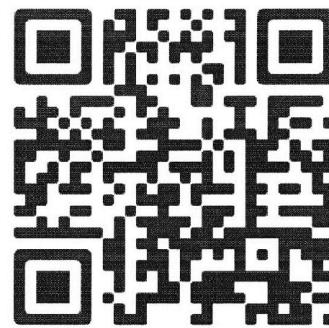


МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 5

1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.
4. [4 балла] В теленгре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарику. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leq 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипotenузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1.

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2; z \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases} \quad \text{III. k. } x, y, z \neq 0$$

§ III. k. $x, y, z \neq 0$, так можем первое уравнение поделить на z^2 , второе уравнение поделить на x , третье уравнение поделить на y , получим:

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{xy}{z^2} = z + 3 & (1) \\ \frac{yz}{x} = x + 3 & (2) \\ \frac{zx}{y} = y + 3 & (3) \end{cases}$$

Теперь вычтем из первого уравнения система второе, получим

$$\frac{xy}{z} - \frac{yz}{x} = (z+3) - (x+3) \Rightarrow \frac{xy}{z} - \frac{yz}{x} = z-x \Rightarrow \frac{x^2y - yz^2}{zx} = z-x \Rightarrow$$

$$\frac{y(x-z)(x+z)}{zx} = z-x \Rightarrow \frac{-y(z-x)(x+z)}{zx} = z-x, \text{ аналогично вычтем из}$$

$$\text{второго уравнения получим } \frac{yz}{x} - \frac{zx}{y} = x-y \Rightarrow \frac{y^2z - z^2x}{yx} = x-y \Rightarrow$$

$$\frac{z(y-x)(y+x)}{yx} = x-y \Rightarrow \frac{-z(x+y)(x-y)}{yx} = x-y, \text{ а тут из третьего}$$

$$\text{первое получим } \frac{zx}{y} - \frac{xy}{z^2} = y-x \Rightarrow \frac{x^2z - y^2z}{zy} = y-x \Rightarrow \frac{z(x-y)(x+y)}{zy} = y-x \Rightarrow$$

$$\frac{-z(x+y)(y-x)}{xy} = y-x \Rightarrow \frac{z^2x - xy^2}{yz} = y-x \Rightarrow \frac{x(z-y)(z+y)}{yz} = y-x \Rightarrow$$

$$\frac{-x(y-z)(z+y)}{yz} = y-x, \text{ теперь предположим, что } x \neq y \neq z, \text{ тогда}$$

либо $x-y \neq 0$, либо $y-z \neq 0$, либо $z-x \neq 0$, предположим, что для



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 83

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

ограничения областей $y \neq 0$, $x \neq 0$, тогда из *8 имеем:

$$\frac{-z(x+y)(x-y)}{yz} \rightarrow x-y \quad (\text{т.к. } \cancel{x+y \neq 0} \text{ можем поделить на } x-y), \text{ получим}$$

$$\frac{-z(x+y)}{yz} = 1 \Rightarrow yx + zx + zy = 0, \text{ аналогично, если т.к. система}$$

симметрична, если $x-z \neq 0$, $z-y \neq 0$ получим, что также

$yx + zx + zy = 0$, ~~насчитав поделив на $\{x+z\}$~~ и $y-z$ соответствующие

уравнения * и ***, тогда имеем $yx + zx + zy = 0$, теперь

рассмотрим нашу систему $\begin{cases} \frac{xy}{2} = z+3 & (1) \\ \frac{yz}{x} = x+3 & (2) \\ \frac{zx}{y} = y+3 & (3) \end{cases}$ и ~~насчитав~~ ^{или} получим

ее квадратурное, получим систему $\begin{cases} y^2 = (x+3)(z+3) & (1) \\ x^2 = (y+3)(z+3) & (2) \\ z^2 = (y+3)(x+3) & (3) \end{cases}$

теперь вычитем из первого уравнения второе, получим

$$y^2 - x^2 = (x+3)(z+3) - (y+3)(z+3) \Rightarrow (y-x)(y+x) = (x-y)(z+3) \Rightarrow -(x-y)(x+y) = (x-y)(z+3) \Rightarrow (x-y)(x+y+z+3) = 0, \text{ вывед из второго} \quad \text{умножим}$$

умножим и из третьего первого, получим $(y-z)(x+y+z+3) = 0, (x-z)$.

$$(x+y+z+3) = 0 \quad \text{и если } x \neq y \neq z, \text{ то одна из скобок } y-z, x-z, x-y$$

