



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = -6y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 20 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 10$, $BE = 9$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарик. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть девять коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$ являются пятым и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| + \left|y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| \leq 8$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle CBA = 46^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = -6y + y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = z(z-6), \\ yz = x(x-6), \\ zx = y(y-6) \end{cases}$$

$$xy \cdot yz \cdot zx = x \cdot y \cdot z \cdot (x-6) \cdot (y-6) \cdot (z-6)$$

$$xyz(xyz - (x-6)(y-6)(z-6)) = 0$$

или

$$\begin{cases} x=0, \\ y=0, \\ z=0, \\ xyz - (x-6)(y-6)(z-6) = 0 \end{cases}$$

При $x=0$: $\begin{cases} z(z-6) = 0, \\ yz = 0, \\ y(y-6) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0, z=0 \\ y=6, z=0 \\ y=0, z=6 \end{cases}$ ~~и наоборот~~

Аналогично при $y=0, z=0$: $\begin{pmatrix} 0; 0; 0 \\ 6; 6; 0 \\ 0; 0; 6 \end{pmatrix}$ ~~и наоборот~~

$$xyz - (x-6)(y-6)(z-6) = xyz - (xy - 6x - 6y + 36)(z-6) =$$

$$= xyz - xyz + 6(xy + xz + yz) + 216 - 36(x+y+z) = 0$$

$$36 + (xy + xz + yz) - 6(x+y+z) = 0$$

$$36 + z(z-6) + y(y-6) + x(x-6) - 6x - 6y - 6z = 0$$

$$6 \cdot (6-x) + 6 \cdot (6-y) + 6 \cdot (6-z) - 2 \cdot 36 + x(x-6) + y(y-6) + z(z-6) = 0$$

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = 22 \quad \text{при } x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$$

При $x=0, y=0, z=0$: $(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = 3 \cdot 36 = 108$
 При $x=0, y=6, z=0$: $(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = 2 \cdot 36 = 72$
 или при любом другом решении
 из $(6; 0; 0), (0; 6; 0), (0; 0; 6)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = \underbrace{99\dots9}_{20001 \text{ шт.}} = 9 \cdot \underbrace{11\dots1}_{20001 \text{ шт.}} \quad 2) \quad n^3 = 729 \cdot \underbrace{11\dots1^3}_{20001 \text{ шт.}}$$

$$729 + 7290 = 8019 = 729 \cdot 11$$

$$729 + 7290 + 72900 = 80919 = 729 \cdot 111$$

$$729 + 7290 + 72900 + 729000 = 809919 = 729 \cdot 1111$$

$$729 + 7290 + 72900 + 729000 + 7290000 = 8099919 = 729 \cdot 11111$$

$$\dots 729 \cdot \underbrace{11\dots1}_b = 80 \cdot 10^b + 19 + 900 \cdot \underbrace{11\dots1}_{b-2}$$

Можно заметить, что при умножении 729 на число, состоящее из b единиц, получается число, ~~состоящее из~~ содержащее $b-1$ девяток $\Rightarrow b$
 n^3 ровно 20000 девяток

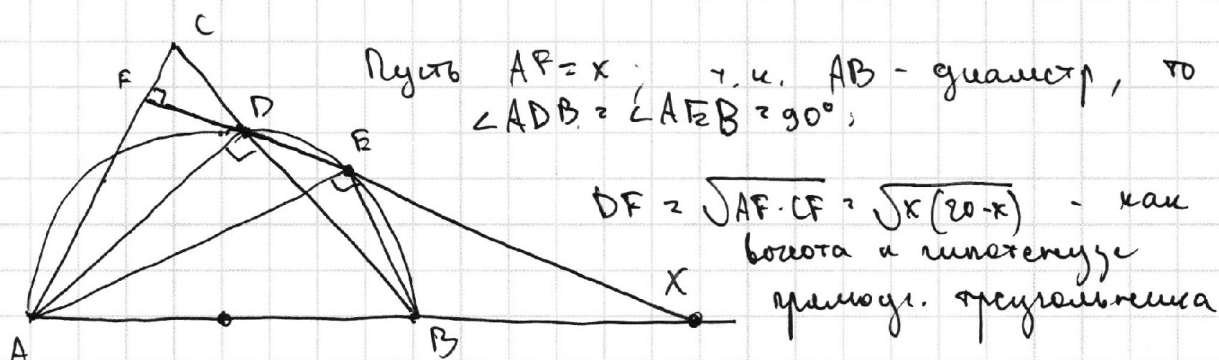


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AD = \sqrt{DF^2 + AF^2} = \sqrt{(20-x)^2 + x^2} = 2\sqrt{5x}; \quad \cancel{AB = 20} \quad \cancel{AD = 2\sqrt{5x}} \\ \cancel{2\sqrt{5x} = 20 - 5x} \quad \cancel{2\sqrt{5x} = 20 - 5x} \quad \cancel{2\sqrt{5x} = 20 - 5x}$$

