



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [4 балла] Ненулевые числа  $x, y, z$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = -6y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения  $(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2$ , если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа  $n$  состоит из 20 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа  $n^3$ ?
3. [5 баллов] Окружность  $\omega$  с диаметром  $AB$  пересекает сторону  $BC$  остроугольного треугольника  $ABC$  в точке  $D$ . Точка  $F$  выбрана на отрезке  $AC$  так, что  $DF \perp AC$ , а  $E$  — точка пересечения отрезка  $DF$  с окружностью  $\omega$ , отличная от  $D$ . Найдите  $AF$ , если  $AC = 20$ ,  $AB = 10$ ,  $BE = 9$ .
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарик. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть девять коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых корни уравнения  $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$  являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения  $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$  являются пятым и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура  $\Phi$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют неравенству  $\left|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| + \left|y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| \leq 8$ . Фигуру  $\Phi$  непрерывно повернули вокруг начала координат на угол  $\pi$  против часовой стрелки. Найдите площадь множества  $M$ , которое замела фигура  $\Phi$  при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе  $BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  выбраны точки  $P$  и  $Q$  так, что  $AB = BP$ ,  $AC = CQ$ . Внутри треугольника  $ABC$  выбрана точка  $D$ , для которой  $DP = DQ$ , а  $\angle PDQ = 90^\circ$ . Найдите  $\angle DCB$ , если известно, что  $\angle CBA = 46^\circ$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow x = \frac{380}{100} = 3,8$$

Страница 2 из 2

Ответ:  $AF = 3,8$

Дано:

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2 \Leftrightarrow (I) \\ yz = -6x + x^2 \Leftrightarrow (II) \\ zx = -6y + y^2 \Leftrightarrow (III) \end{cases} \quad \begin{array}{l} 1) \text{ Перемножим } (I) \text{ и } (III): \\ yz \cdot zx = x(x-6) \cdot y(y-6) \\ \text{т.к. } x, y, z \neq 0 \text{ (т.е.} \end{array}$$

мы рассматриваем тройку ненулевых  $(x, y, z)$ ,  
то на  $xy$  сократим и получим:

$$z^2 = xy - 6x - 6y + 36$$

$$\text{Из } (I): z^2 = xy + 6z \Rightarrow xy + 6z = xy - 6x - 6y + 36 \\ \Rightarrow \underline{x + y + z = 6}$$

Подставим вместо  $-6 = -(x+y+z)$  в  $(I)$ :

$$xy = -(x+y+z)z - z^2 = -zx - zy \Rightarrow \underline{xy + zx + zy = 0}$$

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = (6-x)^2 + (6-y)^2 + (6-z)^2 =$$

$$= (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 +$$

$$+ 2(xy + yz + xz); \quad 2(xy + yz + xz) = 0,$$

$$2(x^2 + y^2 + z^2) = 2(yz + 6x + xz + 6y + xy + 6z) =$$

$$= 2 \cdot 6(x+y+z) = 6 \cdot 6 \cdot 2 = 72.$$

Ответ: 72.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\underbrace{9 \dots 9}_{20001} = \underbrace{10 \dots 0}_{20001+1} - 1 \Rightarrow 9 \dots 9^3 = (10 \dots 0 - 1)^3$$

$$\begin{aligned} (x-y)^3 &= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = \\ &= \underbrace{(10 \dots 0)^3}_{20001} \textcircled{1} - 3 \cdot \underbrace{10 \dots 0^2}_{20001} \textcircled{2} + 3 \cdot \underbrace{10 \dots 0}_{20001} \textcircled{3} - 1 \end{aligned}$$

① действие:  $\underbrace{10 \dots 0}_{20001}^3 = \underbrace{10 \dots 0}_{60003}$

$$3 \cdot \underbrace{10 \dots 0}_{20001}^2 = \underbrace{30 \dots 0}_{40002} \Rightarrow \underbrace{10 \dots 0}_{60003} - \underbrace{3 \cdot 10 \dots 0}_{40002} =$$

$$= \underbrace{9 \dots 9}_{19999} \underbrace{70 \dots 0}_1 \underbrace{40002}$$

② действие:  $9 \dots 970 \dots 0 + 3 \cdot \underbrace{10 \dots 0}_{20001} =$

$$= \underbrace{9 \dots 9}_{19999} \underbrace{70 \dots 0}_1 \underbrace{30 \dots 0}_{20001} \underbrace{40002}_{20001}$$