не равна 0, тогда ~~без ограничения области~~ $y-z \neq 0$, но

$(y-z) \neq 0$ без ограничения области если $y \neq z$, то из этого, что

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 1
<input checked="" type="checkbox"/> | 2
<input type="checkbox"/> | 3
<input type="checkbox"/> | 4
<input type="checkbox"/> | 5
<input type="checkbox"/> | 6
<input type="checkbox"/> | 7
<input type="checkbox"/> |
|--|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$(y-z)(x+y+z+3)=0$ получаем, что $x+y+z+3=0$, если же $x \neq y$ и $x \neq z$, то получаем на V и W соответственно и пойдем, что

снять $\{x+y+z+3=0$. ~~Переходя к~~ $x+y+z=-3$, теперь
берем ~~и~~ ^{второй} ~~и~~ исходную систему уравнений, которое

имеет вид $\left\{ \begin{array}{l} \frac{xy}{z} = z+3 \\ \frac{yz}{x} = x+3 \\ \frac{zx}{y} = y+3 \end{array} \right.$ и возведем каждое уравнение

в квадрат и сложим, получим $\left(\frac{xy}{z} \right)^2 + \left(\frac{yz}{x} \right)^2 + \left(\frac{zx}{y} \right)^2 = (z+3)^2 + (x+3)^2 + (y+3)^2$, но также $\left(\frac{xy}{z} \right)^2 + \left(\frac{yz}{x} \right)^2 + \left(\frac{zx}{y} \right)^2 = \frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} =$

$$= \frac{(x^2y^2)^2 + (y^2z^2)^2 + (z^2x^2)^2}{z^2x^2y^2} = \frac{(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)^2 - 2x^2y^2z^2(x^2 + y^2 + z^2)}{z^2x^2y^2} =$$

$$= \frac{((xy+yz+xz)^2 - 2xyz(x+y+z))^2 - 2x^2y^2z^2(x^2 + y^2 + z^2)}{z^2x^2y^2} = A, \text{ но } xyz = 0, \text{ тогда}$$

$$A = \frac{(-2xyz(x+y+z))^2 - 2x^2y^2z^2(x^2 + y^2 + z^2)}{z^2x^2y^2} = \frac{4x^2y^2z^2(x+y+z)^2 - 2x^2y^2z^2(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2y^2z^2}$$

$$= 4(xy+yz+xz)^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2) = 4 \cdot (-3)^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2) = 36 - 2(x^2 + y^2 + z^2), \text{ но}$$

$$\text{из системы } \begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases}, \text{ получим } xy + yz + zx = 3(x+y+z) + x^2 + y^2 + z^2 =$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx - 3(x+y+z) = 0 + 3 \cdot (-3) = 9, \text{ тогда } A =$$

$$= 36 - 2(x^2 + y^2 + z^2) = 36 - 18 = 18, \text{ можно оставить рассмотреть случай } x=y=z, \text{ тогда } xy = 3z + z^2 \Rightarrow z^2 = 3z + z^2 \Rightarrow 3z = 0 \Rightarrow z = 0, \text{ противоречие} \Rightarrow \text{такое невозможно}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $x = n+1$, тогда $n^3 = (x-1)^{\frac{n^2}{2}} = (x^2 - 2x + 1)(x-1) =$

$x^3 - 2x^2 + x - x^2 + 2x - 1 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, но м.н. n состоит

из трех чисел $\underbrace{999}_{40000} \dots \underbrace{99}_{40000}$, то x имеет вид $\underbrace{10}_{40000} \dots \underbrace{00}_{40000}$,

тогда x^3 имеет вид $\underbrace{100}_{120000} \dots \underbrace{0}_{120000}$, а $3x^2$ имеет вид

$\underbrace{300}_{80000} \dots \underbrace{0}_{40000}$, а $3x$ имеет вид $\underbrace{3000}_{40000} \dots \underbrace{0}_{40000}$, теперь заметим,

что первые цифры числа $x^3 - 3x^2 + 3x$ числа $x^3 - 3x^2$

имеют вид $\underbrace{9999}_{40000-1} \underbrace{70}_{40000} \dots \underbrace{9}_{40000}$, а число $x^3 - 3x^2 + 3x$ всегда имеет

вид $\underbrace{9999}_{40000-1} \underbrace{700}_{40000-1} \underbrace{300}_{40000} \dots \underbrace{0}_{40000}$, тогда число $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ имеет

вид $\underbrace{999 \dots}_{40000-1} \underbrace{700 \dots 0}_{40000-1} \underbrace{3}_{40000} \underbrace{99999 \dots}_{40000}$, тогда в этом числе

без $40000-1 + 40000 = 80000-1$ единиц = 79999 единиц.

