



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = -6y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 20 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 10$, $BE = 9$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть девять коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$ являются пятым и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| + \left|y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| \leq 8$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle CBA = 46^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1. \begin{cases} xy = -62 + z^2 \\ yz = -6x + x^2 \\ zx = -6y + y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{z^2 - 62}{y} \\ yz = \frac{-62z + 36z}{y} \cdot \left(\frac{z^2 - 62}{y} \right) \Rightarrow y = \frac{36 - 62}{y} + \frac{z^3 - 12z^2 + 36z}{y^2} \\ z^3 - 62z^2 = -6y + y^2 \Rightarrow z^3 - 62z^2 = y^2 - 6y^2 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow yz = \frac{36 - 62}{y} + \frac{z^3 - 12z^2 + 36z}{y^2} \Rightarrow y = \frac{36 - 62}{y} + \frac{z^3 - 12z^2 + 36z}{y^2}$$

$$\Rightarrow z^3 - 62z^2 = y^2 - 6y^2 \Rightarrow z^3 - y^3 = 6(z^2 - y^2) \Rightarrow$$

$$(z - y)(z^2 + zy + y^2) = 6(z - y)(z + y) \Rightarrow (z - y)(z^2 + zy + y^2 - 6z - 6y) = 0 \Rightarrow$$

$$(z - y) \left(\frac{z^2 - 62}{xy} + \frac{y^2 - 6y}{x^2} + \frac{2x}{y} \right) = 0 \Rightarrow (z - y)(xy + yz + zx) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} z = y \Rightarrow x = \frac{z^2 - 62}{z} = \frac{y^2 - 62}{y} = y - \frac{62}{y} \\ xy + yz + zx = 0 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + (xy + z)^2 = x^2y^2 + z^2 - 2(xy + xz + yz) \Rightarrow$$

$$(xy + z)^2 = x^2y^2 + z^2, \text{ все слагаемые упрощаются}$$

$$6(xy + z)$$

$$xy + yz + zx = x^2y^2 + z^2 - 6(xy + z) \Rightarrow x^2y^2 + z^2 = 6(xy + z) \Rightarrow (xy + z)^2 = 6(xy + z) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (xy + z) = 0 \Rightarrow (x - 6)^2 + (y - 6)^2 + (z - 6)^2 = x^2y^2 + z^2 - 6(xy + z) + 108 = 108 \text{ и } x^2y^2 + z^2 = 0 \\ (xy + z) = 6 \Rightarrow x^2y^2 + z^2 - 6(xy + z) + 108 = (xy + z)^2 - 6(xy + z) + 108 = 108 \Rightarrow \end{cases}$$

$$36 + 12 \cdot 6 + 108 = 108 - 72 = 36 \text{ Тогда}$$

$$\text{Ответ: } 108; 36$$

Orbital $\frac{18}{5}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4. Показатели вероятности когда достают 5 коробок, вероятности $P = \frac{K_1}{K_2}$ где K_1 количество вариантов которые нам подходят, K_2 все варианты

Вотать 5 ящиков из n можно C_n^5 способами при этом остаются 5 ящиков с тремя ящиками можно считать как количество достаемых 2 коробки из $n-3 \Rightarrow C_{n-3}^2 \Rightarrow$ вероятность при 5 коробках $\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = P_1$

Показатели для вероятности используя ту же логику аналогично для всех вариантов C_n^5 , все варианты с коробками $C_{n-3}^6 \Rightarrow$

Вероятность при 3 коробках $\frac{C_{n-3}^6}{C_n^5} = P_2$

увеличение вероятности это $\frac{P_2}{P_1} = \frac{C_{n-3}^6}{C_n^5} \cdot \frac{C_n^5}{C_{n-3}^2} =$

$$= \frac{(n-3)!}{6! \cdot (n-9)!} \cdot \frac{n!}{3! \cdot (n-6)!} \cdot \frac{3! \cdot (n-9)!}{n!} \cdot \frac{n!}{1! \cdot (n-5)!} \cdot \frac{2! \cdot (n-5)!}{(n-3)!} = \frac{9! \cdot 2!}{6! \cdot 5!}$$

$$= \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{42}{5} \quad \text{Answer: } \frac{42}{5}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