По теореме Менелая:

$$\frac{AB}{BX} \cdot \frac{DX}{DF} \cdot \frac{CF}{AC} = 1; \quad \frac{20}{BX} \cdot \frac{DX}{\sqrt{x(20-x)}} \cdot \frac{20-x}{20} = 1$$

$$DX = BX \cdot \frac{2\sqrt{5x}}{\sqrt{20-x}}$$

т.к. $\angle XEB = \angle XAD$, то $\triangle XEB \sim \triangle XAD$ (по 2 углам);

$$\frac{XE}{BX+20} = \frac{9}{AD} = \frac{BX}{DX}; \quad \frac{9}{\sqrt{20-x}} = \frac{2\sqrt{5x}}{2\sqrt{5x}}$$

$$81 = 100 - 5x \Rightarrow x = 3,8$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть всего n коробок, тогда в первом случае количество вариантов выбора коробок, при которых игрок выигрывает, равно количеству вариантов выбора $5-3=2$ коробок из $n-3$ коробок, а во втором - $9-3=6$ коробок из $n-3$ коробок:

9 коробок:

выигрывает варианты: $\frac{(n-3)!}{6! \cdot (n-3-6)!}$

все варианты: $\frac{n!}{9! \cdot (n-9)!}$

вероятность выигрыша: $\frac{(n-3)!}{6! \cdot (n-9)!} \cdot \frac{9! \cdot (n-9)!}{n!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot (n-3)!}{n!}$

5 коробок:

выигрывает варианты: $\frac{(n-3)!}{2! \cdot (n-3-2)!}$

все варианты: $\frac{n!}{5! \cdot (n-5)!}$

вероятность выигрыша: $\frac{(n-3)!}{2! \cdot (n-5)!} \cdot \frac{5! \cdot (n-5)!}{n!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (n-3)!}{n!}$

Отношение вероятностей: $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot (n-3)!}{n!} \cdot \frac{n!}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (n-3)!} = 8,4$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ищем по теореме Виета корни уравнений
 $x^2 - (a^2 - 4a)x + (a^2 - 6a + 4) = 0$ и
 $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x + (-2a^3 - 6a - 15) = 0$;

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a^2 - 4a, \\ x_1 \cdot x_2 = a^2 - 6a + 4, \\ x_3 + x_4 = \frac{1}{5} \cdot (a^3 - 4a^2), \\ x_3 \cdot x_4 = (-2a^3 - 6a - 15) \cdot \frac{1}{5} \end{cases}$$

При a и d - первом члене арифметической прогрессии и ее разности:

$$x_1 = a_1 + 5d, \quad x_2 = a_1 + 6d, \quad x_3 = a_1 + 4d, \quad x_4 = a_1 + 7d;$$

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 2a_1 + 11d \Rightarrow a^2 - 4a = \frac{1}{5} \cdot (a^3 - 4a^2);$$

$$a(a-4)(a-5) = 0$$

При $a = 0$ $x_1 + x_2 = 0$, $x_1 \cdot x_2 = 4$; $-x_1^2 = 4$ - не подходит

При $a = 4$ $x_1 + x_2 = 0$, $x_1 \cdot x_2 = -4 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow d = 4 \Rightarrow x_3 = -6$ и $x_4 = 6$, но

$\frac{1}{5} \cdot (-2 \cdot 4^3 - 6 \cdot 4 - 15) \neq -36$ - $a = 4$ не подходит

При $a = 5$ $x_1 + x_2 = 5$, $x_1 \cdot x_2 = -1 \Rightarrow x_1 = \frac{5 - \sqrt{29}}{2}, x_2 = \frac{5 + \sqrt{29}}{2} \Rightarrow$
 $\Rightarrow d = \sqrt{29} \Rightarrow x_3 = \frac{5 - 5\sqrt{29}}{2}$ и $x_4 = \frac{5 + 3\sqrt{29}}{2}$;

$\frac{1}{5} \cdot (-2 \cdot 5^3 - 6 \cdot 5 - 15) = -59 \neq x_3 \cdot x_4 \Rightarrow a = 5$ - подходит