Упр. 1.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

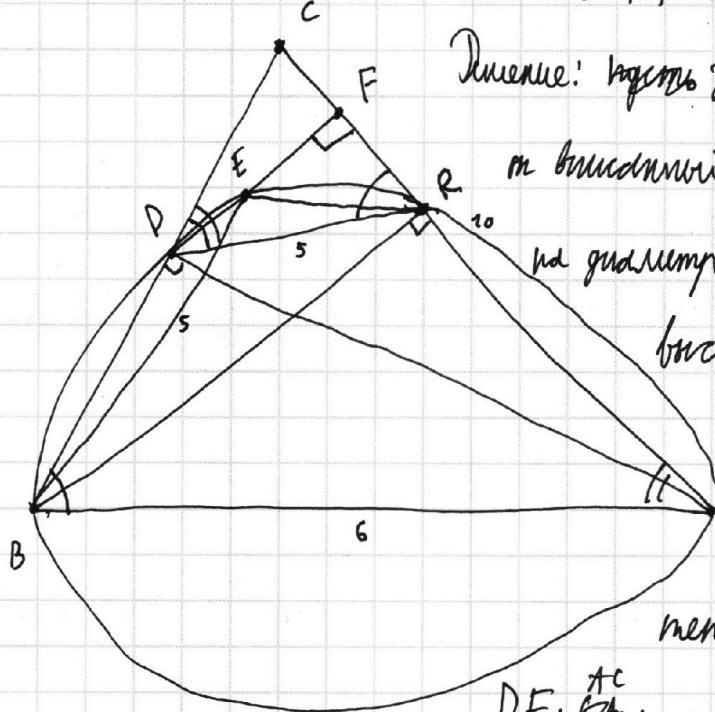
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 3

Дано: $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$



Доказать: пусть заметили, что $\angle BDA = 90^\circ$ (из
т. вписанного в окружность угл. и опираясь
на диаметр), теперь пусть R-радиус
вписаны $\triangle ABC$ из вершины B,
тогда, м.н. $\angle BDA = \angle BRA =$
 $A = 90^\circ$, но $R \in rr$, но
меньше заметили, что $BR \perp AC$,
 $DE \perp EA$ по условию $\Rightarrow BR \parallel DE$, но

$BE \in rr$, $AE \in rr$, $R \in rr$, а между $E \in rr$ (по условию) $\Rightarrow BDER$ -вписаный
четырехугольник в котором $DE \parallel BR \Rightarrow BDER$ -параллелограмм
тогда $\frac{RD}{RD} = \frac{BE}{BE}$ (как диагонали параллелогр. трапеции) $= 5$ (по условию),
(по свойству вписаного четырехугольника
меньше, т.к. BDR вписаный, т.к. $\angle BDR = 180^\circ - \angle CAB$, но $\angle BDR =$
 $= 180^\circ - \angle CDR$, тогда $180^\circ - \angle CDR = 180^\circ - \angle CAB \Rightarrow \angle CDR = \angle CAB$, значит
имеем, что $\angle DRA + \angle DBA = 180^\circ \Rightarrow \angle DRA = 180^\circ - \angle BAA$, но $\angle DRA = 180^\circ - \angle RD \Rightarrow$
 $180^\circ - \angle RD = 180^\circ - \angle BAA \Rightarrow \angle RD = \angle BAA$, но тогда, м.н. $\angle CDR = \angle CAB$,
 $\angle CDR = \angle BAA$, но $\angle DCR \sim \angle ACB$ (по двум углам), но тогда имеем
стриж. 1.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) $\frac{DR}{AB} = \frac{CD}{AC} \Rightarrow CD = AC \cdot \frac{DR}{AB} = 10 \cdot \frac{5}{6} > \frac{50}{6} = \frac{25}{3}$, но также заметим, что $\triangle DAF \sim \triangle CAD$ (m.n. $\angle DFA = 90^\circ = \angle CDA$ и $\angle CAD$ у них общие), тогда $\frac{CA}{AD} = \frac{AD}{AF} \Rightarrow CA \cdot AF = AD^2$, тогда $AF > \frac{AD^2}{CA}$, но по теореме Пифагора для $\triangle DCA$ имеем $AD^2 + CD^2 = AC^2 \Rightarrow AD^2 = AC^2 - CD^2 = 100 - \left(\frac{25}{3}\right)^2 = 100 - \frac{5^4}{3^2} = \frac{300 - 900 - 625}{3^2} = \frac{25}{9}$, тогда $AF = \frac{25}{9} : AC = \frac{25}{9} : 10 = \frac{55}{18} = 3 \frac{1}{18}$.

Отв.?

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N4.