г.

$$x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0 \quad \text{По условию } a) \begin{cases} y_1 = a_1 + 5d \\ y_2 = a_1 + 6d \end{cases}$$

По теореме Виета

$$y_1 + y_2 = a^2 - 4a, \quad y_1 \text{ и } y_2 \text{ корни}$$

$$x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0 \quad \text{По условию } b) \begin{cases} x_1 = a_1 + 4d \\ x_2 = a_1 + 7d \end{cases}$$

По теореме Виета

$$x_1 + x_2 = \frac{a^3 - 4a^2}{5}, \quad \text{Заметим, что } x_1 + x_2 = y_1 + y_2 \quad \text{или } a^3 - 4a^2 = 5a^2 - 10a$$

$$\frac{a^3 - 4a^2}{5} = a^2 - 2a \Rightarrow a^3 - 4a^2 = 5a^2 - 10a \Rightarrow a^3 - 9a^2 + 10a = 0 \Rightarrow a(a^2 - 9a + 10) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 4 \\ a = 1 \end{cases} \quad \text{Получим } y = \frac{y_2 + x_1}{2}$$

Проверим эти значения и убедимся, что существуют корни при них

$$x^2 - 4 = 0 \quad \text{При } a = 0 \Rightarrow x^2 = -4, \quad \text{Нет корней в действительных числах}$$

$$\begin{cases} \text{При } a = 5 \\ x^2 - 5x + 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{23}}{2} \\ x^2 - 17x + 59 = 0 \Rightarrow y_1 = \frac{5 - \sqrt{23}}{2}, y_2 = \frac{5 + \sqrt{23}}{2} \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{23}}{2}, x_2 = \frac{5 + \sqrt{23}}{2} \quad y_1 = \frac{y_2 + x_1}{2} = 5$$

$$5 - \sqrt{23} = \frac{10 - 2\sqrt{23}}{2} = 5 - \sqrt{23} \quad \text{равенство выполняется} \Rightarrow a = 5 \text{ подходит}$$

$$\begin{cases} a = 4 \\ x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2 \\ 5x^2 - 16x = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{\frac{16}{5}}, x_2 = \sqrt{\frac{16}{5}} \end{cases}$$

$$2y_1 = y_2 + x_1 \Rightarrow -4 = 2 - \sqrt{\frac{16}{5}} \Rightarrow \sqrt{\frac{16}{5}} = 6$$

равенство не выполняется $\Rightarrow a = 4$ не подходит

Ответ: $a = 5$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

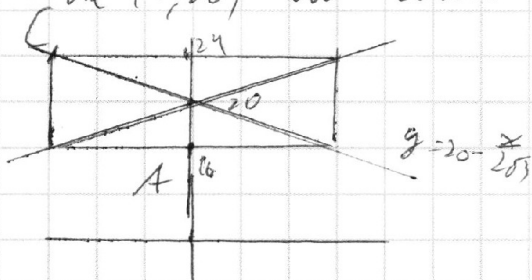
СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6. $|y-20 + \frac{x}{20}| + |y-20 - \frac{x}{20}| \leq 8$ В начале работы это

это прямоугольник с центом (пересеч диагоналей) пересечении 20

точка (0,20) его высота равна 8, ширина его



когда фигуру повернут то получится
полн описан окружности и
иметь её площадь $\Rightarrow$ как надо

полн описан окружности от начала координат точки и
самую большую, самое большое это точка A её длина
16=8 а самая большая ~~это~~ C её длину можно посчитать

поиск её x составляющую т.к y мы уже знаем она равна 24 $\Rightarrow$
 $y=24$

~~$y=20 + \frac{x}{20}$~~ $y=20 + \frac{x}{20} \Rightarrow y=24 \Rightarrow x=800 \Rightarrow$ длина будет

