



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = -6y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x - 6)^2 + (y - 6)^2 + (z - 6)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 20 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 10$, $BE = 9$.
4. [4 балла] В теленгре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарику. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть девять коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$ являются пятым и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| + \left|y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| \leqslant 8$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle CBA = 46^\circ$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 & x, y, z \neq 0 \\
 & xyz = -12x + z^2 + x^2 \quad \text{cyc} \quad x^2 - 12x + 36 \quad ? \quad x = \frac{z^2 - 6x}{y} \\
 & y \cdot (x^2 - 6x) \geq 0 \\
 & z^2 - 6x - 2xy \geq 0 \\
 & x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) = 36 - 0 = 36 \\
 & -12(x+y+z) = -72 = -2 \cdot 36 \\
 & \text{cyc} \quad (x^2 - 12x + 36) = 36 - 2 \cdot 36 + 3 \cdot 36 = 2 \cdot 36 = 72 \\
 & \text{Ответ: } \underline{\underline{72}}
 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{c} \text{20001228} \\ \text{WZ} \\ \text{WZ} \end{array} \quad \begin{array}{c} W^3 ? \\ \text{WZ} = 20001 = W \end{array}$$

$$z(10^{3k}-1) = 3 \cdot 10^{2k} + 3 \cdot 10^k - 1$$

$$2(10^{3k} - 1) = 3 \cdot 10^{2k} + 3 \cdot 10^k$$

$$99 - 9 - 9 \cdot 10^{2k} + 3 \cdot 10^k$$

может быть сделано
подручными,

99...97000...029...9 ←
1 1 ^{1-ый разряд}
 $2k+1$ $k+1$
 a_k цифра a_k цифра

все цифры-9, кроме цифр с индексом $k+1$ и $2k+1$

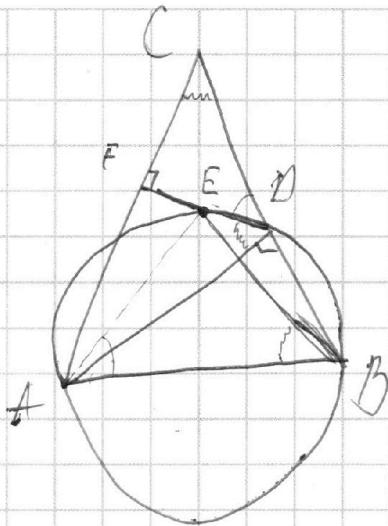
$$\Rightarrow \text{bering } 3k - ((2k+1) \cdot (k+1) + 1) = 2k-1$$

$$\text{Omkern: } 2k-1 = 40001$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} AC &= 20 \\ AB &= 16 \\ BE &= 9 \end{aligned}$$

$\sqrt{3}$

$AF?$

$$\begin{aligned} \text{т.к. } AB \text{ диаметр} \Rightarrow \angle ADB = 90^\circ &= \angle ADC \\ &= \angle AOC \end{aligned}$$

$$\triangle AFD \sim \triangle ADC \Rightarrow \frac{AF}{FD} = \frac{AD^2}{AC} = AF \cdot AC$$

$$AF = \frac{AD^2}{AC}$$

$$\angle AEB = 90^\circ \quad AF = \sqrt{100 - 81} = \sqrt{19} \text{ по параллелю}$$

$$\frac{18}{\sin AEB} = \frac{20}{\sin ABC} \text{ по тк синусов } \triangle ABC$$

$$\sin ABC = 2 \cdot \sin AEB$$

$$\angle ABE = \angle ADE = 90^\circ \quad \angle FDC = \angle ACB \text{ из вписанности}$$

$$\frac{AE}{\sin ACB} = \frac{AE}{\sin ABE} = AB = \frac{AD}{\sin ABC}$$

$$AE \cdot \sin ABC = AD \cdot \sin ACB$$

$$2\sqrt{19} = 2AB = AD$$

$$AF = \frac{AD^2}{AC} = \frac{4 \cdot 19}{20} = \frac{19}{5}$$

$$\text{Ответ: } AF = \frac{19}{5}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3

4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$\square \quad \square \quad \square \quad \cdots \quad \square$

$5 \rightarrow 9$

n

путь всего к коробкам

т.к. игрок выбирает

на шаг ~~до конца~~, то можно

считать, что он изначально

членами

5

$n-5$

западок в коробок, а

потом ~~всего~~ следующий выбирает

~~членами~~

$$\frac{C_5^3}{C_n^3}$$

- вероятность выигрыша
сначала

C_5^3 - способы выбрать
коробки для выигрыша

C_n^3 - все способы

(все способы размещения)

C_9^3 - способы выиграть

Когда разбрасываю выбирать 9 коробок

C_n^3 - все способы

~~членами~~

$$\left(\frac{\frac{C_9^3}{C_5^3}}{\frac{C_n^3}{C_5^3}} \right)$$

$$= \frac{\frac{C_9^3}{C_5^3}}{\frac{C_n^3}{C_5^3}} = \frac{\frac{9!}{(9-3)!}}{\frac{n!}{(n-3)!}} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Ответ: $\frac{C_9^3}{C_5^3}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Уч 10 b_5, b_6, b_7, b_8 - 5, 6, 7, 8 члены, арифм прогр.