Рассмотрим случай, когда игрок может указать на пять городов.
Заметим, что вероятность победить - это **число начальных** исходов к общему числу исходов, т.к. у нас всего **пять** городов, тогда общее число исходов равно $\frac{k \cdot (k-1) \cdot (k-2)}{3!}$ (т.к. кол-во способов выбрать ячейку первому шагу равно k , второму уже $k-1$, третьему $k-2$ и так далее на общее количество между ними, т.е. $3!$), теперь получаем кол-во начальных исходов, у нас игрок выбирает пять городов и число исходов, то в этих пяти городах равно $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!}$ (т.к. кол-во способов выбрать городку первому шагу равно 5, второму равно 4, третьему равно 3 и между ними $3!$ перестановок),
 $\Rightarrow a = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 10$, тогда в первом случае вероятность выиграть равна 10: $\frac{k \cdot (k-1) \cdot (k-2)}{3!} = 10 \cdot \frac{3!}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2)}$. Тогда рассмотрим какова будет вероятность выиграть, если игрок может открыть 6 городов, то это общее число исходов равно по- прежнему $\frac{k(k-1)(k-2)}{3!}$, а кол-во начальных исходов равно **шесть** способами т.к. шаги по всему городкам, т.е. $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 20$ (т.к. кол-во ячеек для доступных городов для первого шага равно 6, для второго 5, для третьего 4 и кол-во перестановок равно $3!$), тогда в этом случае вероятность выиграть равна 20: $\frac{k(k-1)(k-2)}{3!} = 20 \cdot \frac{3!}{k(k-1)(k-2)}$, тогда $20 \cdot \frac{3!}{k(k-1)(k-2)} : \frac{10 \cdot 3!}{k(k-1)(k-2)} = 2$
 $\therefore \left(\frac{3!}{k(k-1)(k-2)} \cdot 10 \right) : \frac{20}{10} = 2$, т.е. вероятность увеличилась в два раза.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N5

Пусть корни линейной части второго уравнения равны x_4 , ~~то есть~~ а это корни пропорции, которой принадлежат все корни равенства k , тогда $x_4 - k$ ~~является~~ и $x_4 + 2k$ и $x_4 + 3k$ - корни первого уравнения, а x_4 и $x_4 + 5k$ - корни второго уравнения, но тогда зачтем, что сумма корней первого уравнения равна $-2x_4 + 5k$ и равна сумме корней второго уравнения, теперь пусть x_1, x_2 - корни первого уравнения, а ~~это~~ ~~сумма~~ корни второго уравнения x_3, x_4 , тогда по теореме Виетта имеем $x_1 + x_2 = \frac{-(a^2-a)}{a^2} = a^2 - a = a(a-1)$, а из второго уравнения по теореме Виетта имеем $x_3 + x_4 = \frac{-(a^3-a^2)}{4}$, но так же мы выяснили равенство, что $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$, тогда имеем $a^2 - a(a-1) = \frac{a^3 - a^2}{4} \Rightarrow a(a-1) = \frac{a(a^2-a)}{4} \Rightarrow 4a(a-1) = a^2(a-1) \Rightarrow a(a-1) = \frac{a^2(a-1)}{4} \Rightarrow 4a(a-1) - a^2(a-1) = 0 \Rightarrow (a-1)(4a - a^2) = 0 \Rightarrow (a-1) \cdot a \cdot (4-a) = 0 \Rightarrow$ либо $a=0$, либо $a=1$, либо $a=4$, оставляем проверить, что при этих a уравнения $x^2 - (a^2-a)x + a^2 - 5 = 0$ и $4x^2 - (a^3-a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ ~~а~~ действительно имеют по два корня, которое является соотвественно тремя шагами алгебраической пропорции.

Стр. 1.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 38

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если $a=0$, то $x^2 - (a^2-a)x + a - 5 = x^2 - 5$, а $4x^2 - (a^3-a^2)x +$

$+ 2a^4 + 2a^2 - a^6 - a^4 = 4x^2 - 4 = 0$ т.к., корни первого уравнения

$\sqrt{5} \pm \sqrt{5}$, а второго 1 ± 1 , но тогда разность прогрессии равна $\sqrt{5} - (-\sqrt{5})$ или $\sqrt{5} - \sqrt{5} = 0$, т.е.