$\sqrt{y^2 + x^2} = \sqrt{24^2 + 16^2} = \sqrt{576 + 256} = \sqrt{832} = 28.84 \Rightarrow$ можно так получить

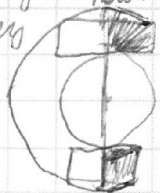
полн фигуру

и надо найти площадь поворота фигуры
пол фигуру она равна



$\frac{\pi R^2 - \pi r^2}{2} = \frac{\pi}{2} (R^2 - r^2) =$
 $\frac{\pi}{2} \cdot (400 - 256) = 125.6$

и если надо прибавить площадь
поверхности ~~поверхности~~
т.к мы получили
полн фигуру



Ответ: 125.6

5 длина этой фигуры будет равна

22 5 радиусом + 15 диаметр -

=



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

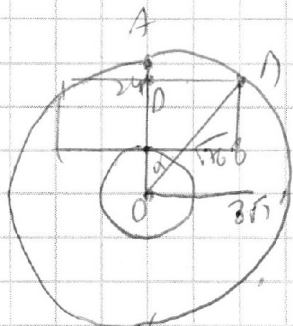
6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Площадь сектора



$$\sin \alpha = \frac{8\sqrt{3}}{8\sqrt{6}} \Rightarrow \alpha = \arcsin \frac{8\sqrt{3}}{8\sqrt{6}} = 1$$

$$S_{\text{сектора } AOB} = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot \pi R^2$$

$$S_{\triangle AOB} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 8\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3} = 2$$

$$S_{AOB} = \frac{\arcsin \frac{8\sqrt{3}}{8\sqrt{6}}}{2\pi} \cdot \pi \cdot 8\sqrt{6} - 24\sqrt{3}$$

$$\text{Площадь } 2S_{AOB} = \frac{\arcsin \frac{8\sqrt{3}}{8\sqrt{6}}}{\pi} \cdot \pi \cdot 8\sqrt{6} - 24\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$$