③ действие:  $9 \dots 970 \dots 030 \dots 0 - 1 =$

$$= \underbrace{9 \dots 9}_{19999} \underbrace{70 \dots 0}_1 \underbrace{29 \dots 9}_{200001} \underbrace{40002}_{20001} \Rightarrow \text{всего } 9 : 20001 +$$

$$+ 19999 = 40000$$

60002  
Ответ: 40000.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



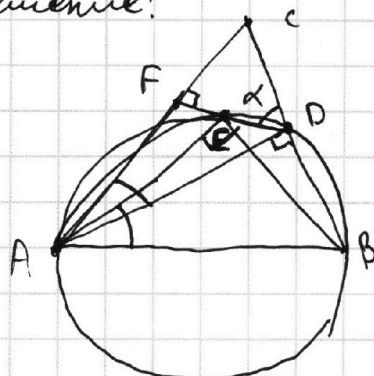
Дано:

$$AC = 20, AB = 10,$$

$$BE = 9.$$

Найти:  $AF = ?$

Решение:



Страница 1 из 2

1) Т.к.  $AB$ -диаметр, то  $\angle AEB = \angle ADB = 90^\circ$ .

2) Пусть  $\angle FDC = \alpha \Rightarrow$  по св-ву вписанного четырехугольника  $\angle EAB = \alpha$ ,  $\angle FCD = 90 - \angle FDC = 90 - \alpha$

$\Rightarrow$  из  $\triangle ADC$ :  $\angle CAD = 180 - 90 - 90 + \alpha = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle EAB \sim \triangle FAD \sim \triangle FDC$  (по  $90^\circ$  углу и углу  $\alpha$ )  $\Rightarrow$  Пусть  $AF = x \Rightarrow FC = 20 - x$ :

$$1) \frac{FC}{BE} = \frac{FD}{AE}$$

$$2) \frac{AF}{AE} = \frac{FD}{BE}$$

3) По т. Пифагора  $\triangle ABE$ :  $AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{100 - 81} = \sqrt{19}$ . Подставим значения:

$$\begin{cases} \frac{20-x}{9} = \frac{FD}{\sqrt{19}} \\ \frac{x}{\sqrt{19}} = \frac{FD}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(20-x)\sqrt{19}}{9} = FD \\ \frac{9x}{\sqrt{19}} = FD \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(20-x)}{9} \cdot \sqrt{19} = \frac{9x}{\sqrt{19}} \Rightarrow (20-x) \cdot 19 = 81x \Rightarrow 380 = 100x$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  
☐

2  
☐

3  
☒

4  
☐

5  
☐

6  
☐

7  
☐

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow x = \frac{380}{100} = 3,8$$

Ответ:  $AF = 3,8$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $P_1$  - вероятность выигрыша у игрока, когда он выбирает 5 коробок. Тогда  $P_1 = \frac{P_{\text{выб1}}}{P_{\text{все1}}}$  где  $P_{\text{выб1}}$  - кол-во комбинаций (выигрышных), а  $P_{\text{все1}}$  - кол-во комбинаций выбрать 5 коробок. Пусть было  $x$  коробок, тогда чтобы узнать  $P_{\text{выб1}}$ , достаточно выбрать 2 коробки из оставшихся  $x-3$ , т.к. мы уже имели 3 коробки с шариками  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow P_{\text{выб1}} = C_{x-3}^2 = \frac{(x-3)!}{(x-5)! \cdot 2!}$$

$$P_{\text{все1}} = C_x^5 = \frac{x!}{(x-5)! \cdot 5!} \Rightarrow P_1 = \frac{(x-3)!}{(x-5)! \cdot 2!} \cdot \frac{(x-5)! \cdot 5!}{x!} = \frac{(x-3)!}{x!} \cdot \frac{5!}{2!}$$

Пусть  $P_2$  - вероятность выигрыша при выборе 9 коробок, тогда  $P_2 = \frac{P_{\text{выб2}}}{P_{\text{все2}}}$ . Аналогично,  $P_{\text{выб2}}$  находим, уже имея 3 коробки, т.е.