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Фигура заштрихована целиком I, III, IV координатные
четверти, а также часть II четверти, исключая точки
 $\begin{cases} x \in (-\infty; -85) \\ y \in (24; +\infty) \end{cases}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{При } y \geq 20, x \geq 0, y - 20 \leq \frac{x}{2\sqrt{3}}$$

$$y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} + y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 8 \Rightarrow y \leq 24, x \leq 2\sqrt{3}(y - 20) \leq 8\sqrt{3}$$

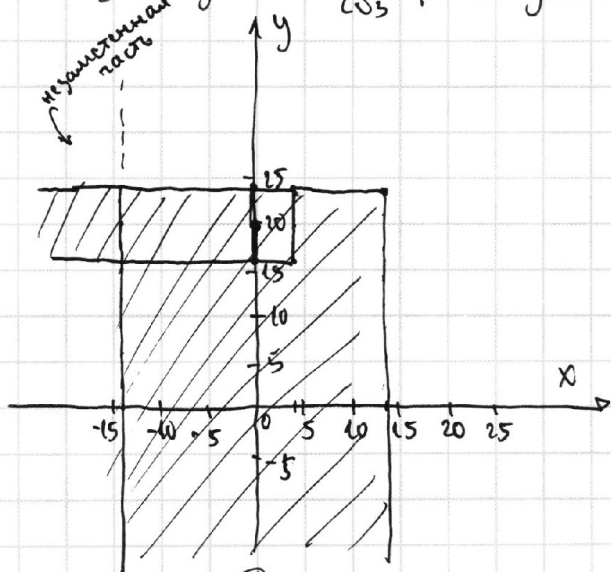
$$\text{При } y \geq 20, x \geq 0, y - 20 \leq \frac{x}{2\sqrt{3}}$$

$$y + 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} + y + 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 8 \Rightarrow x \leq 8\sqrt{3}, y \leq \frac{x}{2\sqrt{3}} + 20 \leq 24$$

$$\text{При } y \leq 20$$

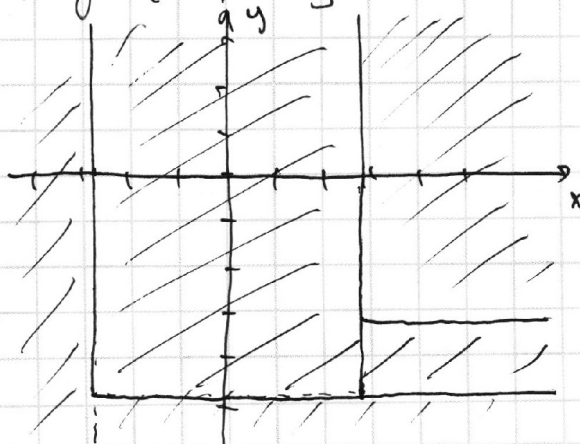
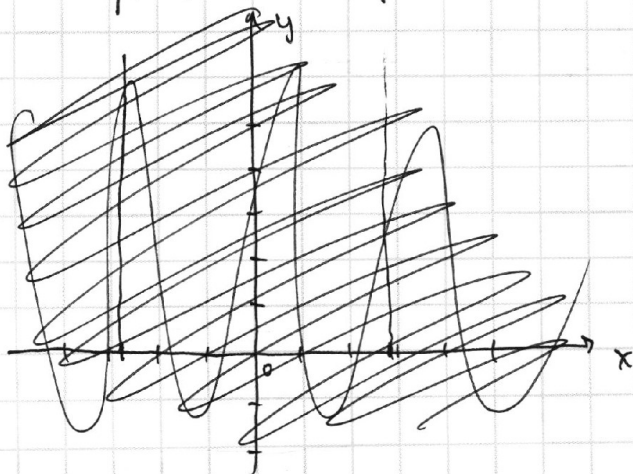
$$|a-b| + |a+b| = \begin{cases} 2|a|, & a \geq b \\ 2|b|, & a \leq b \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \right| + \left| y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \right| = \begin{cases} 2|y - 20|, & y \geq 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \\ \left| \frac{x}{\sqrt{3}} \right|, & y \leq 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$



$$\begin{cases} 2|y - 20| \leq 8, \\ y \geq 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$
$$\begin{cases} \left| \frac{x}{\sqrt{3}} \right| \leq 8, \\ y \leq 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \in [16; 24], \\ \frac{x}{2\sqrt{3}} \in \left[\frac{-y-20}{2\sqrt{3}}; \frac{y-20}{2\sqrt{3}} \right], \quad (\Rightarrow) x \in (-\infty; 8\sqrt{3}) \end{cases}$$
$$\begin{cases} x \in [-8\sqrt{3}; 8\sqrt{3}], \\ y \in (-\infty; 24] \end{cases}$$