(непост.) сост.

пусть d разность прогрессии $a \neq 0$

пусть x_1, x_2 - корни 10го уравн.

z_1, z_2 - корни 20го уравн.

$$a^2 - 4a = x_1 + x_2 = z_1 + z_2 = \frac{a^3 - 4a^2}{5}$$

по Виетте

$$5(a^2 - 4a) = a(a^2 - 4a)$$

$$(a^2 - 4a)(a - 5) = 0$$

$$a(a-4)(a-5) = 0 \Rightarrow a \in \begin{cases} a=0 \\ a=4 \\ a=5 \end{cases}$$

D_1, D_2 - дискriminanti
10го и 20го уравнений соответ.

$$b_7 - b_6 = d$$

$$b_8 - b_5 = 3d$$

о.о.о. $d > 0$, иначе поменяем b_6 с b_7

(просто пересвердим)
затем наперед

$b_5 < b_8$
местами

II

Изменение корней 10го уравнения = d , b_7

$$20 \Rightarrow 3d$$

$$\frac{\sqrt{D_1}}{1} = d$$

$$\frac{\sqrt{D_2}}{5} = 3d$$

$$3\sqrt{D_1} = \sqrt{D_2}$$

$$15\sqrt{D_1} = \sqrt{D_2}$$

$$15 = \sqrt{\frac{D_2}{D_1}}$$

если $a \neq 0$, $D_1 = (a^2 - 4a)^2 + 4(6a - a^2 - 4) > 0$, т.к. есть 2 корня

если $a = 0$, $D_1 = 4(-4) < 0 \Rightarrow a \neq 0$

если $a = 4$

$$D_1 = 4(4)$$

$$D_2 = 4 \cdot 5(2 \cdot 64 + 24 + 15) = 167 \cdot 4 \cdot 5$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{D_2}{D_1} = 15^2 \Rightarrow$ если a число D_1, D_2 тоже числа
 при $a=4 \sqrt{\frac{D_2}{D_1}} \neq 15$ \Downarrow
 $\sqrt{a=5}$
 $D_2 : D_1$
 но при $a=4$
 $\text{ord}_2(D_1) > \text{ord}_2(D_2)$
 степень вхождения
 как минимум по этому
 не $= 15$, также можно
 просто посчитать.
 $D_1 = 25 + 4 = 29$
 $\frac{D_2}{25} = 25 + 4 \cdot 59 = 236 + 25 = 261 = 3$
 $\sqrt{\frac{261 \cdot 25}{29}} \neq 15$
 \Downarrow таких a нет
 ответ: таких a не существует



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$a = y - 20$$

$$b = \frac{x}{2\sqrt{3}}$$

$$|a+b| + |a-b| \leq 8$$

Составь

№ 6
№ 12

$$k = \pm a \Rightarrow |a+b| + |a-b| = |m+k| + |m-k|$$

$m = \pm b$ т.о. $m, k > 0$

тогда

или

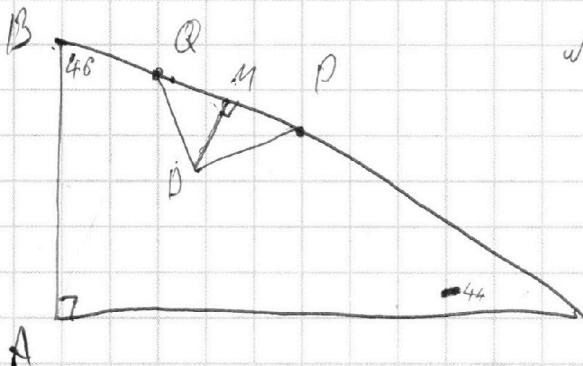


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2} \text{ к} \quad AB = BP \\ AC = CQ$$

M - середина QP

т.к. QD = DP

Q лежит на отрезке QP
(пунктирная линия $ML \perp BC$)

$DM = QM = MP$, т.к. DM является медианой в треугольнике D

по нер-ву $\Delta AB + AC > BC \Rightarrow Q$ лежит между B и P

пусть $BC = 1$. $\angle ACB = 90^\circ - 46^\circ = 44^\circ$

$$\Rightarrow BA = \sin 44^\circ = BP, \quad CQ = AC = \cos 44^\circ$$

$$\angle DCB = \angle DCM, \quad DMC = 90^\circ$$

$$QM = \frac{\sin 44^\circ + \cos 44^\circ - 1}{2}$$

II

DM

$$CM = \frac{QC - QM}{2} = \cos 44^\circ - \frac{\sin 44^\circ + \cos 44^\circ - 1}{2}$$

$$\angle DCB = \angle DCM = \arctg\left(\frac{DM}{CM}\right) = \arctg\left(\frac{\frac{\sin 44^\circ + \cos 44^\circ - 1}{2}}{\cos 44^\circ - \frac{\sin 44^\circ + \cos 44^\circ - 1}{2}}\right)$$

Ответ:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!