$-2\sqrt{5}$ или $2\sqrt{5}$, но тогда, м.н. 1 ± 1 члены этой прогрессии,

но $1 + m \cdot 2\sqrt{5} = -1$, где m -целое число, тогда $m \cdot 2\sqrt{5} = -2 \Rightarrow$

$m\sqrt{5} = -1 \Rightarrow m = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, но m -целое, противоречие $\Rightarrow a=0$ не подходит

Если $a=1$, то $x^2 - (a^2-a) \cdot x + a - 5 = x^2 + 1 - 5 = x^2 - 4 = 0$,

$x^2 - 4 = 0$ и $4x^2 - (a^3-a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - a^4 = 0 \Rightarrow$

$4x^2 - 1 = 0$, тогда корни первого уравнения -

это $x = \pm 2$ и -2 , а второго $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}$, но тогда разность

этой разности первых двух членов прогрессии, но $\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) = 1$ - разность прогрессии

это разность первых двух членов первого уравнения (м.н. они состоят из членов прогрессии), т.е. члены -4 , члены 4 , но тогда

$\frac{1}{2} + 4 \cdot m = -\frac{1}{2}$, где m -целое ($m \neq -\frac{1}{2}$ такие члены

этой прогрессии) $\Rightarrow m = \frac{1}{4}$, но m -целое, противоречие,

если же $a=4 = 2^2$, то $x^2 - (a^2-a) \cdot x + a - 5 = 0 \Rightarrow x^2 =$

$2x^2 - (2^4 - 2^2) \cdot x - 1 = x^2 - 8x - 1$, а также

смр. 2. смр. 1. $144 = 4 \cdot 36 + 16$

но это действительно верно

сумма квадратов членов прогрессии $2\sqrt{D} = 2 \cdot 2 \cdot 3 + 16 = 32$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 4x^2 - (2^6 - 2^4)x + 2^9 + 2^5 - 2^{12} - 2^2 = 4x^2 - 2^{12}$ наи.члены~~

~~$\Rightarrow 4x^2 \text{ уравнение } 4x^2 - (2^6 - 2^4)x + 2^9 + 2^5 - 2^{12} - 2^2 = 0, \text{ т.е.}$~~

~~$x^2 - (2^4 - 2^2)x + 2^4 + 2^3 - 2^{10} - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 128 + 8 - 1 - 1024 =$~~

~~$= 0 \Rightarrow x^2 - 8x - 1025 + 136 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x - 889 \approx 1000 + 111 = 0 \Rightarrow$~~

~~$x^2 - 8x - 889 = 0 \text{ это корни - это } \frac{8 + \sqrt{D_1}}{2} \text{ и } \frac{8 - \sqrt{D_1}}{2}, \text{ а корни } 340 \text{ и } 370$~~

~~$\text{уравнение } x^2 - 8x - 1 = 0 - \text{ это } \frac{8 + \sqrt{D_2}}{2} \text{ и } \frac{8 - \sqrt{D_2}}{2}, \text{ где } x^2 D_2 = 108$~~

~~$= 64 + 4 = 68, \text{ т.е. } \sqrt{D_2} = \sqrt{68} = \sqrt{4 \cdot 17} = 2\sqrt{17}, \text{ а } \sqrt{D_1} = \sqrt{8^2 + 4 \cdot 889} =$~~

~~$34 \cdot 25 = 340 - 2 + 5 \cdot 370 =$~~

~~$= 740 + 150 + 35 = 890 + 35 =$~~

~~$= 925$~~

~~$4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 4x^2 - (4^3 - 4^2)x +$~~

~~$+ 2 \cdot 4^4 - 2 \cdot 4^2 - 4^6 - 4, \text{ тогда наил.члены корни}$~~

~~$\text{уравнение } 4x^2 - (4^3 - 4^2)x + 2 \cdot 4^4 - 2 \cdot 4^2 - 4^6 - 4 = 0, \text{ т.е.}$~~

~~$x^2 - (4^2 - 4)x + 2 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4 - 4^5 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 12x +$~~

~~$+ 128 + 8 - 1024 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 12x + 136 - 1025 = 0 \Rightarrow x^2 - 12x - 925 + 36 =$~~

~~$= 0 \Rightarrow x^2 - 12x - 900 + 11 = 0 \Rightarrow x^2 - 12x - 889 = 0, \text{ дискриминант}$~~

~~$\text{этого уравнения } D = 12^2 + 4 \cdot 889 = 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 + 4 \cdot 889 =$~~

~~$= 4(36 + 4 \cdot 889) = 4 \cdot (36 + 4 \cdot (1000 - 111)) = 4 \cdot (84000 - 444 + 36) =$~~

~~$= 4 \cdot (8000 - 408) = 3592 \cdot 4 = 17976 \cdot 6 = 4 \cdot 3592 \Rightarrow \sqrt{D} = 2\sqrt{D_1} \text{ разность}$~~

~~$\text{ между корнями по модулю равна } 2\sqrt{D_1} = 22. \text{ Отвем: } 3 \text{ и } 4.$~~

