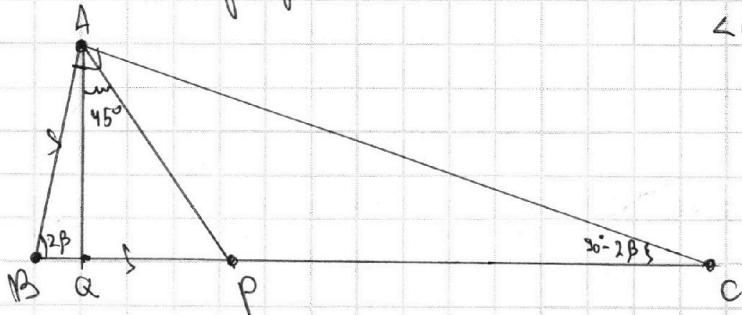
Решение: 1) докажем, что всегда Т.Д - четырёх омис. ок-ти

$\Delta APQ$ , ~~здесь я доказал без~~ пусть без сим. фиг.  $AB \leq AC \Rightarrow$

$\Rightarrow$  теперь разберём 2 сл.:

И = точки Q и P ~~не~~ перекрываются  $\Rightarrow$  если  $\angle B = 2\beta$ , то

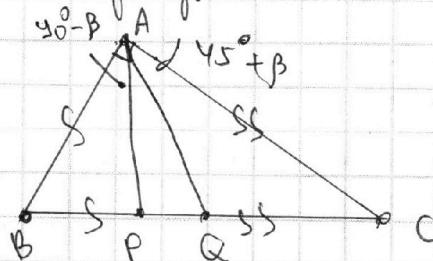
$$\angle C = 90^\circ - 2\beta$$



Т.к.  $\Delta ABP \sim \Delta AQC$ -п.д., то можем найти в них углы

при основаниях AP и AQ соответственно:  $\angle BPA = \angle BAP = \frac{180^\circ - 2\beta}{2} = 90^\circ - \beta$ ,  $\angle AQC = \angle CAQ = \frac{180^\circ - 90^\circ + 2\beta}{2} = 45^\circ + \beta \Rightarrow$   $\angle QAP = 45^\circ$  ( $180^\circ - 90^\circ + \beta - 45^\circ - \beta = 45^\circ$ )

II = Т. Р и Q не перекрываются  $\Rightarrow$  если  $\angle B = 2\beta$ ,  $\angle C = 90^\circ - 2\beta$



В  $\Delta BAP$ -п.д.:  $\angle BAP = \angle BPA = \frac{180^\circ - 2\beta}{2} = 90^\circ - \beta$

в  $\Delta AQC$ -п.д.:  $\angle CAQ =$

$$= \angle CQA = 45^\circ + \beta \Rightarrow \angle PAQ = 90^\circ - (90^\circ - \beta) - (45^\circ - \beta) = 45^\circ, \text{ т.е.}$$

$\angle QAP = 45^\circ$  - на самом деле ЭТОТ сл. Невозможен, т.к.

но неравн.  $\Delta$ :  $BC < BA + AC$ , а у нас наоборот  $\Rightarrow$  его можно не расматривать.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

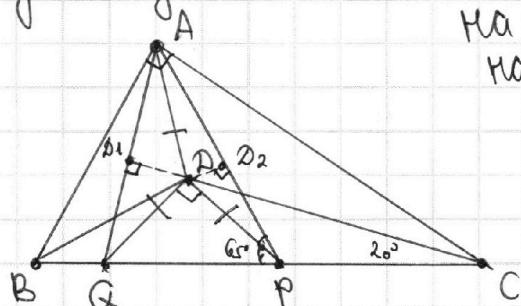
СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

И так, только что мы можем, что всегда выполнено условие:  $\angle PAQ = 45^\circ$ , но Т.К. по условию  $\angle PDQ = 90^\circ = 2 \cdot \angle PAQ$  и  $D = DQ$ , то в  $\triangle APQ$ : Т.Д - точка на серед. перпендикуляре к стороне  $QP$ , для которой выполнено:  $\angle PDQ = 2 \cdot \angle PAQ$ , а также т.к. на сер. перп.  $PQ$ , и находитесь ~~внутри~~ с т. А по одну сторону от  $PQ$ \* явится только центр опис. ок-ти  $\triangle APQ \Rightarrow D = DQ = DA$

\*\*\* а это верно т.к.  
но ч.о. D - внутри  $\triangle APQ$

$\Rightarrow$  ~~здесь добавьте разные линии~~  
рисунок картинка:

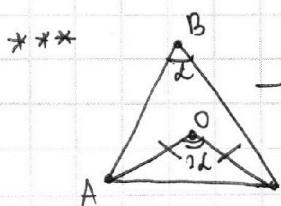


т.к.  $AC = CQ$ , то Следит  
на сер. перп.  $KAQ$  и делит  
на сер. перп.  $KAQ \Rightarrow DC \perp AQ$ ,  
т.е.  $DC$  - сер. перп.  $KAQ \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  если продлить  $DC$   
то пересеч.  $CAQ$  в т.  $D_1$ ,  
то  $\angle CD_1Q = 90^\circ$

и совершенно аналогично:  $BD$  - сер. перп.  $KAP \Rightarrow$  если продлить  $BD$   
то пересеч. с  $AP$  в т.  $D_2$ , то  $\angle BD_2P = 90^\circ$ ;

$\angle D_1CQ = 20^\circ \Rightarrow$  в прямогр.  $\triangle QD_1C$ :  $\angle CD_1Q = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$ , а в  
 $\triangle AQP$ : показали, что  $\angle QAP = 45^\circ$ ,  $\angle CQD_1 = 70^\circ \Rightarrow$  по т.о. сумме  
углов  $A = \angle APQ = 65^\circ \Rightarrow$  в прямогр.  $\triangle BD_2P$ :  $\angle D_2BP = 90^\circ - 65^\circ =$   
 $= 25^\circ$

Ответ:  $25^\circ$ .