$$P_{\text{выб2}} = C_{x-3}^6 = \frac{(x-3)!}{(x-9)! \cdot 6!}, P_{\text{все2}} = \frac{x!}{(x-9)! \cdot 9!} = C_x^9$$

$$\Rightarrow P_2 = \frac{(x-3)!}{(x-9)! \cdot 6!} \cdot \frac{(x-9)! \cdot 9!}{x!} = \frac{(x-3)!}{x!} \cdot \frac{9!}{6!}$$

Сформулируем вопрос задачи:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} C_{x-3}^6 &= \frac{(x-3)!}{(x-9)! \cdot 6!}, \quad C_x^9 = \frac{x!}{(x-9)! \cdot 9!} \Rightarrow \\ \Rightarrow P_2 &= \frac{(x-3)!}{(x-9)! \cdot 6!} \cdot \frac{(x-9)! \cdot 9!}{x!} = \frac{(x-3)!}{x!} \cdot \frac{9!}{6!} \\ \text{нужно найти } \frac{P_2}{P_1} &= \frac{(x-3)!}{x!} \cdot \frac{9!}{6!} \cdot \frac{x!}{(x-3)!} \cdot \frac{2!}{5!} \\ &= \frac{9!}{6!} \cdot \frac{2!}{5!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{42}{5} = 8,4 \\ \text{Ответ: } \frac{P_2}{P_1} &= 8,4. \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть первый член ариф. прогрессии равен  $b$ , а разность равна  $d$ , тогда если  $x_1$  и  $x_2$  - корни первого уравнения, а  $x_3$  и  $x_4$  - корни второго уравнения, то верны равенства:

$$x_1 = b + 5d$$

$$x_3 = b + 4d$$

$$x_2 = b + 6d$$

$$x_4 = b + 7d$$

По т. Виета:

$$x_1 + x_2 = \frac{a^2 - 4a}{5} \quad - \text{из I ур-я.}$$

$$x_3 + x_4 = \frac{a^3 - 4a^2}{5} \quad - \text{из II ур-я.}$$

Подставим вместо  $x_i$  соответствующее ему значение ариф. прогрессии:

$$x_1 + x_2 = b + 5d + b + 6d = 2b + 11d$$

$$x_3 + x_4 = b + 4d + b + 7d = 2b + 11d \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = x_3 + x_4 \Rightarrow \frac{a^2 - 4a}{5} = \frac{a^3 - 4a^2}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5a^2 - 20a = a^3 - 4a^2, \quad a^3 - 9a^2 + 20a = 0$$

Предположим, что  $a = 0$ , тогда ур-я принимают следующий вид:





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x^2 + 4 = 0$  и  $5k^2 - 15$ , при этом первое ур-е не имеет решений в действительных числах  $\Rightarrow a \neq 0$ , тогда сократим на  $a$  и получим квадратное уравнение:

$$a^2 - 9a + 20 = 0$$

$$D = 81 - 80 = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{9+1}{2} = 5$$

$$a_2 = \frac{9-1}{2} = 4$$

Осталось проверить, какие  $a$  подходят из  $\{5; 4\}$ , т.е. при подстановке вместо  $a$  числа корни будут являться членами ариф. прогрессии.

$$1) a = 5 \Rightarrow \textcircled{I} x^2 - (25 - 20)x + 25 - 30 + 4 = \\ = x^2 - 5x - 1$$

$$2) \textcircled{II} 5k^2 - (125 - 100)k - 2 \cdot 125 - 6 \cdot 5 + 15 = 0$$

$$\Rightarrow \text{сократим на } 5: x^2 - 5x - 50 - 6 - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \textcircled{I} x^2 - 5x - 1 = 0; D_1 = 25 + 4 = 29$$

$$\textcircled{II} x^2 - 5x - 59 = 0; D_2 = 25 + 236 = 261 = \\ = 9 \cdot 29$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{29}}{2}$$

$$x_2 = \frac{5 + \sqrt{29}}{2}$$

$$x_3 = \frac{5 - 3\sqrt{29}}{2}$$

$$x_4 = \frac{5 + 3\sqrt{29}}{2}$$

$\Rightarrow$  расставим в порядке:

5-й:  $x_3 = \frac{5 - 3\sqrt{29}}{2}$

6-й:  $x_1 = \frac{5 - \sqrt{29}}{2}$

7-й:  $x_2 = \frac{5 + \sqrt{29}}{2}$

8-й:  $x_4 = \frac{5 + 3\sqrt{29}}{2}$

И действительно, это

ариф. прогрессия

с  $b = \frac{5}{2}$  и  $d = \sqrt{29}$

2)  $a = 4 \Rightarrow$  ур-я принимает следующий вид:

①  $x^2 - (16 - 16)x + 16 - 24 + 4 = 0$

②  $5x^2 - (64 - 64)x - 2 \cdot 64 - 24 - 15 = 0$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$  ①  $x^2 - 4 = 0$   $x_1 = -2$ ;  $x_2 = 2$

②  $5x^2 - 167 = 0$ , ~~167~~

$$x_3 = -\sqrt{\frac{167}{5}}$$

$$x_4 = \sqrt{\frac{167}{5}}$$

$\Rightarrow$  выпишем в нужном порядке:

5-й:  $-\sqrt{\frac{167}{5}}$

6-й:  $-2$

7-й:  $2$

8-й:  $\sqrt{\frac{167}{5}}$

— но это не является ариф. прогрессией  $\Rightarrow$  Ответ:  $a = 5$ , иначе либо т. Виета не работает, либо  $a = 4$  не подходит.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☐

5  
☐

6  
☐

7  
☒

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано:

$\triangle ABC$  - прямоугол.

$\angle BAC = 90^\circ$

$\angle ABC = 46^\circ$

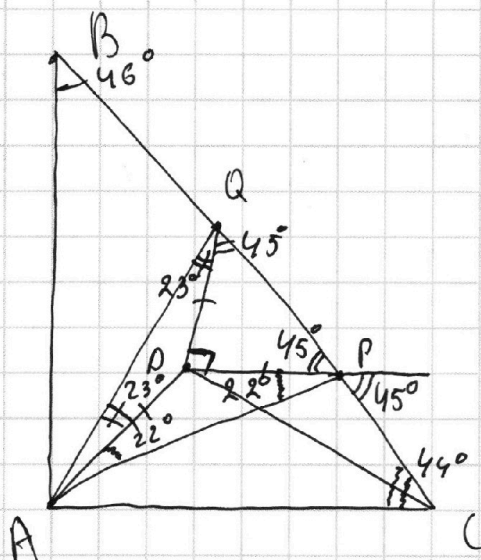
$P, Q \in BC$  т.е.

$AB = BP, AC = QC$

$\angle PDQ = 90^\circ, PD = DQ$

Найти:

$\angle DCP$  - ?



Решение:

1)  $\angle ACB = 90 - \angle ABC = 44^\circ$

2) т.к.  $AB = BP$  и  $AC = CQ$ , то  $\triangle ABP$  и  $\triangle ACQ$  -  
 равнобе.  $\Rightarrow \angle APB = \frac{180 - 46}{2} = 67^\circ, \angle AQC = \frac{180 - 44}{2} =$   
 $= 68^\circ \Rightarrow \angle QAP = 180 - \angle AQP - \angle APQ = 180 - 68 - 67 =$   
 $= 45^\circ$

3) т.к.  $\angle QDP = 2 \cdot \angle QAP$  и  $PD = DQ$ , то D - центр  
 окруж., описанной около  $\triangle QAP \Rightarrow DA = PD = DQ$

4) т.к.  $\triangle QDP$  - равнобе., то  $\angle DPQ = \angle DQP = \frac{180 - 90}{2} =$   
 $= 45^\circ \Rightarrow \angle DQA = 68 - 45 = 23^\circ = \angle DAQ$  (т.к.  $DA = DQ$ ,  
 то  $\triangle DQA$  - равнобе.),  $\angle DPA = \angle DAP = 67 - 45 = 22^\circ$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5)  $\angle APQ$  - внешний угол для  $\triangle APC \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle CAP = \angle APQ - \angle ACB = 45 + 22 - 44 = 23^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle DAC = \angle DAP + \angle CAP = 23^\circ + 22^\circ = 45^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{т.к. } \angle DPC = 180 - \angle DPQ = 180 - 45 = 135^\circ,$$