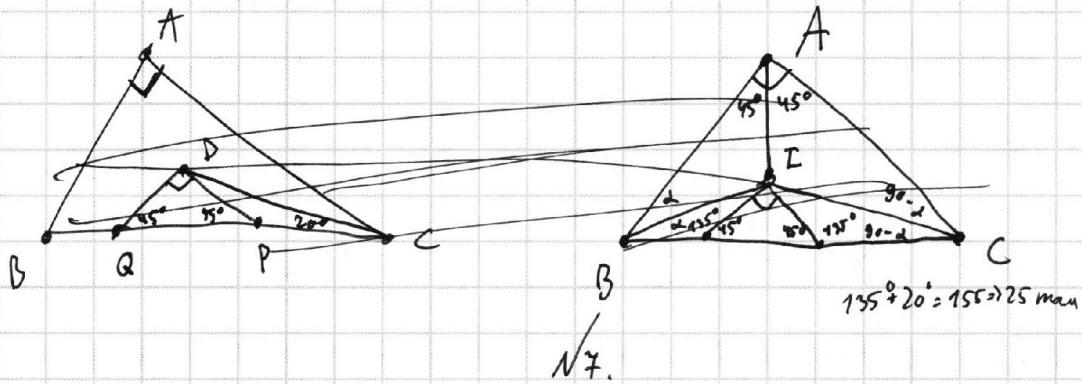
стп. 3.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Pensée:

Тема I - учим високий оптимізм

$\triangle BAC$, $a = ABC = 2x$, moga $- ACB = 180^\circ - BAC - ABC =$

$$= 180^\circ - 90^\circ - 2\alpha = 90^\circ - 2\alpha, \text{ теперь заменим,}$$

Что м.к. I - несение дислокации в АГ,

$$\text{moc } \angle ABD = \angle CBD = \frac{\angle ABC}{2} = 2^\circ, \text{ a manane } \angle BAC = \angle CAB = \frac{\angle BAC}{2} = 45^\circ,$$

moga $\angle AIB = 180^\circ - \angle ABI - \angle BAI = 180^\circ - 2 \cdot 45^\circ = 135^\circ$, менең заменеси,

Чи маємо юнітуро $\angle A \cong \angle Q$, та $\angle C \cong \angle Q - 90^\circ$, то $\angle A = \angle Q \Rightarrow \triangle ACQ$ - прямокутний;

$$\text{magenta} \angle QAC = \angle AQC = \frac{180^\circ - \angle ACQ}{2} = \frac{90^\circ + 2x}{2} = \frac{90^\circ + 180^\circ - (90^\circ - 2x)}{2} = 94.5 + x, \text{ magenta}$$

$$\angle AQB = 180^\circ - \angle AQC = 180^\circ - (45^\circ + \angle) = 135^\circ - \angle = \angle AIB, \text{ no moga } AIB \neq Q$$

frumentorum (m.n. спорына АВ бурна из морен I, Q на огнене земле

и она назначена в связи с наложением ограничения АВ), не может

no *aberrant* *inflammation* *remodeling* *and* *new*
collagen

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\angle IQB + \angle IAB = 180^\circ \Rightarrow \angle IQB + 95^\circ = 180^\circ \Rightarrow \angle IQB = 135^\circ \Rightarrow \angle IQP = 180^\circ - \angle IQB = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$, аналогично предыдущему рассуждению имеем:
 $\angle ACI = \angle BCJ = \frac{\angle ACB}{2} = 45^\circ - \alpha$, тогда $\angle AIC = 180^\circ - \angle IAC - \angle ICA = 180^\circ - 45^\circ - (90^\circ - \alpha) = 45^\circ + \alpha$, а также $AB = BP \Rightarrow \triangle BAP$ равнобедренный, откуда $\angle BAP = \angle BPA = \frac{180^\circ - \angle ABP}{2} = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle APC = 180^\circ - \angle BPA = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ + \alpha = \angle AIC \Rightarrow AIPC$ вписанный \Rightarrow по свойству вписанного четырехугольника имеем $\angle IPC + \angle IAC = 180^\circ \Rightarrow \angle IPC = 180^\circ - \angle IAC = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$, тогда $\angle IPQ > 180^\circ - \angle IPC = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$. Тогда в треугольнике $\triangle QIP$ имеем $\angle QIP = 180^\circ - \angle IQP - \angle IPQ = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ$ и $\angle IPQ = \angle IQP \Rightarrow PQ = IP$, теперь заметим, что I – это точка D из условия, т.е. ~~наружу~~ для точки D у нас $DP = DQ$ и $\angle PDQ = 90^\circ$, т.е. D лежит на середине PQ и на окружности с диаметром PQ и внутри $\triangle ABC$, такая точка ~~наружу~~ есть одна, т.к. середина PQ пересекает окружность с диаметром PQ в двух точках одна из которых лежит вне $\triangle ABC$, Теперь заметим, что у нас $\angle IQ = \angle IPQ = \angle QIP = 90^\circ$, а также I лежит внутри $\triangle ABC$, тогда ~~наружу~~ имеем, что точка C с такими свойствами $\angle BIC =$ $\angle BDC =$ $360^\circ - \angle AIB - \angle AIC = 360^\circ - (135^\circ - (90^\circ + \alpha)) = 135^\circ$, тогда $\angle BDC = \angle DBC = 180^\circ - \angle BDC - \angle DCB = 180^\circ - 135^\circ - 2\alpha = 25^\circ$
 (аналогично 25°)
 Смтр. 2.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{xy}{z} = z + 3$$