\*\*\*  
известная картинка:  $\angle AOC = 2 \angle ABC$  как учил.  
угол В 2 раза > соответсв. ему угол, а  
если звать  $O$  то  $\angle AOC$  будет меняться от  
 $180^\circ$  до  $0^\circ \Rightarrow$  3 углы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

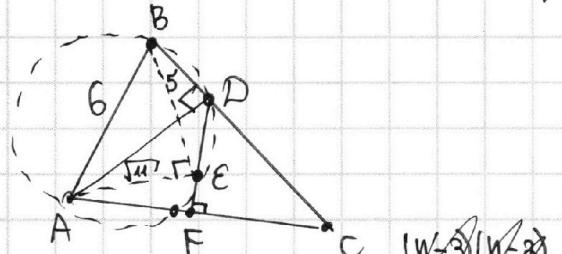
- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

X 2 3 4 5 6 7

r=3



$$\textcircled{4} \quad \text{Коэффициент } n \Rightarrow \text{правильные: } \frac{\binom{n^2-3}{3}}{\binom{n}{6}} = \frac{(n-3)(n-2)}{n(n-1)} \cdot \frac{(n-3)!}{2(n-5)!} = \frac{5! \cdot (n-3)!}{5!(n-5)!} = \frac{5! \cdot (n-3)!}{n!}$$

$$\text{меньше} \quad \frac{\binom{n^2-3}{3}}{\binom{n}{6}} = \frac{(n-3)!}{3!(n-6)!} = \frac{n!}{6!(n-6)!}$$

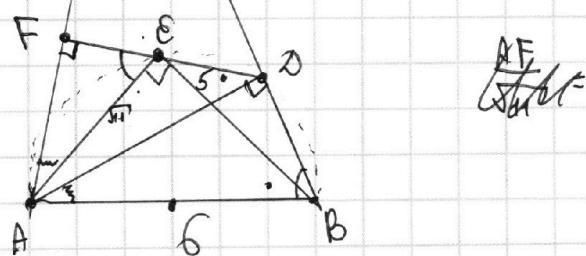
$$a(x-x_1)(x-x_2) = a(x^2 - x(x_1+x_2))$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

\textcircled{3}

AF-?

$$\frac{6}{\sqrt{17}} = \frac{AD}{AF} = \frac{DB}{FE}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases}$$

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 ?$$

$$(x^2 + y^2 + z^2) + 6(x+y+z) + 27 = 9 + x^2 + y^2 + z^2$$

$$y(z-x) = 3(x-z) + (x-z)(x+z) \Rightarrow (x-z)(3+x+z+9) = 0; \Rightarrow x+y+z = -3$$

$$x = -3 - y - z \Rightarrow \begin{cases} -3y - y^2 - zy = 3z + z^2 \\ -3z - yz - z^2 = 3y + y^2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 1 & 2 & 1 \\ & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 \\ + & 2 & 2 \\ \hline 1 & 3 & 3 & 1 \end{array}$$

$$xy + yz + zx = 3(-3) + x^2 + y^2 + z^2$$

$$\underbrace{(x+y+z)^2}_{g} = 3(x^2 + y^2 + z^2) - 18 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

②

$$n = \underbrace{999\dots9}_{40000} \oplus$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ - \\ 9^3 = 729 \end{array}$$

$$n^3 - ? \oplus 10^{40000} - 1$$

$$99 \rightarrow 99^3 = 9^3 \cdot 11^3 = 729 \cdot 1331$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$\begin{array}{r} 1 & 3 & 3 & 1 \\ & 7 & 2 & 9 \\ \hline & 7 & 2 & 9 \end{array}$$

$$n^3 = (10^{40000} - 1)^3 =$$

$$\begin{array}{r} 2 & 1 & 8 & 7 \\ + 2 & 1 & 8 & 7 \\ \hline 9 & 7 & 0 & 2 & 9 & 9 \end{array}$$

$$n = 10^{40000} - 1$$

$$\Rightarrow n^3 = 10^{120000} - 3 \cdot 10^{80000} + 3 \cdot 10^{40000} - 1 =$$

$$= 10^{120000} - (3 \cdot 10^{40000} - 1)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

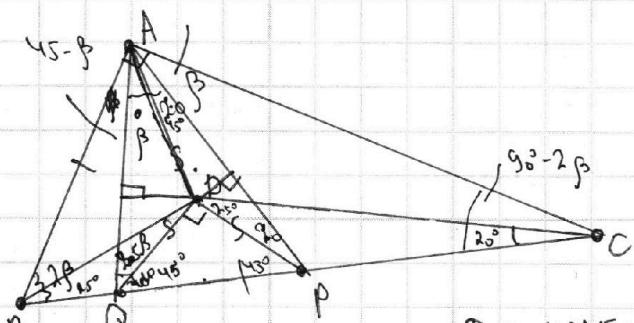
СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(7)

$$\begin{cases} AC = CQ \\ AB = BP \end{cases} \quad \angle DCB = 20^\circ$$

$\angle DBC$ ?



D - чётный или нечётный?

(2)

$$N = 10^{40000} - 1$$

$$\Rightarrow N^2 = 10^{120000} - 3 \cdot 10^{80000} + 3 \cdot 10^{40000} - 1$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ \overbrace{\quad\quad\quad}^{120000} \\ - 100\dots0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3000\dots0 \\ \overbrace{\quad\quad\quad}^{80000} \\ - 99\dots9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 39999 \\ \overline{7998} \end{array}$$