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

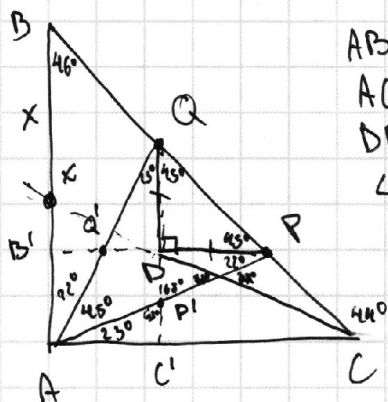


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} AB &= BP = b \\ AC &= CQ = c \\ DP &= DQ = d \\ \angle PDQ &= 90^\circ, \angle CDA = 46^\circ \\ \angle DCB &= ? \end{aligned}$$

$$(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab = 0$$

$$\angle BAP = \angle BPA = \frac{180^\circ - 46^\circ}{2} = 67^\circ$$

$$\angle CAQ = \angle CQA = \frac{180^\circ - (90^\circ - 46^\circ)}{2} = 68^\circ$$

$$67^\circ + 68^\circ - \angle QAP = 90^\circ \quad x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\angle QAP = 45^\circ$$

$$(\angle BAP = 22^\circ, \angle LAP = 23^\circ)$$

$$\frac{c}{BC} = \frac{d}{BX} = \frac{CD}{CX} = \frac{CD}{AB-BX} = \frac{CC'}{AC}$$

$$AB^2 + AC^2 = (AB + AC - PQ)^2$$

$$0 = 2AB \cdot AC - 2 \cdot PQ \cdot (AB + AC) + PQ^2$$

$$\Delta = 4AB^2 + 4AC^2 + 8AB \cdot AC - 8AB \cdot AC = (2BC)^2 (25-29) \cdot 29$$

$$PQ = AB + AC - BC$$

$$PQ = AB + AC - BC$$

$$x^2 - (a^2 - 4a)x + (a^2 - 6a + 4) = 0$$

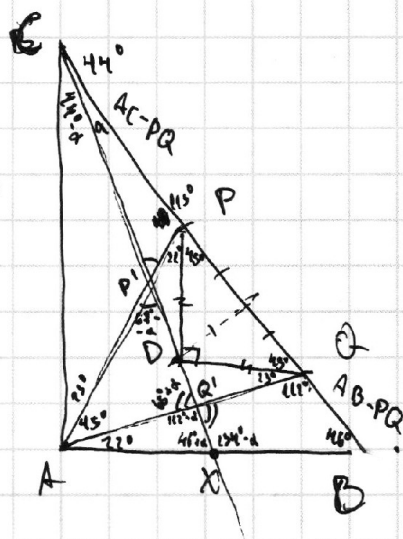
$$\Delta = 36 - 4 \cdot 4 = 20$$

$$a_{1,2} = 5 \pm \sqrt{5}$$

$$\Delta = a^4 - 8a^3 + 16a^2 - 4a^2 + 24a - 16 = a^4 - 8a^3$$

$$x_1 + x_2 = a^2 - 4a = 2a_1 + 3d = \frac{a^3 - 4a^2}{5}$$

$$x_1 \cdot x_2 = a^2 - 6a + 4 = (a_1 + d)(a_1 + 2d) = a_1^2 + 5da_1 + 2d^2$$



$$\frac{BX}{AB} \cdot \frac{AQ'}{QQ'} \cdot \frac{CQ}{BC} = 1$$

$$\frac{BQ}{CQ} \cdot \frac{CQ'}{XQ'} \cdot \frac{AX}{AB} = 1$$

$$\frac{BX}{AB} \cdot \frac{BQ}{BX} \cdot \frac{AQ' \cdot CQ'}{OQ' \cdot XQ'} = 1$$

$$x^2 - 5x - 1 = 0$$

$$\Delta = 25 + 4 = 29$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{29}}{2}$$

$$5a(a-4) = a^2(a-4)$$

$$a(a-4)(a-5) = 0$$

$$\frac{25-9 \cdot 29}{4} = \frac{25-261}{4} = \frac{-236}{4} = -59$$

$$a = 4; \quad x_1 = -2$$

$$x_2 = 2$$

$$d = 4$$

$$-6, -2, 2, 6$$

$$-2 \cdot 64 - 6 \cdot 4 - 15 \cdot 4 = -128 - 24 - 60 = -212$$

$$-128 - 24 - 15 = -167$$

$$280 \cdot 10^n + 19 + \underbrace{9 \cdot 11 \dots 1}_{n-2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