$$\frac{yz}{x} = x + 3$$

$$\frac{zx}{y} = y + 3$$

$$\frac{x}{z} \quad \frac{y}{x} \quad \frac{z}{y}$$

$$\text{перемножим,}\\ \text{получим } p^2 =$$

$$y^2 = (x+3)(z+3)$$

$$z^2 = (y+3)(x+3)$$

$$x^2 = (z+3)(y+3) \quad q^2 = pr + 6\sqrt{pr} + 9$$

$$r^2 = pq + 6\sqrt{pq} + 9$$

$$(x-z)(x+z) = (y+3)(z+3)$$

$$-(x+z) = y+3 \quad p = -\sqrt{qr} + 3$$

$$q = \sqrt{pr} + 3$$

$$r = \sqrt{pq} + 3$$

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} =$$

$$2 \frac{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2}{xyz}$$

$$(xy+yz+zx)^2 = 2xy - 2y$$

$$-2xyz^2$$

$$2xy^2z$$

$$xy^2z + x^2yz +$$

$$xyz(x+y+z)$$

Пусть $\frac{xy}{z} = p$, $\frac{yz}{x} = q$, $\frac{zx}{y} = r$, тогда имеем

$z = \sqrt{qr}$, $x = \sqrt{pr}$, $y = \sqrt{qr}$, тогда имеем

систему

$$z = -\sqrt{qr}, \quad x = \sqrt{pr}, \quad y = \sqrt{qr}$$

$$\frac{(x^2y^2)^2 + (x^2y^2z^2)^2 + (y^2z^2)^2}{z^2}$$

$$x^2y^2z^2 = -\sqrt{qr} \quad (x^2y^2 + z^2y^2 + x^2z^2)^2 =$$

$$p = -\sqrt{qr} + 3 \quad xy^2z^2 / (x^2y^2 + z^2)$$

$$q = -\sqrt{pr} + 3$$

$$(xy + yz + zx)^2 - xyz(x+y+z) + y^2z^2 + z^2$$

$$\frac{xy}{z} - \frac{y^2}{x} = z - x$$

$$xz \cdot y -$$

$$\frac{x^2 \cdot y - z^2 \cdot y}{xz} = z - x$$

$$\frac{y(x-z)(x+z)}{xz} = z - x$$

$$\frac{-y(x+z)}{xz} = 1$$

$$-y(x+z) = xz$$

$$xz + xy + yz = 0$$

$$0 = 2 \frac{xy + (x+y+z)}{xyz}$$

$$\frac{-2(xy + (x+y+z))}{xyz}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи** отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

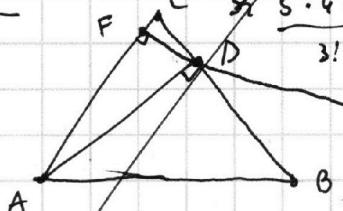
k

$x = n+1$

$$(x-1)^3 =$$

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!}$$

$$C_5^3 = \frac{n!k!}{n!(n-k)!}$$

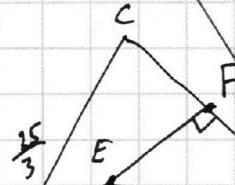


70

$$C_6^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = \\ = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 20$$

$$\frac{10}{2^k}$$

$$\frac{20}{2^k}$$



$$\frac{DP}{AB} = \frac{CA}{CD} \Rightarrow CD = CA \cdot \frac{DP}{AB} = \\ = 10 \cdot \frac{5}{6} = \frac{50}{6} = \frac{25}{3}$$