и  $\angle DPC + \angle DAC = 180^\circ$ , то  $APDC$  - вписанный

$$\Rightarrow \angle DCB = \angle DAP = 22^\circ = \angle DCP$$

Ответ:  $\angle DAP = \underline{22^\circ} = \angle DCB$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $P_1$  - вероятность выиграть, когда игрок выбирает 5 коробок.  $P_1 = \frac{P_{\text{поб1}}}{P_{\text{все1}}}$   
 где  $P_{\text{поб1}}$  - кол-во победных вариантов,  
 а  $P_{\text{все1}}$  - все варианты. Пусть коробок было  $x$  штук, тогда чтобы выиграть, игроку надо вытянуть 3 с шариками и ещё любых 2, т.е.  $P_{\text{поб1}}$  зависит от 2 коробок (шариков), и кол-во  $P_{\text{поб1}} = C_x^2$ .  
 $P_{\text{все1}}$  - это все варианты выбрать 5 коробок, т.е.  $C_x^5 = P_{\text{все1}} \Rightarrow P_1 = C_x^2 \cdot \frac{1}{C_x^5}$   
 $C_x^5 = \frac{x!}{(x-5)! \cdot 5!}$ ;  $C_x^2 = \frac{x!}{(x-2)! \cdot 2!} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow P_1 = \frac{(x-5)! \cdot 5!}{(x-2)! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{(x-2)(x-3)(x-4)}$   
 Аналогично, пусть  $P_2$  - вероятность при выборе 9 коробок,  $P_2 = \frac{P_{\text{поб2}}}{P_{\text{все2}}}$ ,  $P_{\text{поб2}} = C_x^6$ ,  
 $P_{\text{все2}} = C_x^9 \Rightarrow P_2 = C_x^6 \cdot \frac{1}{C_x^9}$   
 $C_x^9 = \frac{x!}{(x-9)! \cdot 9!}$ ;  $C_x^6 = \frac{x!}{(x-6)! \cdot 6!} \Rightarrow P_2 = \frac{(x-9)! \cdot 9!}{(x-6)! \cdot 6!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{(x-6)(x-7)(x-8)}$ . Вопрос сформулируется так:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $P_1$  - вероятность выиграть у игрока, когда он выбирает 5 коробок. Тогда  $P_1 = \frac{P_{\text{под1}}}{P_{\text{все1}}}$  где  $P_{\text{под1}}$  - ~~вероятность выиграть~~ <sup>вероятность выиграть</sup>, а  $P_{\text{все1}}$  - ~~вероятность всех выборов~~ <sup>вероятность всех выборов</sup>, т.е. кол-во комбинаций из 5 коробок

Пусть  $x$  - кол-во коробок, тогда чтобы узнать  $P_{\text{под1}}$ , нужно уже имея 3 коробки с шарами выбрать еще 2 коробки, т.е.  $C_{x-3}^2$ , а  $P_{\text{все1}} = C_x^5 \Rightarrow P_1 = C_{x-3}^2 \cdot \frac{1}{C_x^5}$

$$C_{x-3}^2 = \frac{(x-3)!}{(x-5)! \cdot 2!}; \quad C_x^5 = \frac{x!}{(x-5)! \cdot 5!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_1 = \frac{(x-3)!}{(x-5)! \cdot 2!} \cdot \frac{(x-5)! \cdot 5!}{x! \cdot 5!} = \frac{(x-3)!}{x!} \cdot \frac{5!}{2!}$$

Аналогично, пусть  $P_2$  - вероятность выиграть у игрока при выборе 9 коробок, тогда  $P_2 = \frac{P_{\text{под2}}}{P_{\text{все2}}}$ ,  $P_{\text{под2}} = C_{x-3}^6$  - уже есть 3 коробки, а значит нужно еще 6  $\Rightarrow C_{x-3}^6 = P_{\text{под2}}$ ,  $P_{\text{все2}} = C_x^9 \Rightarrow$

$$\Rightarrow P_2 = C_{x-3}^6 \cdot \frac{1}{C_x^9}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Нужно найти  $\frac{P_2}{P_1}$ , т.е.  $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{(x-6)(x-7)(x-8)} \cdot \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{5 \cdot 4 \cdot 3}$

~~при~~ Мы получим зависимость

$\frac{P_1}{P_2}$  от  $x$ , а значит надо найти к чему стремятся  $\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(x-6)(x-7)(x-8)}$  при  $x \rightarrow \infty$