$$\frac{5}{36} \cdot 8\sqrt{6} - 24\sqrt{3} = \frac{128}{6} - 24\sqrt{3} = 2$$

С всей фигурой в атласе

$$\frac{512\sqrt{3}}{2} + 128\sqrt{3} + \frac{128}{6} - 24\sqrt{3} =$$

$$\frac{512\sqrt{3}}{2} + 128\sqrt{3} + 64 - 86\sqrt{3} =$$

$$\text{Ответ: } \frac{512\sqrt{3}}{2} + 64 + 32\sqrt{3}$$

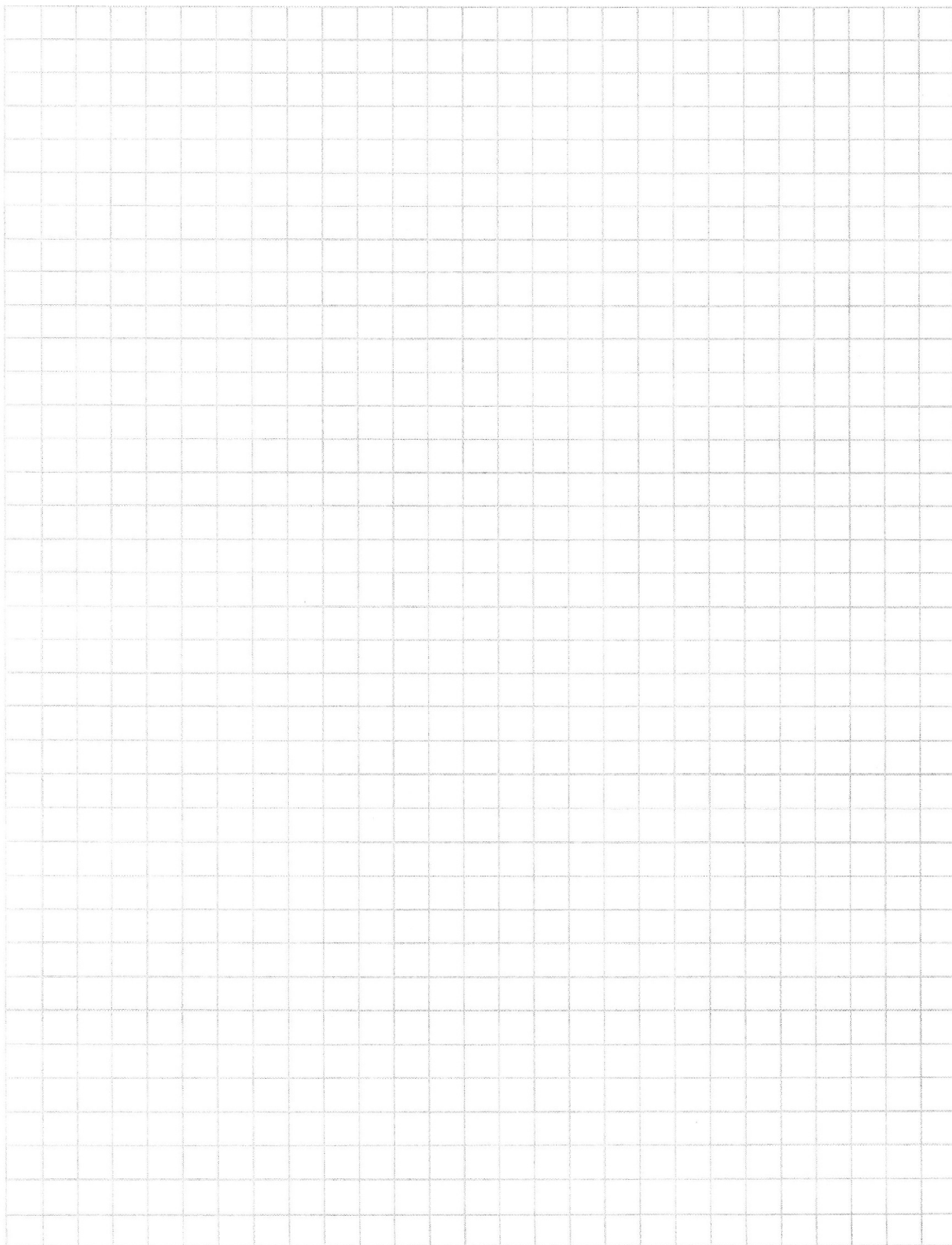


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





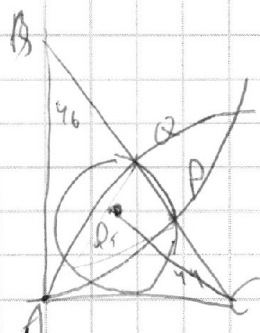
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

☐☐☐☐☐☐☐

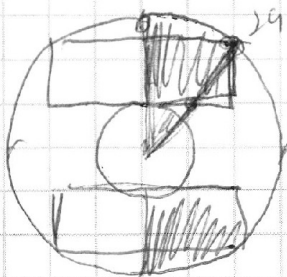
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5x^2 - 128 - 24 - 15 = 0$$
$$\begin{array}{r} 10 \\ 30 \\ -48 \\ \hline 44 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 16 \\ 8 \\ \hline 128 \end{array}$$



$$8 - 16\sqrt{5}$$
$$128\sqrt{5} +$$

$$\begin{array}{r} 268 \overline{) 1126} \\ -16 \\ \hline 128 \end{array}$$

$$388 \dots 439$$

$$\begin{array}{r} 303 \\ 309 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23384 \\ 89881 \\ 89881 \\ \hline 23384 \\ 4 \\ \hline 6391 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 698 \\ 384 \\ 449 \\ 449 \\ \hline 349 \\ 349 \\ \hline 349 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 468 \overline{) 1256} \\ -6 \\ \hline 16 \\ -16 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 268 \overline{) 1126} \\ -72 \\ \hline 48 \\ 24 \\ \hline 96 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1128 \\ 128 \\ \hline 36 \\ 32 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x^2 - 5x + 20 \\ x^2 - 5x - 53 \end{pmatrix}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5.