10

$$\frac{25}{3}$$

$$\frac{5}{3}$$

10

$$xy = 3z + z^2$$

$$yz = 3x + x^2$$

$$zx = 3y + y^2$$

A

B

$$18^2 - \frac{28^2}{3^2}$$

$$10^2 - \frac{5^4}{3^2} = \frac{3^2 \cdot 10^2 - 5^4}{3^2} = \frac{5^2(3^2 - 2^2 - 5^2)}{3^2} =$$

$$xy = 2(z^2 + 3)$$

$$\frac{xy}{z} = z + 3$$

$$yz = x^2 + 3$$

$$zx = y^2 + 3$$

$$p - q = \sqrt{qr} - \sqrt{pr}$$

$$p - q =$$

$$p = \sqrt{qr} + 3$$

$$q = \sqrt{pr} + 3$$

$$r = \sqrt{pq} + 3$$

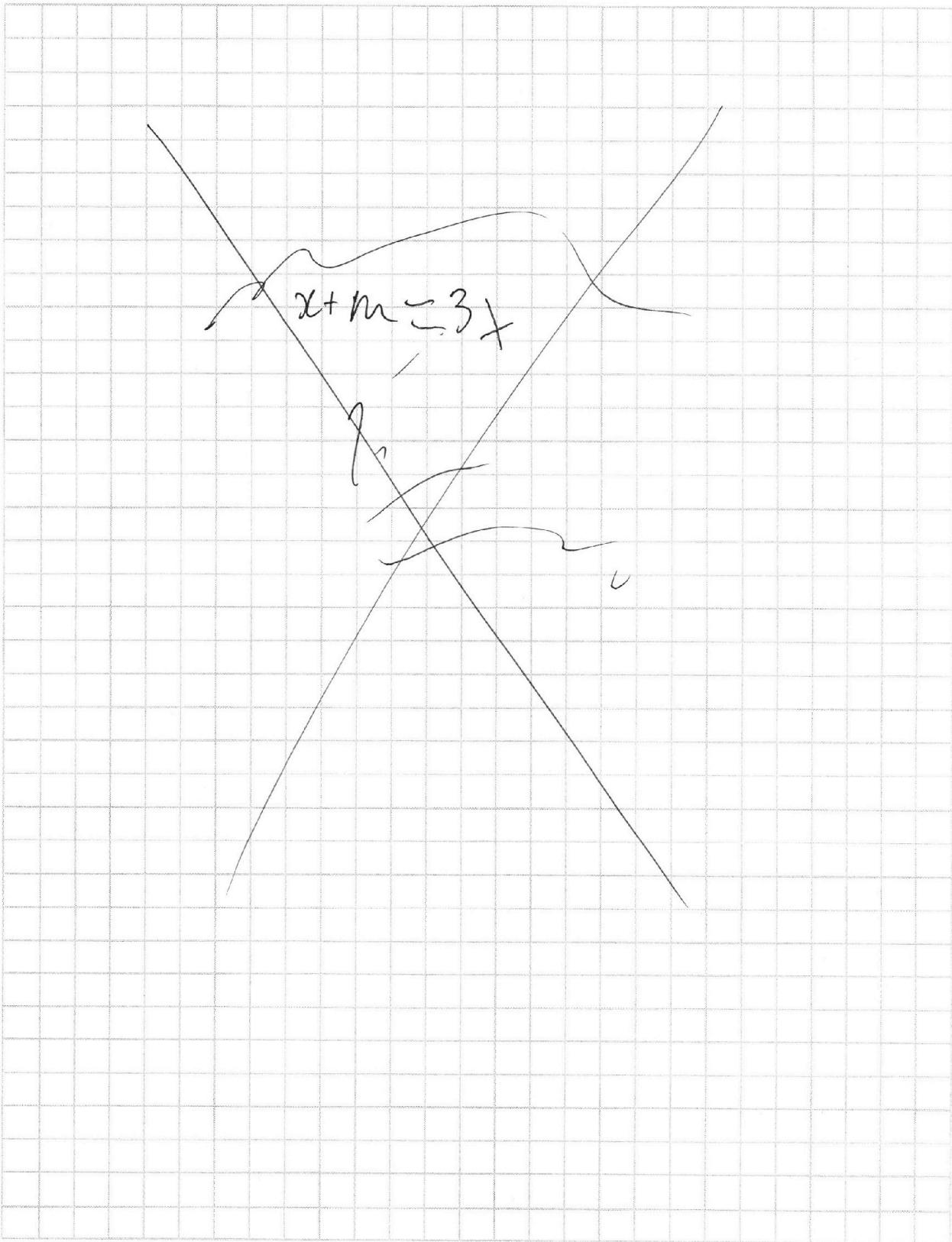


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



I-

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

I-**I-**