к очень большому числу, т.е. при  $x \rightarrow \infty$   
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(x-6)(x-7)(x-8)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3(1-\frac{2}{x})(1-\frac{3}{x})(1-\frac{4}{x})}{x^3(1-\frac{6}{x})(1-\frac{7}{x})(1-\frac{8}{x})} = 1$   
 т.к.  $\lim_{x \rightarrow \infty} a \cdot \frac{1}{x} = 0$ , где  $a$  - постоянная

$\Rightarrow \frac{P_1}{P_2}$  изменится в 8,4 раза

$$P_{\text{под1}} = C_{x-3}^2 = \frac{(x-3)!}{(x-5)! \cdot 2!}$$

$$P_{\text{под2}} = C_{x-3}^6 = \frac{(x-3)!}{(x-9)! \cdot 6!}$$

$$P_1 = \frac{P_{\text{под1}}}{P_{\text{все}}} = \frac{C_{x-3}^2}{C_x^5} = \frac{(x-3)!}{(x-5)! \cdot 2!} \cdot \frac{x!}{x! \cdot 5!} = \frac{(x-3)!}{(x-5)! \cdot 2!} \cdot \frac{(x-5)!}{x! \cdot 5!}$$

$$P_2 = \frac{P_{\text{под2}}}{P_{\text{все2}}} = \frac{C_{x-3}^6}{C_x^9} = \frac{(x-3)!}{(x-9)! \cdot 6!} \cdot \frac{x!}{x! \cdot 9!} = \frac{(x-3)!}{(x-9)! \cdot 6!} \cdot \frac{(x-9)!}{x! \cdot 9!}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a^3 - 4a^2 = a^2 - 4a$$

$$a^3 - 3a^2 + 4a = 0$$

$$a^2 - 3a + 4 = 0$$

$$(a+4)(a-4)(a-1)$$

$$D =$$

2a

$$2b + 11d = a^2 - 4a$$

$$2b + 11d = a^3 - 4a^2$$

$$5a^2 - 20a = a^3 - 4a^2$$

$$a^3 - 9a^2 + 20a = 0$$

$$a^2 - 9a + 20 = 0$$

$$D = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{9+1}{2} = 5$$

$$a_2 = \frac{9-1}{2} = 4$$

$$1) a=5 \Rightarrow 1) x^2 - (25-20)x + 25-30+4 = 0$$

$$2) 5x^2 - (125-100)x - 2 \cdot 125 - 6 \cdot 5 + 15 = 0$$

$$1) x^2 - 5x - 1 = 0 \quad x^2 - 5x - 50 - 6 + 8 = 0 \quad / : 5$$

$$5x^2 - 25x$$

$$2) x^2 - 5x - 53 = 0 \quad \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{29} \quad \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{29}$$

$$D_1 = 25 + 4 = 29$$

$$D_2 = 25 + 212 = 237 = 237 \quad 3 - 79$$

$$\frac{5 + \sqrt{29}}{2} ; \frac{5 - \sqrt{29}}{2} ;$$

$$128 + 14 = 142$$

$$11 = 152 - 15 = 137$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cancel{a \cdot (2a^2 + 6) = -4(82 + 6) = -152}$$

$$\frac{5}{x-2} = \frac{9}{x-8}$$

$$+ 10 \xrightarrow{\text{выбор}} 5$$

$$24 \leq y \leq 24$$

$$2y - 40 \leq 8$$

$$40 - 2y \leq 8$$

$$y \leq 24$$

$$40$$

$$\frac{C_6^1}{C_9^1} = \frac{C_9^9}{C_x^x}$$

$$x! \cdot \frac{(x-5)! \cdot 5!}{(x-2)! \cdot 2!}^2$$

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$$

$$\frac{5! \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{(x-2)(x-3)(x-4)}}{(x-5)(x-6) \cdot 1 \cdot 5!} = \frac{(x-9)! \cdot 9!}{(x-6)! \cdot 6!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{(x-6)(x-7)(x-8)} = P_2$$

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{(x-2)(x-3)(x-4)} = P_1$$

$$\frac{9}{x-6} = 1 \cdot \frac{5}{x-2}$$

$$\frac{C_6^6}{C_9^9} = \frac{(x-9)! \cdot 9!}{(x-6)! \cdot 6!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{(x-6)(x-7)(x-8)} = P_2$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{6 \cdot 7}{5} = 8,4$$

$$\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(x-5)(x-6)(x-7)}$$

$$\frac{x-2}{x-5} = \frac{x-3}{x-6} = \frac{x-4}{x-7}$$

$$x^2 - 8x + 15$$

$$\frac{x-2}{x-5} = \frac{(x-5)+3}{x-5}$$

$$x=5$$

$$1 + \frac{3}{x-5}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Предположим, что  $x=0$  (не учитывая общности),  
тогда  $y z \neq 0$ , и не учитывая общности,  
пусть  $y \neq 0$~~