$$x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 9 = 0$$

Пусть y_1 и y_2 корни уравнения тогда по условию,
 а по Т. Виета

$$y_1 + y_2 = a^2 - 4a$$

$$5x^2 - (a^2 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a + 9 = 0$$

Пусть x_1 и x_2 корни уравнения тогда по условию
 по Т. Виета

$$x_1 + x_2 = \frac{a^2 - 4a^2}{5}, \text{ найдем что } a_1 + 5d + a_1 + 6d = a_1 + 4d + a_1 + 6d \Rightarrow$$

$$x_1 + x_2 = y_1 + y_2 \Rightarrow a^2 - 4a = \frac{a^2 - 4a^2}{5} \Rightarrow a^2 - 5a^2 + 4a = 0 \Rightarrow$$

$$a(a^2 - 5a + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \\ a = 4 \end{cases} \text{ (корни уравнения)} \text{ Подставим эти } a$$

а проверим проверять надо т.к. это могут уравнение может получится не только отрицательных последовательности

При $a = 0$

$$x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4 \text{ у этого уравнения нет корней в действительных числах}$$

$a \neq 0$ не подходит

При $a = 1$

$$x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$5x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$x_1 + x_2 = \frac{a^2 - 4a^2}{5} \Rightarrow$$

$$a^2 - 4a^2 = 5a^2 - 20a$$

$$a^2 - 9a^2 + 20a = 0$$

$a = 0$

$$a^2 - 9a + 20 = 0$$

$a = 1$

$a = 4$

$$5x^2 - 1 \quad 5x^2 - 128 - 24 - 15$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$5x^2 - 128 - 24 - 15 = 0$$

$$x^2 = \frac{167}{2} = 83.5$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5.

$$x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$$

$$8x^2 - (a^2 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 1 = 0$$

$$y_1 + y_2 = x_1 + x_2$$

$$y_1 y_2 = a^2 - 4a$$

$$x_1 + x_2 = a^2 - 4a^2$$

$$x^2 + 4 = 0$$

$$18x^2 - 15 = 0$$

$$a^2 - 4a = a^2 - 4a^2$$

$$a^3 - 4a^2 + 4a = 0 \quad a(a^2 - 4a + 4) = 0$$

$$5x^2 - 128 - 24 - 15 = 0$$

$$5x^2 = 167$$

$$\begin{cases} x^2 + 11x - 6 + 4 = 0 \\ 5x^2 + 11x - 2 - 6 - 15 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + 11x - 1 = 0$$

$$18x^2 + 11x - 21 = 0$$

$$|y - x| + |y + x| = 4$$

$$y - x + y + x = 4$$

$$2y = 4$$

$$y - x - y - x = 4$$

$$-2x = \frac{x}{205} + 10$$

$$y - 20 \geq \frac{x}{205} \quad x \geq -\frac{x}{205} + 10$$

$$y - 20 \leq \frac{x}{205}$$

$$|y - 20 + \frac{x}{205}| + |y - 20 - \frac{x}{205}| \leq 8$$

$$y - 40 \geq 8$$

$$2y \geq 48 \quad y \geq 24$$

$$\frac{2x}{205} \leq 8$$

$$\frac{x}{205} \leq 4$$

$$y_1 = a_1 + 16d \quad y_2 = a_1 + 16d$$

$$x_1 = a_1 + 4d$$

$$x_2 = a_1 + 4d$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ a = 4 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$x^2 = 4$$

$$18x^2 - 128 - 24 - 15 = 0$$

$$\frac{5-1}{2} = 2$$

$$\begin{array}{r} 128 \\ 24 \\ 152 \\ 128 \\ 24 \\ 152 \\ 152 \\ 167 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 167 \\ 167 \\ 167 \\ 167 \end{array}$$

$$5 + 4$$

$$3 + 7$$

$$|y - x| + |y + x| = 4$$

$$y \geq x$$

$$x - y + y + x = 2$$