$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

$$\underbrace{9\dots9}_{20001} = \underbrace{10\dots0}_{20002} - 1$$

$$\underbrace{9\dots9}_{20001}^3 = (\underbrace{100\dots0}_{20002} - 1)^3 =$$

$$= \underbrace{10\dots0}_{20001 \cdot 3} - 3 \cdot \underbrace{10\dots0}_{20001 \cdot 2} + 3 \cdot \underbrace{10\dots0}_{20002} - 1 =$$

$$= \underbrace{10\dots0}_{20001 \cdot 3} - 3 \cdot 1$$

$$\underbrace{10\dots0}_{20001 \cdot 3} = 3 \cdot 1$$

$$\underbrace{10\dots0}_{20001 \cdot 3} = \underbrace{30\dots0}_{20001 \cdot 2} = 9\dots9$$

$$\underbrace{1000\dots0}_{20002} - \underbrace{40002}_{20002} = \underbrace{30\dots0}_{20002} - 1$$

$$9\dots97$$

$$\textcircled{1} \quad \underbrace{9\dots970\dots0}_{19999} + \underbrace{40002}_{1} = 60002$$

$$\textcircled{2} \quad 9\dots9 + 700 = 9\dots9700\dots0 + 3 \cdot \underbrace{10\dots0}_{20001} = 9\dots970\dots030\dots0$$

$$\textcircled{3} \quad \underbrace{9\dots9}_{19999} 70\dots03000\dots0 - 1 = 9\dots970\dots029\dots9$$

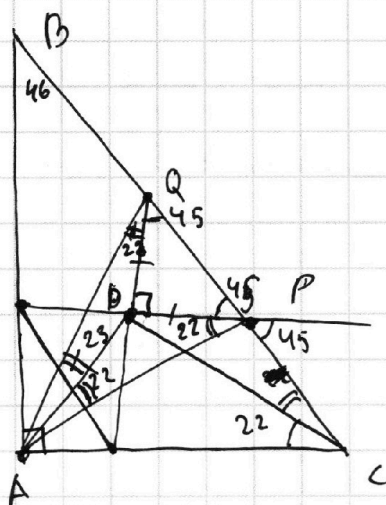


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
 \_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



X

$$\boxed{\frac{5}{X}}$$

— первый шаг.

$\frac{9}{X}$

$\frac{3}{9}$

$$\frac{9}{5} = 1.8$$

$$X^2 - (a^2 - 4a) \cdot X + (a^2 - 6a + 4) = 0$$

$$D = a^2(a^2 - 8a + 16) - 4a^2 + 24a - 16 =$$

$$= a^4 - 16a^3 + 16a^2 - 4a^2 + 24a - 16 = a^4 - 12a^3 + 16a^2 + 24a - 16$$

$$D_1 = a^4 - 12a^3 + 16a^2 + 24a - 16$$

$$a(a-4)^2 + (a-4)(a-1) - a =$$

$$a^4 - 8a^3 + 12a^2 + 24a - 16$$

$$D_1 = a^4 - 8a^3 + 12a^2 + 24a - 16$$

$$D_2 = (a^3 - 4a^2)^2 + 20(2a^3 + 6a + 15) =$$

$$= a^6 - 8a^4(a-4)^2 + 40a^3 + 120a + 300$$

$$K_1 + K_2 = a^2 - 4a$$

$$2a + 11d = a^2 - 4a$$

$$2a + 11d = a^3 - 4a^2$$

$$a + 5d = K_1$$

$$a + 6d = K_2$$

$$a + 7d = K_3$$

$$a + 8d =$$

$$a + 4d = K_3$$

$$a + 5d = K_4$$

$$a + 6d = K_2$$

$$a + 7d = K_3$$

$$K_1 = \frac{a^2 - 4a - 5D_1}{2}$$

$$K_2 = \frac{a^2 - 4a + 5D_1}{2}$$





